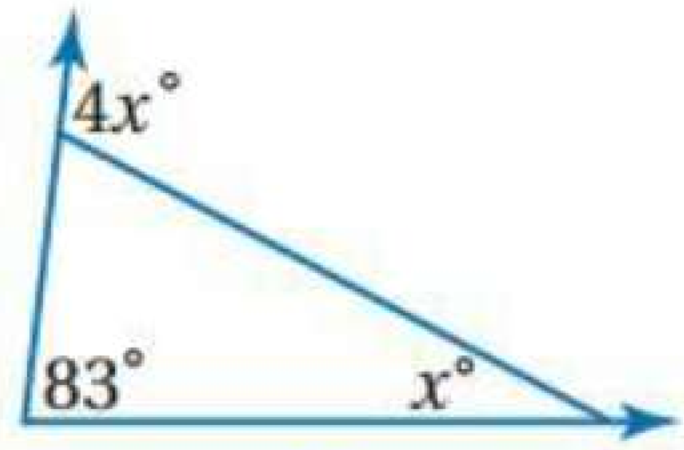
5

الأشكال الرباعية

التهيئة

أوجد قيمة x مقربة إلى أقرب عُشْر :

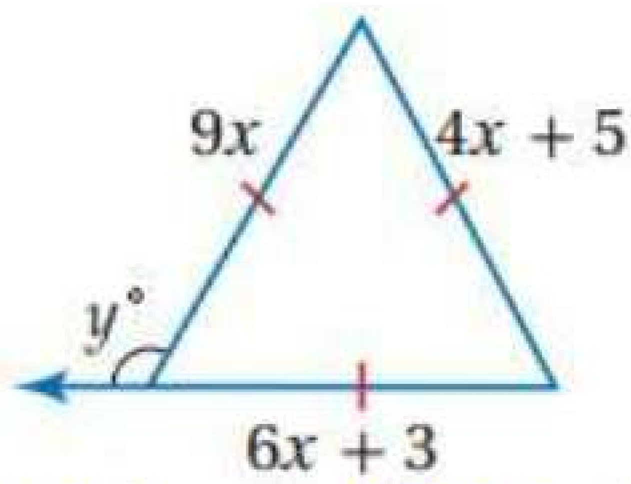
(1



الزاوية الخارجة عن المثلث = مجموع الزاويتين الداخلتين البعيدتين

$$4x = 83 + x$$
$$4x - x = 83$$
$$3x = 83$$
$$x = 27.7$$

(2



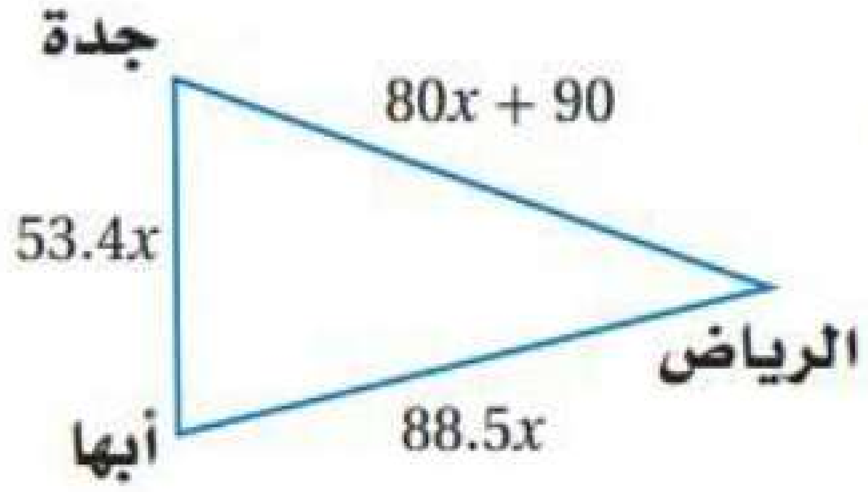
بما أن المثلث جميع أضلاعه متطابقة إذا:

$$9x = 4x + 5$$
$$9x - 4x = 5$$
$$5x = 5$$
$$x = 1$$

بما أن المثلث جميع أضلاعه متطابقة إذا: جميع زواياة متطابقة و= 60°

$$y = 180 - 60$$
$$y = 120^\circ$$

3) مدن: تمثل مواقع كل من الرياض وجدة وأبها رؤوس مثلث كما في الشكل أدناه. إذا كان محيط هذا المثلث 2198 km، فأوجد المسافة الجوية بين كل من المدن الثلاث.



محيط المثلث = مجموع أطوال أضلاعه

$$= (53.4x + 80x + 90 + 88.5x) = 2198$$

$$(221.9x) = 90 - 2198$$

$$(221.9x) = 2108$$

$$9.5 = x$$

المسافة بين الرياض وجدة = $850 = 80 \times 9.5 + 90 = 80x + 90$

المسافة بين الرياض وأبها = $840.8 = 88.5 \times 9.5 = 88.5x$

المسافة بين جدة وأبها = $507.3 = 53.4 \times 9.5 = 53.4x$

حدِّد ما إذا كان $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$ متوازيين أو متعامدين أو غير ذلك في كل مما يلي:

4) $A(3, 3), B(8, 2), C(6, -1), D(1, 0)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ميل $\overleftrightarrow{AB}$: $\frac{2-3}{8-3} = \frac{-1}{5}$

ميل $\overleftrightarrow{CD}$: $\frac{0+1}{1-6} = \frac{1}{-5}$

بما أن ميل كل من $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{CD}$ متساوينن إذا فهما متوازيين

5) $A(4, 2), B(1, -3), C(-3, 5), D(2, 2)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ميل $\overleftrightarrow{AB}$: $\frac{-3-2}{1-4} = \frac{-5}{-3} = \frac{5}{3}$

ميل $\overleftrightarrow{CD}$: $\frac{2-5}{2-(-3)}=\frac{-3}{5}$

بما أن ميل كل من $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{CD}$ حاصل ضربهم = -1 إذا فهما متعامدان

6) $A(-8,-7), B(4,-4), C(-2,-5), D(1,7)$

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

ميل $\overleftrightarrow{AB}$: $\frac{-4+7}{4+8}=\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$

ميل $\overleftrightarrow{CD}$: $\frac{7+5}{1+2}=\frac{12}{3}=4$

بما أن ميل كل من $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{CD}$ غير متساويين فهما غير متوازيين وليس حاصل ضربهم = -1 إذا فهما غير ذلك.

7) **حدائق:** صمَّم مهندس رسمًا لحديقة رباعيّة الشكل، إحداثيات رؤوسها: $A(-2,1), B(3,-3), C(5,7), D(-3,4)$، إذا رسم ممرين يقطعانها $\overleftrightarrow{BD}$, $\overleftrightarrow{AC}$، فهل الممران متعامدان؟ فسّر إجابتك.

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

ميل $\overleftrightarrow{BD}$: $\frac{-3-4}{3+3}=\frac{-7}{6}$

ميل $\overleftrightarrow{AC}$: $\frac{7-1}{5+2}=\frac{6}{7}$

بما أن ميل كل من $\overleftrightarrow{BD}$ و $\overleftrightarrow{AC}$ حاصل ضربهم = -1 إذا فهما متعامدان

أوجد المسافة بين كل نقطتين، ثم أوجد إحداثيات نقطة منتصف القطعة الواصلة بينهما في كل مما يلي:

8) $J(-6,2), K(-1,3)$

$$JK = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$JK = \sqrt{(-1+6)^2 + (3-2)^2}$$

$$JK = \sqrt{(-1+6)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{26}$$

9) $R(2, 5), S(8, 4)$

$$RS = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$RS = \sqrt{(8-2)^2 + (4-5)^2}$$

$$RS = \sqrt{(6)^2 + (-1)^2} = \sqrt{37}$$

10) **مسافات:** وقف شخص عند النقطة $T(80, 20)$ من مستوى إحداثي، ورغب في الانتقال إلى كل من $U(20, 60)$ وَ $V(110, 85)$ ، فما أقصر مسافة يمكن أن يقطعها الشخص؟ فسِّر إجابتك.

$$TU = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$TU = \sqrt{(20-80)^2 + (60-20)^2}$$

$$TU = \sqrt{(-60)^2 + (40)^2} = 20\sqrt{13} = 72.11$$

$$TV = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$TV = \sqrt{(110-80)^2 + (85-20)^2}$$

$$TV = \sqrt{(30)^2 + (65)^2} = 5\sqrt{205} = 71.6$$

أقصر مسافة يقطعها الشخص هي من النقطة T إلى U

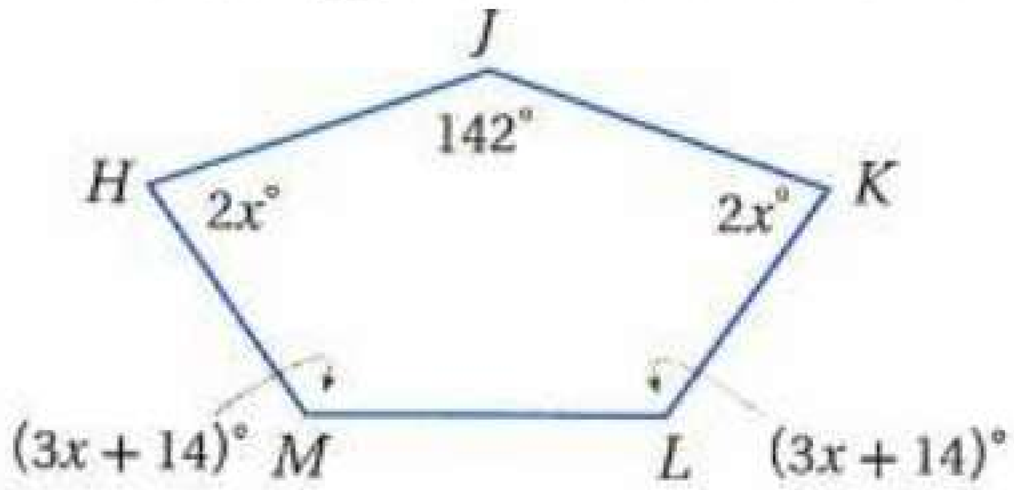
5-1 زوايا المضلع

تحقق

1A) أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للثماني المحدّب.

$$(n-2).180=(8-2).180=1080^\circ$$

1B) أوجد قياسات جميع الزوايا الداخلية للخماسي المجاور.



مجموع قياسات زواياة =

$$(n-2).180=(5-2).180=540^\circ$$

$$2x+142+2x+(3x+14)+(3x+14)=540^\circ$$

$$4x+142+6x+28=540$$

$$10x=540-(142+28)$$

$$10x=370$$

$$x=37$$

$$\angle H=\angle K=2x=2\times 37=74$$

$$\angle L=\angle M=(3x+14)=3\times 37+14=125^\circ$$

2A) **سجاد:** أوجد قياس زاوية داخلية لسجادة على شكل ثماني منتظم.

مجموع قياسات الزوايا الداخلية =

$$(n-2).180 = (8-2).180 = 1080^\circ$$

قياس كب زاوية داخلية = مجموع قياسات الزوايا الداخلية ÷ عدد الزاويا الداخلية

$$\frac{1080}{6} = 135^\circ$$

2B) **نوافير:** تزين النوافير الأماكن العامة، ويقام بعضها على شكل مضلعات منتظمة.

أوجد قياس زاوية داخلية لنافورة على شكل تساعي منتظم.

مجموع قياسات الزوايا الداخلية =

$$(n-2).180 = (9-2).180 = 1260^\circ$$

قياس كب زاوية داخلية = مجموع قياسات الزوايا الداخلية ÷ عدد الزاويا الداخلية

$$\frac{1260}{9} = 140^\circ$$

3) إذا كان قياس زاوية داخليّة لمضلع منتظم يساوي 144°، فأوجد عدد أضلاعه.

$144n = (n-2) . 180$ **(كتابة معادلة)**

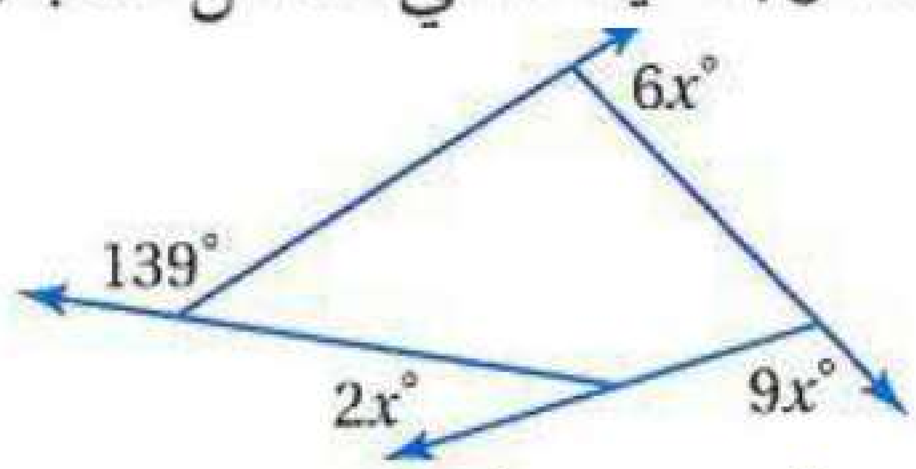
$144n = 180n - 360$ **(خاصية التوزيع)**

$-36n = -360$ **(بطرح 180n من كلا الطرفين)**

$n = 10$ **(بقسمة كلا الطرفين على 36–)**

إذن للمضلع 10 أضلاع

4A) أوجد قيمة x في الشكل المجاور .



(نظرية مجموع قياسات الزوايا الخارجية للمضلع)

$$6x + 9x + 2x + 139 = 360^\circ$$

$$17x = 360^\circ - 139$$

$$17x = 360^\circ - 139^\circ$$

$$x = 13^\circ$$

4B) أوجد قياس زاوية خارجيّة لمضلع منتظم ذي 12 ضلعًا.

$12n = 360$ (نظرية مجموع قياسات الزوايا الخارجية للمضلع)

$n = 30$

إذن قياس كل زاوية خارجية للمضلع المنتظم ذي 12 ضلعا يساوي 30°

تأكد:

المثال 1 أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لكل من المضلعين المحدبين الآتيين:

1) العشاري

$$\mathbf{n = 10}$$

$$(n-2).180 = (10-2).180 = 1440^\circ$$

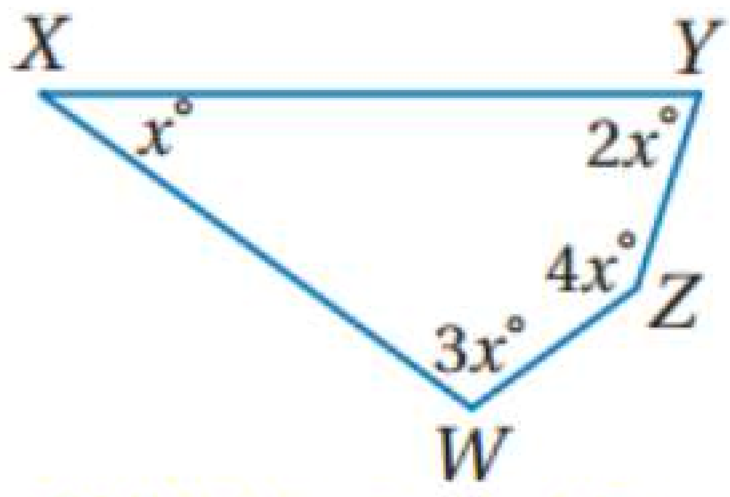
2) الخماسي

$$\mathbf{n = 5}$$

$$(n-2).180 = (5-2).180 = 540^\circ$$

أوجد قياسات جميع الزوايا الداخلية لكل من المضلعين الآتيين:

3)



مجموع قياسات زوايا الشكل =

$$(n-2).180 = (4-2).180 = 360^\circ$$

$$x + 2x + 3x + 4x = 360^\circ$$

$$10x = 360^\circ$$

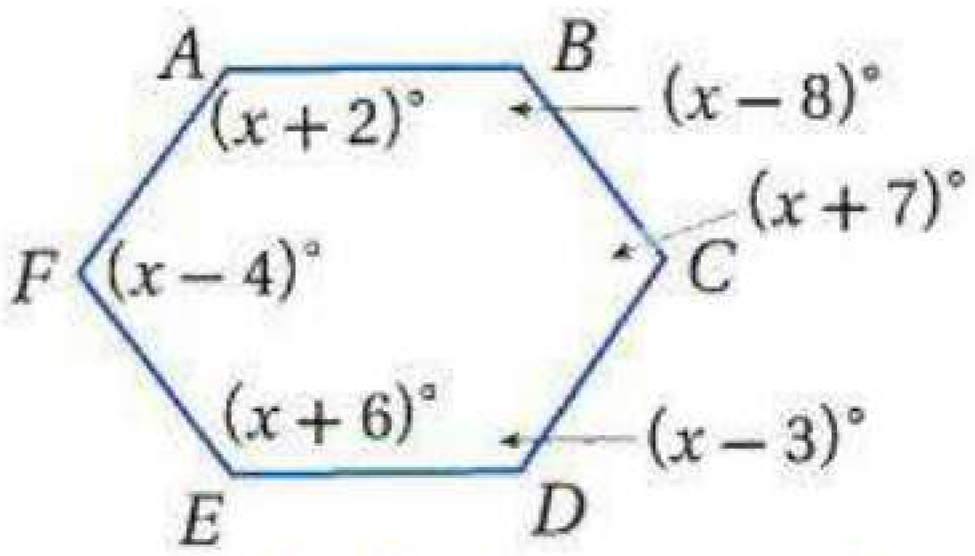
$$\angle X = 36$$

$$\angle Y = 2 \times 36 = 72^\circ$$

$$\angle W = 3 \times 36 = 108^\circ$$

$$\angle Z = 4 \times 36 = 144^\circ$$

4)



مجموع قياسات زوايا الشكل =

$$(n-2).180 = (6-2).180 = 720^\circ$$

$$(x+2)+(x-8)+(x-4)+(x+7)+(x+6)+(x-3) = 720^\circ$$

$$6x + 0 = 720$$

$$x = 120$$

$$\angle A = 120 + 2 = 122^\circ$$

$$\angle B = 120 - 8 = 112^\circ$$

$$\angle C = 120 + 7 = 127^\circ$$

$$\angle D = 120 - 3 = 117^\circ$$

$$\angle E = 120 + 6 = 126^\circ$$

$$\angle F = 120 - 4 = 116^\circ$$

المثال 2 5) **عجلة دوارة:** العجلة الدوّارة في الصورة المجاورة على شكل مضلع منتظم عدد أضلاعه 15 ضلعًا. أوجد قياس زاوية داخليّة له.

مجموع زوايا المضلع عند $(n = 15)$ =

$$(n-2).180 = (15-2).180 = 2340^\circ$$

قياس أي زاوية داخلية له $= \frac{2340}{15} = 156^\circ$

إذا كان قياس إحدى الزوايا الداخلية لمضلع منتظم معطى، فأوجد عدد الأضلاع في كل مما يأتي:

6) 150°

$150n = (n - 2) . 180$ (كتابة معادلة)

$150n = 180n - 360$ (خاصية التوزيع)

$-30n = -360$ (بطرح 180n من كلا الطرفين)

$n = 12$ (بقسمة كلا الطرفين على 30−)

إذن للمضلع 12 ضلع

7) 170°

$170n = (n - 2) . 180$ (كتابة معادلة)

$170n = 180n - 360$ (خاصية التوزيع)

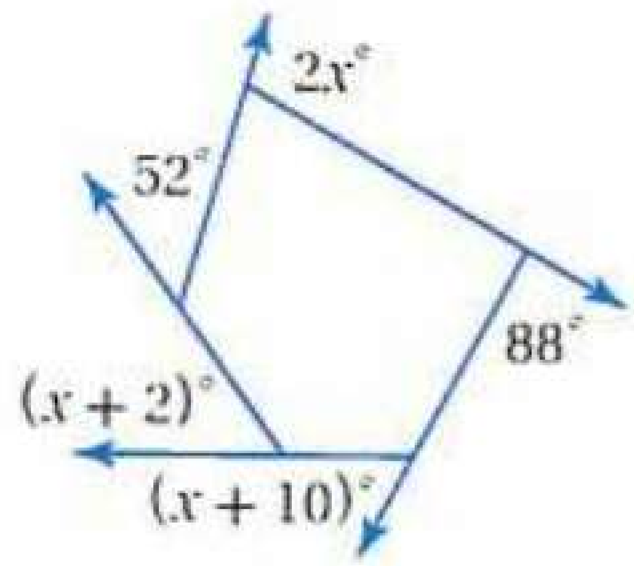
$-10n = -360$ (بطرح 180n من كلا الطرفين)

$n = 36$ (بقسمة كلا الطرفين على 30−)

إذن للمضلع 36 ضلع

المثال 4 أوجد قيمة x في كلٍّ من الشكلين الآتيين:

8)



(نظرية مجموع قياسات الزوايا الخارجية للمضلع)

$$2x + 52 + (x + 2) + (x + 10) + 88 = 360^\circ$$

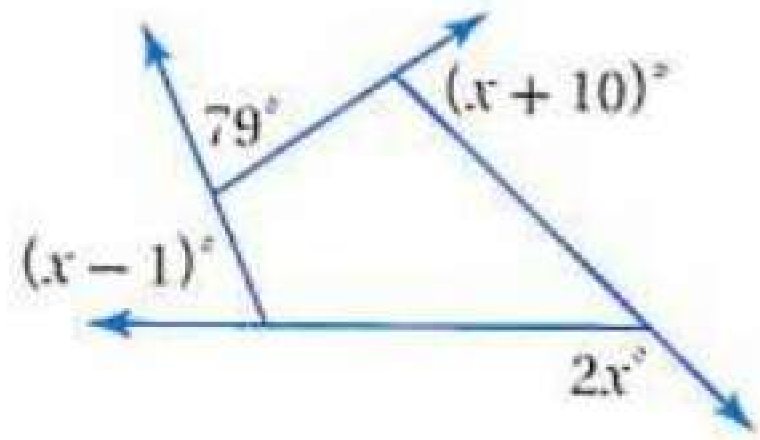
$$4x + 152 = 360^\circ$$

$$4x = 360^\circ - 152$$

$$4x = 208^\circ$$

$$x = 52$$

(9



(نظرية مجموع قياسات الزوايا الخارجية للمضلع)

$$79+(x+10)+(x-1)+2x=360^\circ$$

$$4x+88=360^\circ$$

$$4x=360^\circ-88$$

$$4x=272^\circ$$

$$x=68$$

أوجد قياس زاوية خارجيّة لكل من المضلعين المنتظمين الآتيين:

(10 رباعي

$4n=360^\circ$ (نظرية مجموع قياسات الزوايا الخارجية للمضلع)

$n=90^\circ$

إذن قياس كل زاوية خارجية للمضلع المنتظم ذي 4 ضلعا يساوي 90°

(11 ثُماني

$8n=360^\circ$ (نظرية مجموع قياسات الزوايا الخارجية للمضلع)

$n=45^\circ$

إذن قياس كل زاوية خارجية للمضلع المنتظم ذي 4 ضلعا يساوي 45°

تدرب وحل المسائل:

المثال 1 أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لكل من المضلعات المحدبة الآتية:

12) ذو 12 ضلعًا

$n = 12$

$$(n-2).180 = (12-2).180^\circ = 1800^\circ$$

13) ذو 20 ضلعًا

$n = 20$

$$(n-2).180 = (20-2).180^\circ = 3240^\circ$$

14) ذو 29 ضلعًا

$n = 29$

$$(n-2).180 = (29-2).180^\circ = 4860^\circ$$

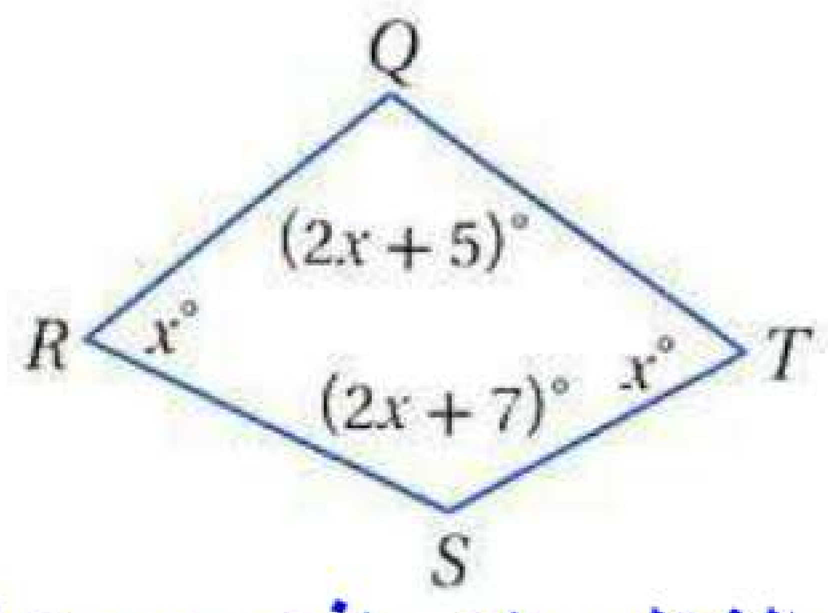
15) ذو 32 ضلعًا

$n = 32$

$$(n-2).180 = (32-2).180^\circ = 4500^\circ$$

أوجد قياسات جميع الزوايا الداخلية لكل من المضلعات الآتية:

16)



بما أن الشكل رباعي إذن مجموع قياسات الزوايا الداخلية له =

$$(n-2).180 = (4-2).180^\circ = 360^\circ$$

$360^\circ = m\angle Q + m\angle R + m\angle S + m\angle T$

$360^\circ = (2x+5) + x + (2x+7) + x$

$360^\circ = 6x + 12$

$360 - 12 = 6x$

$348 = 6x$

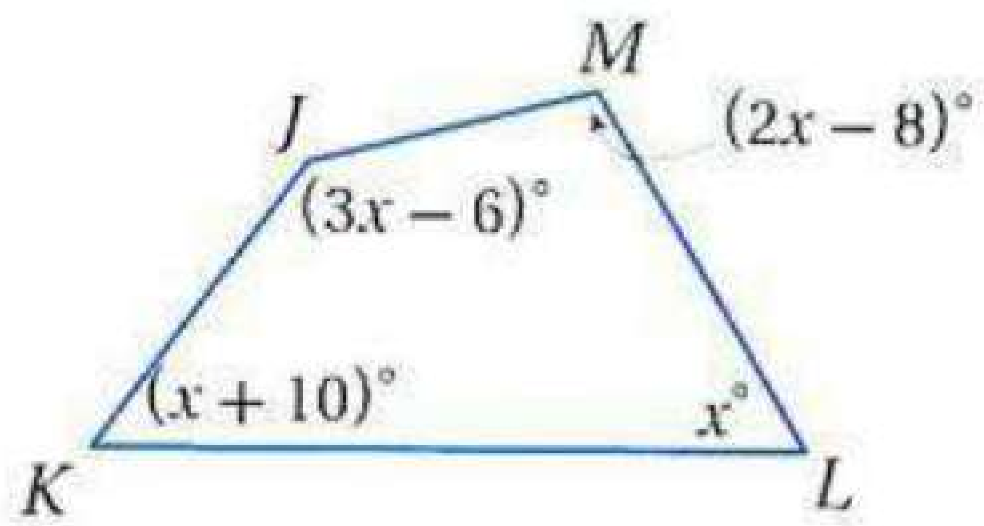
$x = 58$

$m\angle R = m\angle T = 58^\circ$

$m\angle Q = (2x+5) = (2\times 58 + 5) = 121^\circ$

$m\angle S = (2x+7) = (2\times 58 + 5) = 123^\circ$

(17



بما أن الشكل رباعي إذن مجموع قياسات الزوايا الداخلية له =

$(n-2).180 = (4-2).180^\circ = 360^\circ$

$360^\circ = m\angle J + m\angle M + m\angle L + m\angle K$

$360^\circ = (3x-6) + (2x-8) + x + (x+10)$

$360^\circ = 7x - 4$

$360 + 4 = 7x$

$348 = 6x$

$x = 52$

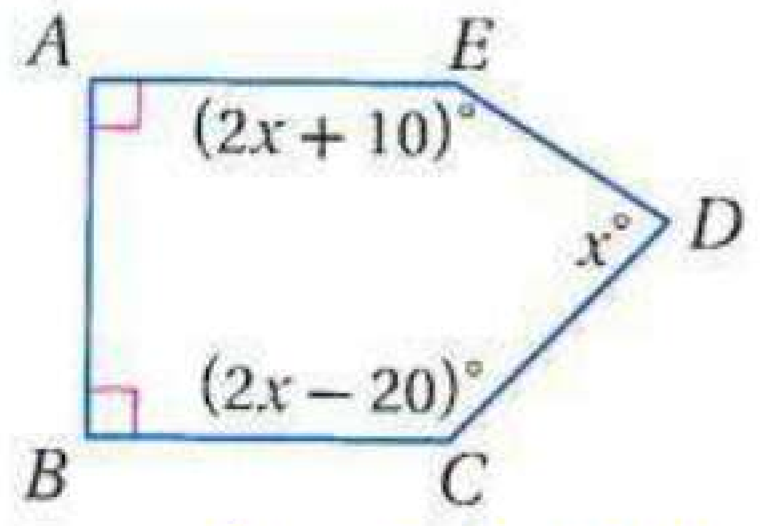
$m\angle J = (3\times 52 - 6) = 150^\circ$

$m\angle M = (2\times 52 - 8) = 96^\circ$

$m\angle L = x = 52^\circ$

$$m\angle K = (x+10) = (52+10) = 62^\circ$$

(18



بما أن الشكل خماسي إذن مجموع قياسات الزوايا الداخلية له =

$$(n-2).180 = (5-2).180^\circ = 540^\circ$$

$$540^\circ = m\angle A + m\angle B + m\angle C + m\angle D + m\angle E$$

$$540^\circ = 90 + 90 + (2x-20) + x + (2x+10)$$

$$540^\circ = 5x + 170$$

$$540 - 170 = 5x$$

$$540 = 5x$$

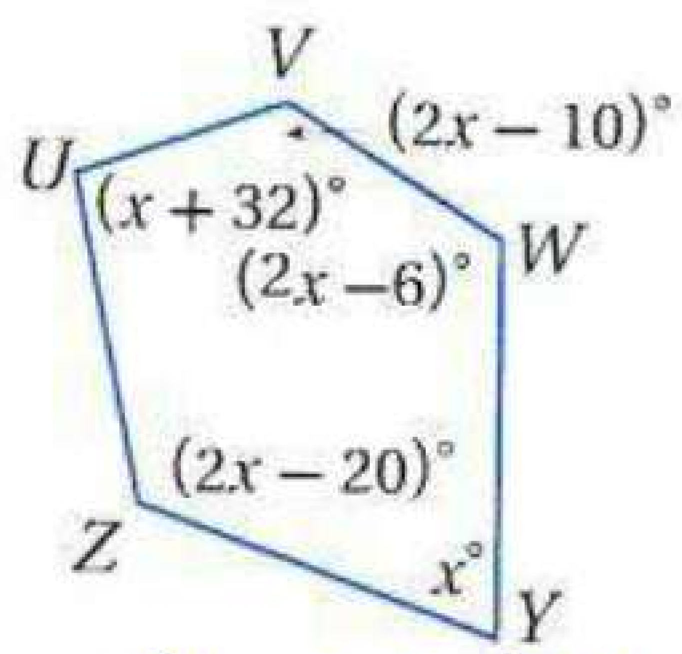
$$x = 74$$

$$m\angle D = 74^\circ$$

$$m\angle C = (2\times 74 - 20) = 128^\circ$$

$$m\angle E = (2\times 74 + 10) = 158^\circ$$

(19



بما أن الشكل خماسي إذن مجموع قياسات الزوايا الداخلية له =

$$(n-2).180 = (5-2).180^\circ = 540^\circ$$

$540^\circ = m\angle U + m\angle V + m\angle W + m\angle Y + m\angle Z$

$540^\circ = (x+32)+(2x-10)+(2x-6)+x+(2x-20)$

$540^\circ = 8x-4$

$x = 68$

$m\angle U = (68+32) = 100^\circ$

$m\angle V = (2\times 68-10) = 126^\circ$

$m\angle W = (2\times 68-6) = 130^\circ$

$m\angle Y = x = 68^\circ$

$m\angle Z = (2\times 68-20) = 116^\circ$

20) ما مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للمضلع في الشكل المجاور؟

$n = 5$

$(n-2).180 = (5-2).180^\circ = 540^\circ$

المثال 2 أوجد قياس زاوية داخليّة لكل من المضلعات المنتظمة الآتية:

21) الاثنا عشري

$n = 12$

$(n-2).180 = (12-2).180^\circ = 1800^\circ$

$\frac{1800}{12} = 150^\circ$

22) الخماسي

$n = 5$

$(n-2).180 = (5-2).180^\circ = 540^\circ$

$\frac{540}{5} = 108^\circ$

23) العشاري

$n = 10$

$$(n-2).180 = (10-2).180^{\circ} = 1440^{\circ}$$

$$\frac{1440}{10} = 144^{\circ}$$

24) التُّساعي

$n = 9$

$$(n-2).180 = (9-2).180^{\circ} = 1260^{\circ}$$

$$\frac{1260}{9} = 140^{\circ}$$

المثال 3 إذا كان قياس إحدى الزوايا الداخلية لمضلع منتظم معطى، فأوجد عدد الأضلاع في كل مما يأتي:

25) 60°

$$60n = (n-2).180$$

$$60n = n180 - 360$$

$$60n - n180 = -360$$

$$-120n = -360$$

$$n = 3$$

إذن قياس كل زاوية خارجية للمضلع المنتظم ذي3 ضلعا يساوي 60°

26) 90°

$$90n = (n-2).180$$

$$90n = n180 - 360$$

$$90n - n180 = -360$$

$$-90n = -360$$

$$n = 4$$

إذن قياس كل زاوية خارجية للمضلع المنتظم ذي 4 ضلعا يساوي 60°

موقع حلول كتبي

120° (27

$$120n = (n-2).180$$
$$120n = n180 - 360$$
$$120n - n180 = -360$$
$$-n60 = -360$$
$$n = 6$$

إذن قياس كل زاوية خارجية للمضلع المنتظم ذي 6 ضلعا يساوي 120°

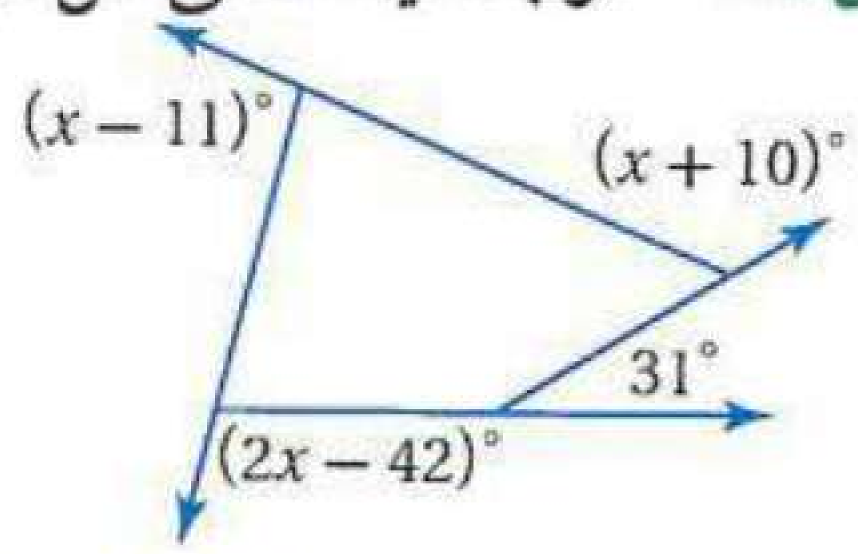
156° (28

$$156n = (n-2).180$$
$$156n = n180 - 360$$
$$156n - n180 = -360$$
$$-24n = -360$$
$$n = 15$$

إذن قياس كل زاوية خارجية للمضلع المنتظم ذي 15 ضلعا يساوي 156°

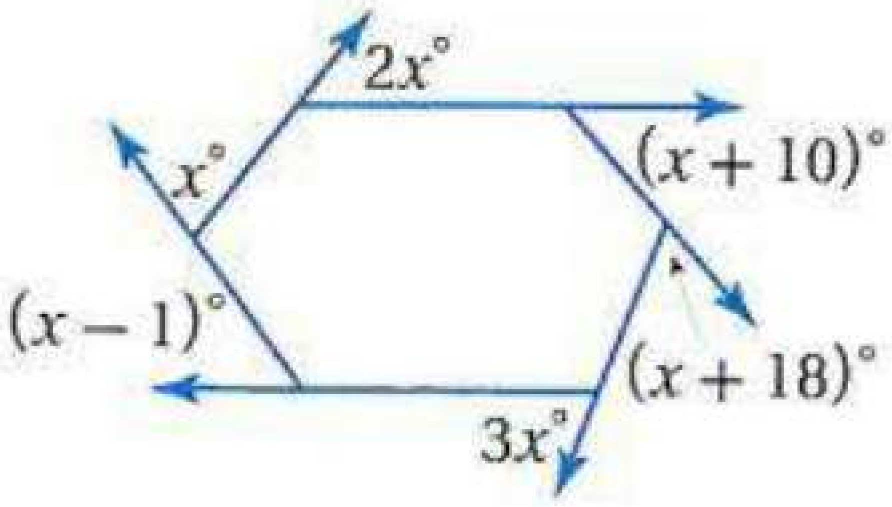
المثال 4 أوجد قيمة x في كل من الشكلين الآتيين:

(29



$$(x-11)+(x+10)+(2x-42)+31^\circ = 360^\circ$$
$$4x - 12 = 360$$
$$4x = 372$$
$$x = \frac{372}{4} = 93$$

30)



$$(2x)+(x+10)+(x+18)+3x+(x-1)+x=360^\circ$$

$$9x+27=360$$

$$9x=333$$

$$x=\frac{333}{9}=37$$

أوجد قياس زاوية خارجيّة لكل من المضلعات المنتظمة الآتية:

31) العشاري

$$10n=360$$

نظرية مجموع الزوايا الخارجية للمضلع

$$n=\frac{360}{10}=36^\circ$$

32) الخماسي

$$5n=360$$

نظرية مجموع الزوايا الخارجية للمضلع

$$n=\frac{360}{5}=72^\circ$$

33) السداسي

$$6n=360$$

نظرية مجموع الزوايا الخارجية للمضلع

$$n=\frac{360}{6}=60^\circ$$

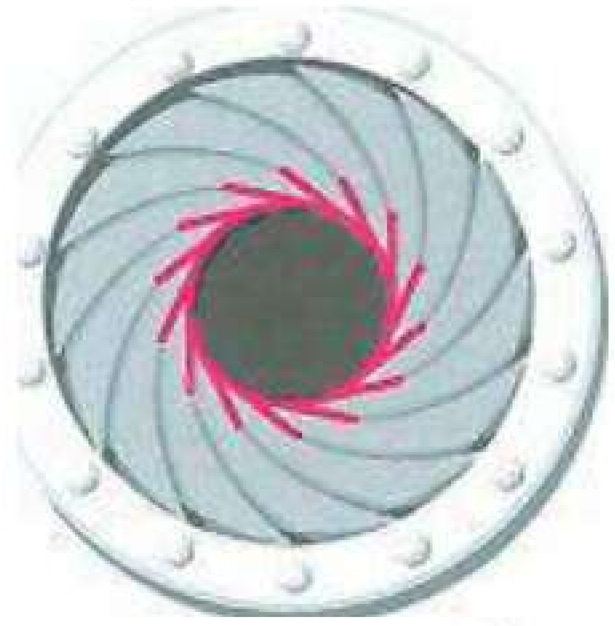
34) ذو 15 ضلعًا

$$15n=360$$

نظرية مجموع الزوايا الخارجية للمضلع

$$n=\frac{360}{15}=24^\circ$$

35) **تصوير:** تشكّل الفتحة التي ينفذ منها الضوء إلى عدسة آلة التصوير في الشكل المجاور مضلعًا منتظمًا ذا 14 ضلعًا.



a) أوجد قياس زاوية داخلية؟

$n = 14$ $\quad (14-2).180 = 2160^\circ$

قياس الزاوية الداخلية $= \dfrac{2160}{14} = 154.3^\circ$ تقريبا

b) أوجد قياس زاوية خارجية؟

$14n = 360^\circ$ (نظرية مجموع قياسات الزوايا الخارجية للمضلع)

$n = 25.7$ (بقسمة كلا الطرفين على 14)

إذن قياس كل زاوية خارجية للمضلع $= 25.7^\circ$ تقريباً

أوجد قياس زاوية خارجية وزاوية داخلية للمضلع المنتظم المعطى عدد أضلاعه في كل إلى أقرب عُشر:

36) 7

$n = 7$ $\quad (7-2).180 = 900^\circ$

قياس الزاوية الداخلية $= \dfrac{900}{7} = 128.6^\circ$ تقريباً

$7n = 360^\circ$ (نظرية مجموع قياسات الزوايا الخارجية للمضلع)

$n = 51.4$ (بقسمة كلا الطرفين على 7)

إذن قياس كل زاوية خارجية للمضلع $= 51.4^\circ$ تقريباً

37) 13

$n = 13$ $\quad (13-2).180 = 1980^\circ$

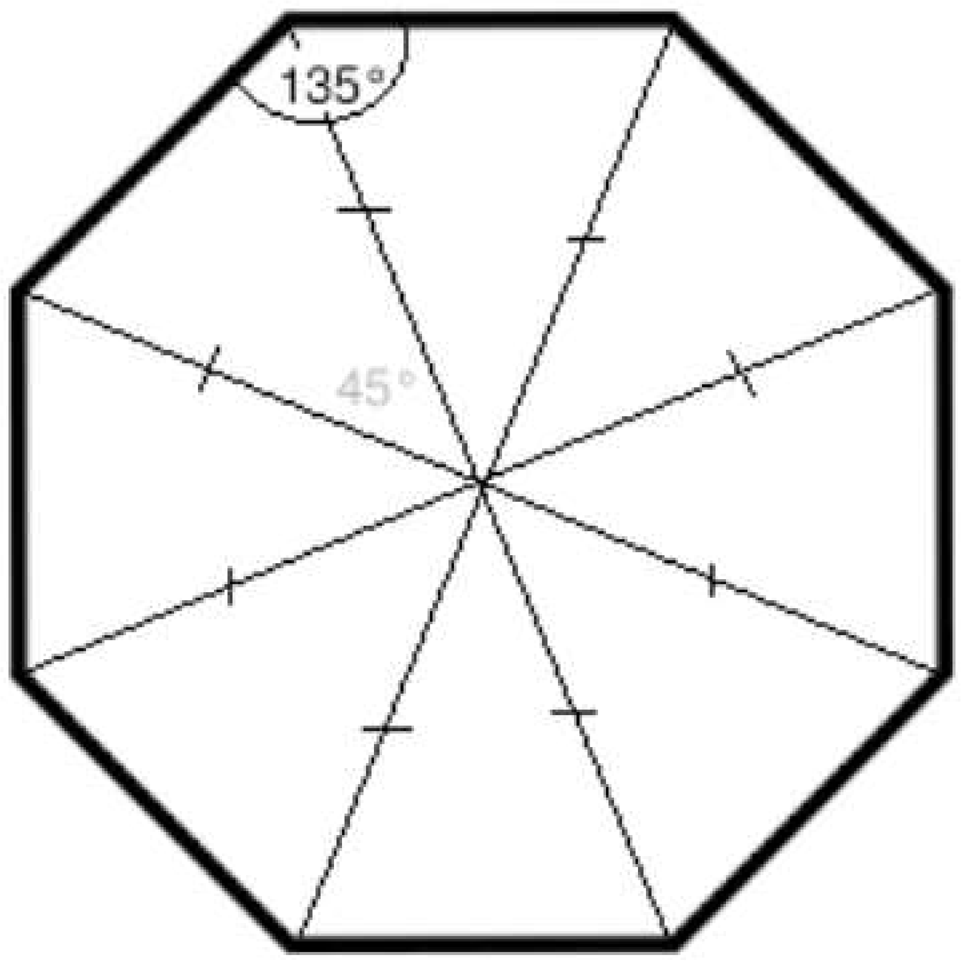
قياس الزاوية الداخلية $= \dfrac{1980}{13} = 152.3^\circ$ تقريباً

$13n = 360^\circ$ (نظرية مجموع قياسات الزوايا الخارجية للمضلع)

$n = 51.4$ (بقسمة كلا الطرفين على 13)

إذن قياس كل زاوية خارجية للمضلع = 27.7° تقريباً

38) أثبت أن مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمضلع الثماني يساوي 1080°، دون استعمال صيغة مجموع الزوايا الداخلية للمضلع.



يقسم المضلع الى ثمان مثلثات

مجموع زوايا 8 مثلثات = $8 \times 180^\circ = 1440^\circ$

مجموع الزوايا حول نقطة المركز = 360°

∴ مجموع زوايا المضلع الثماني الداخلية = $1440^\circ - 360^\circ = 1080^\circ$

قياس الزاوية الداخلية للمضلع الثماني المنتظم = $1080^\circ \div 8 = 135^\circ$

39) **برهان:** استعمل الجبر لإثبات نظرية مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة للمضلع.

افرض أن N تساوي مجموع قياسات الزوايا الخارجية لمضلع عدد أضلاعه n.

N تساوي مجموع قياسات الأزواج الخطية مطروحاً منه مجموع قياسات الزوايا الداخلية.

$$= 180n - 180(n - 2)$$

$$= 180n - 180n + 360 = 360$$

لذا، فإن مجموع قياسات الزوايا الخارجية لأي مضلع محدب يساوي 360°.

جبر، أوجد قياسات جميع الزوايا الداخلية لكل من المضلعين الآتيين :

40) عشاري قياسات زواياه الداخليّة:

$x + 5, x + 10, x + 20, x + 30, x + 35, x + 40, x + 60, x + 70, x + 80, x + 90$

$$(n-2).180 = (10-2).180^\circ = 1440^\circ$$

$$1440^\circ = (x+5)+(x+10)+(x+20)+(x+30)+(x+35)$$
$$+(x+40)+(x+60)+(x+70)+(x+80)+(x+90)$$

$$1440^\circ = 10x + 440$$
$$1440^\circ - 440 = 10x$$
$$1000 = 10x$$
$$x = 100$$
$$(x+5) = 100+5 = 105^\circ$$
$$(x+10) = 100+10 = 110^\circ$$
$$(x+20) = 100+20 = 120^\circ$$
$$(x+30) = 100+30 = 130^\circ$$
$$(x+35) = 100+35 = 135^\circ$$
$$(x+40) = 100+40 = 145^\circ$$
$$(x+60) = 100+60 = 160^\circ$$
$$(x+70) = 100+70 = 170^\circ$$
$$(x+80) = 100+80 = 180^\circ$$
$$(x+90) = 100+90 = 190^\circ$$

الزوايا هي: $190^\circ, 180^\circ, 170^\circ, 160^\circ, 140^\circ, 135^\circ, 130^\circ, 120^\circ, 110^\circ, 105^\circ$

41) الخماسي $ABCDE$ الذي قياسات زواياه الداخليّة: $(x+9)^\circ, (2x-8)^\circ, (4x-1)^\circ$ $6x, (4x+13)^\circ,$

$$(n-2).180 = (5-2).180^\circ = 540^\circ$$

$$540^\circ = (4x-1)+(2x-8)+(x+9)+(4x+13)+6x$$

$$540^\circ = 17x+13$$

$$540^\circ - 13 = 17x$$

$$527 = 17x$$

$$x = 31$$

$$m\angle E = 4x-1 = 4\times 31 - 1 = 123^\circ$$

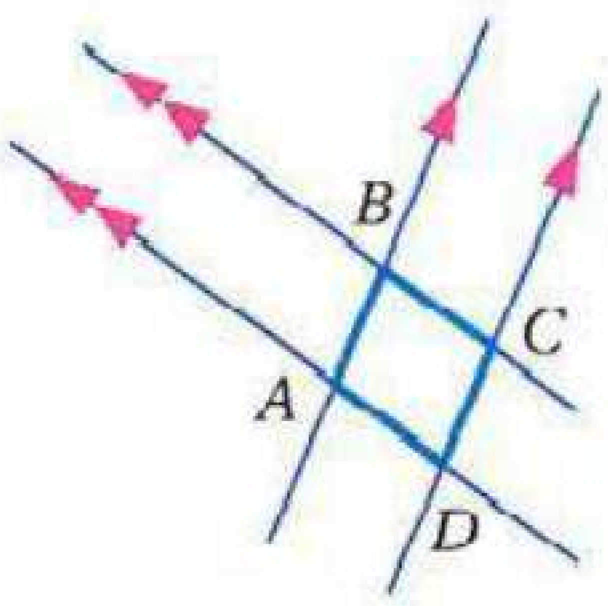
$$m\angle D = 2x-8 = 2\times 31 - 8 = 54^\circ$$

$$m\angle C = x+9 = 31+9 = 40^\circ$$

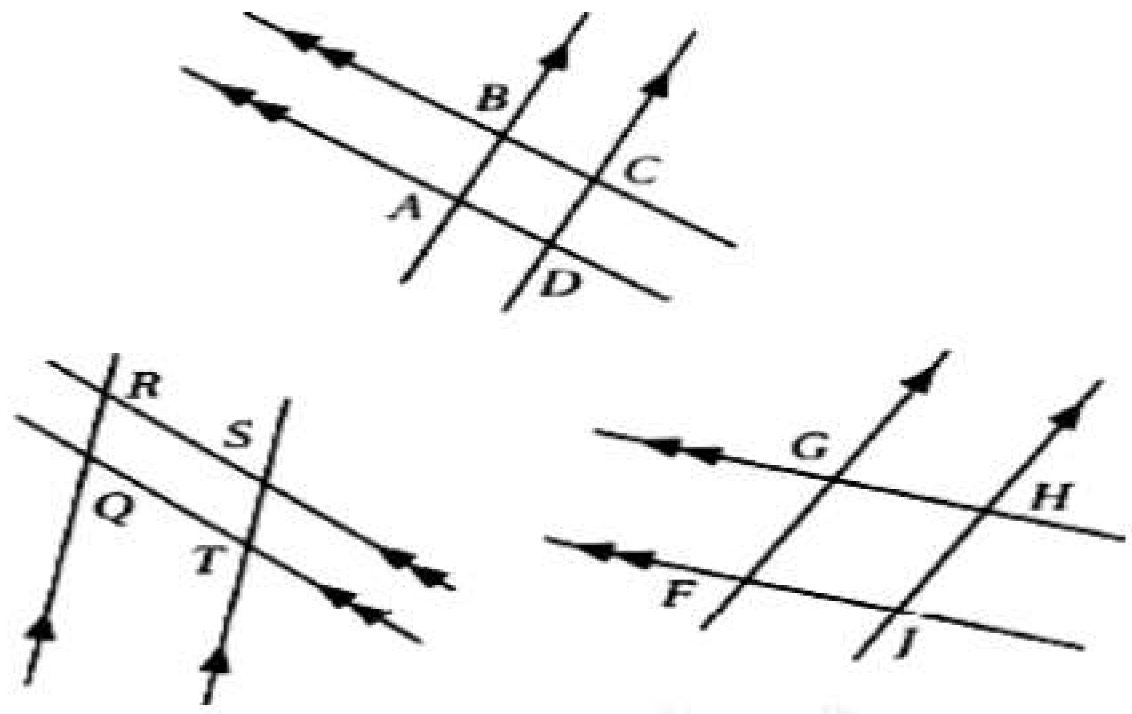
$$m\angle B = 4x+13 = 4\times 31 + 13 = 137^\circ$$

$$m\angle A = 6x = 6\times 31 = 186^\circ$$

42) **تمثيلات متعدّدة:** سوف تستقصي في هذه المسألة العلاقات بين الزوايا والأضلاع في أشكال رباعيّة خاصّة.



a) **هندسيًا:** ارسم زوجين من المستقيمات المتوازية تتقاطع كما في الشكل المجاور، وسمِّ الشكل الرباعي الناتج $ABCD$. ثم كرّر هذه الخطوات لتكوين شكلين آخرين: $FGHJ$, $QRST$.



b) جدوليًا: أكمل الجدول الآتي :

الشكل الرباعي	أطوال الأضلاع وقياسات الزوايا							
ABCD	$m\angle A$	101	$m\angle B$	97	$m\angle C$	101	$m\angle D$	97
	AB	0.6cm	BC	0.6cm	CD	0.6cm	DA	0.6cm
FGHJ	$m\angle F$	76	$m\angle G$	104	$m\angle H$	76	$m\angle J$	104
	FG	1cm	GH	0.9cm	HJ	1cm	JF	0.9cm
QRST	$m\angle Q$	121	$m\angle R$	95	$m\angle S$	121	$m\angle T$	95
	QR	0.5cm	RS	1.2cm	ST	0.5cm	TQ	1.2cm

c) لفظيًا: خمّن العلاقة بين كل زاويتين متقابلتين في الشكل الرباعي الناتج عن زوجين من المستقيمات المتوازية.

في الشكل الرباعي المتكون من زوجين من المستقيمات المتوازية تكون الزاويتان المتقابلتان متطابقتين.

d) لفظيًا: خمّن العلاقة بين كل زاويتين متحالفتين في الشكل الرباعي الناتج عن زوجين من المستقيمات

في الشكل الرباعي المتكون من زوجين من المستقيمات المتوازية تكون الزاويتان المتحالفتان متكاملتين.

e) لفظيًا: خمّن العلاقة بين كل ضلعين متقابلين في الشكل الرباعي الناتج عن زوجين من المستقيمات المتوازية.

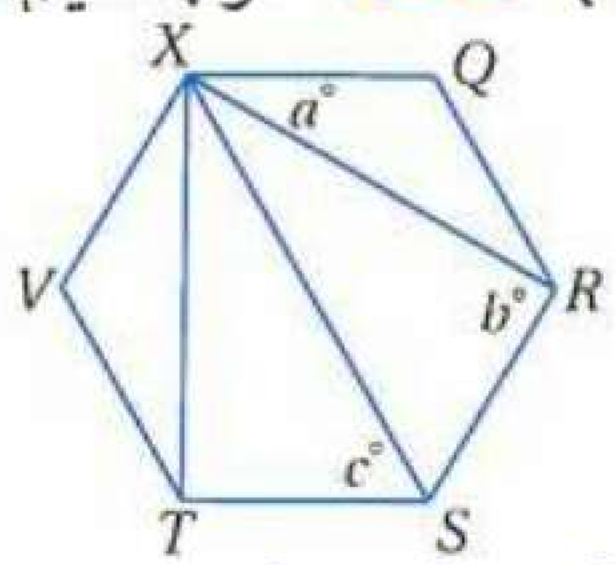
في الشكل الرباعي المتكون من زوجين من المستقيمات المتوازية تكون الضلعان المتقابلان متطابقين.

مسائل مهارات التفكير العليا:

43) اكتشف الخطأ: قالت مريم: إنّ مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة للعشاري أكبر منه للسباعي؛ لأنّ عدد أضلاع العشاري أكثر من أضلاع السباعي. وقالت لبنى: إنّ مجموع قياسات الزوايا الخارجية لكلا المضلعين متساوٍ. فهل أيٌّ منهما إدعاؤها صحيح؟ وضّح تبريرك.

لبنى؛ حسب نظرية مجموع قياسات الزوايا الخارجية، سيكون مجموع قياسات الزوايا الخارجية لأي مضلع محدب يساوي 360°.

44) تحدٍّ: أوجد قيم a, b, c في الشكل السداسي المنتظم $QRSTVX$ المجاور. برّر إجابتك.



$60^\circ, 90^\circ, 30^\circ$؛ حسب نظرية مجموع قياسات الزوايا الداخلية يكون مجموع قياسات الزوايا الداخلية 720°، وبما أن المضلع QRSTVX منتظم فإن له 6 زوايا متطابقة. وقياس كل زاوية 120°، لذلك

$m\angle XVT = m\angle XQR = 120^\circ$ وكذلك $XQ = QR$

وحسب نظرية المثلث متطابق الضلعين يكون

$m\angle QXR = m\angle QRX$

وبما أن مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمثلث 180°، فإن

$m\angle QXR + m\angle QRX + m\angle XQR = 180^\circ$

وبالتعويض ينتج أن $a + a + 120^\circ = 180^\circ$ ، أي أن $2a = 60^\circ$ ومنها $a = 30^\circ$

وحسب مسلمة جمع الزوايا $m\angle QRS = m\angle QRX + m\angle XRS$

وبالتعويض، $m\angle XRS + 30^\circ = 120^\circ$

وبالطرح يكون $m\angle XRS + 30^\circ = 120^\circ$ $m\angle XRS = 90^\circ$

إذن $b = 90^\circ$

وحسب (SAS) يكون $\Delta XVT = \Delta XQR$ و $\Delta XTS = \Delta XRS$

وبناءً على مسلمة جمع الزوايا يكون

$m\angle VXQ = m\angle VXT + m\angle TXS + m\angle SXR + m\angle RXQ$

وبالتعويض

$m\angle TXS + m\angle SXR + 30^\circ + 30^\circ = 120^\circ$

إذن $m\angle TXS + m\angle SXR = 60^\circ$ وبما أن

$m\angle TXS + m\angle SXR$ ولأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين

متطابقة، فإن $m\angle TXS = m\angle SXR = 30^\circ$

وفي ΔXTS، $m\angle XTS + m\angle TSX + m\angle SXT = 180^\circ$

وبالتعويض $180^\circ = 90^\circ + 30^\circ + c$، إذن $c = 60^\circ$

45) **تبرير:** إذا مُدَّ ضلعان لسداسي منتظم بحيث يلتقيان في نقطة خارجه، فهل يكون المثلث الناتج متطابق الأضلاع دائمًا، أو أحيانًا، أو لا يمكن أن يكون متطابق الأضلاع أبدًا؟ برّر إجابتك.

دائماً؛ حسب نظرية مجموع الزوايا الخارجية

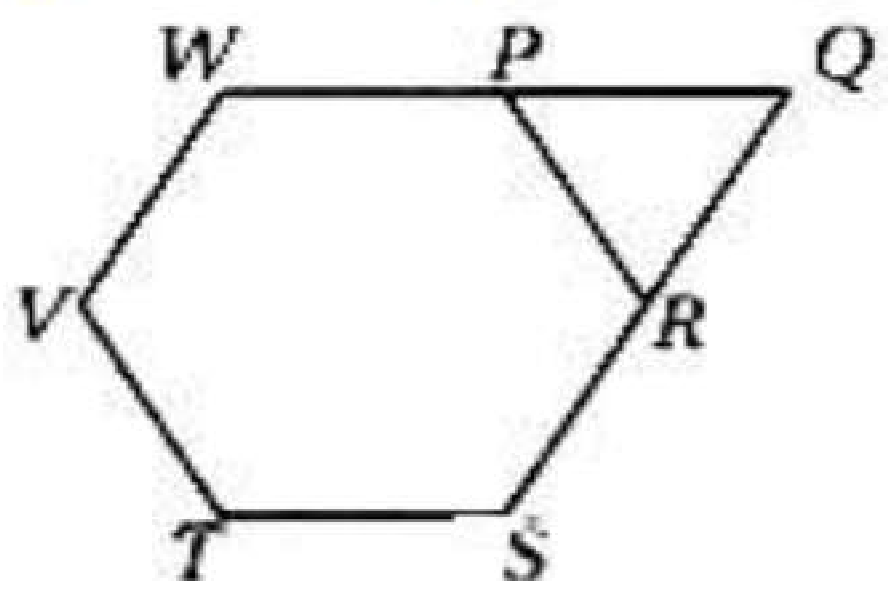
$m\angle QRP = 60^\circ, m\angle QPR = 60^\circ$

ولما كان مجموع قياسات الزوايا الداخلية لأي مثلث يساوي 180°، فإن

$180^\circ - m\angle QPR - m\angle QRP = m\angle PQR$

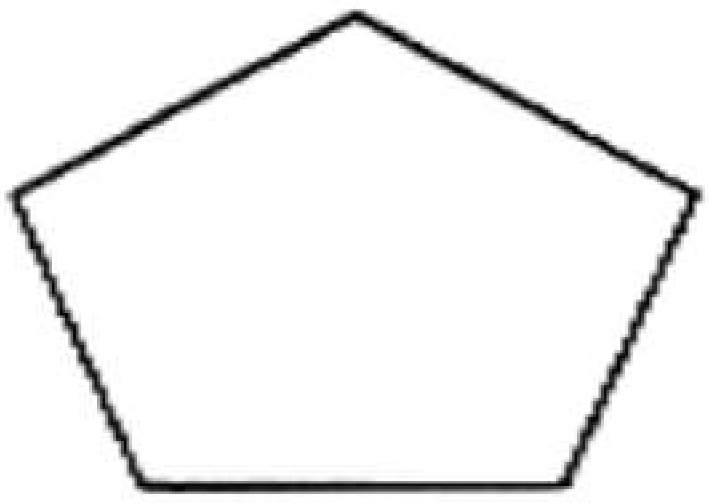
$180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$

إذن فالمثلث ΔPQR متطابق الأضلاع.



46) **مسألة مفتوحة:** ارسم مضلعًا، وأوجد مجموع قياسات زواياه الداخليّة.

ما عدد أضلاع المضلع الذي مجموع قياسات زواياه الداخليّة مِثلا المجموع الذي أوجدته؟ برّر إجابتك.



مجموع قياسات الزوايا الداخلية لهذا المضلع يساوي $180°.(5-2) = 540°$

ومِثلا هذا المجموع يساوي (540) .2 أو 1080

وعدد أضلاع المضلع الذي مجموع قياسات زواياه الداخلية $1080°$

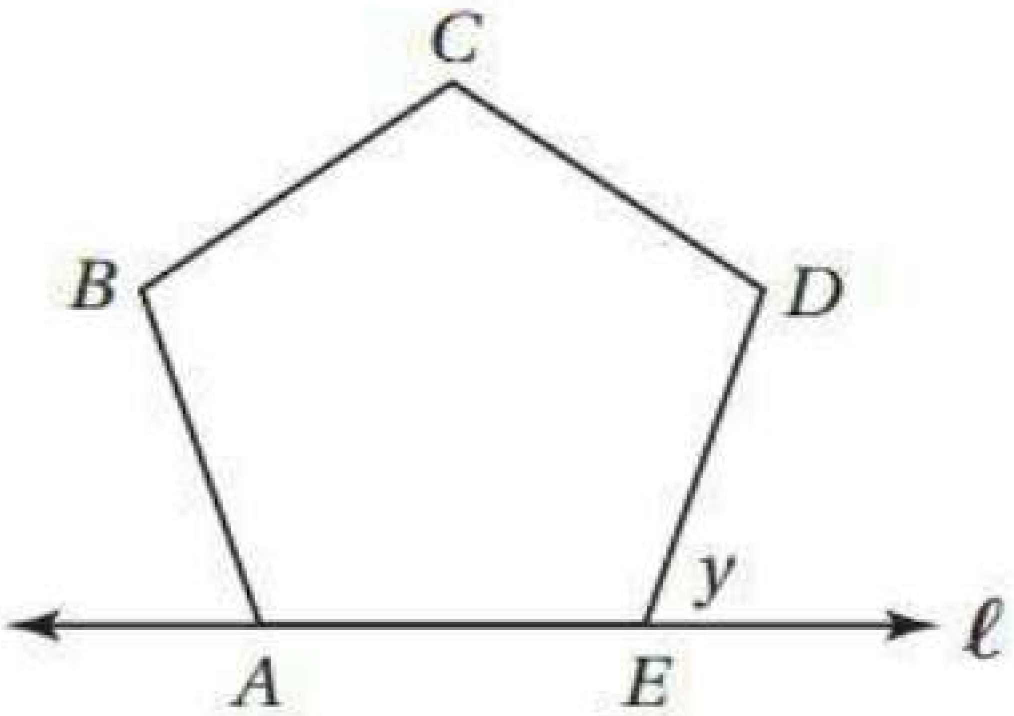
هو حل المعادلة $(n-2) \cdot 180° = 1080°$ ومنها $n = 8$.

48) **اكتب:** وضّح العلاقة بين المثلثات ونظرية مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للمضلع.

اشتقت نظرية مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمضلع من النمط الذي يربط عدد أضلاع المضلع بعدد المثلثات. والصيغة هي حاصل ضرب مجموع قياسات زوايا المثلث أي $180°$ في عدد المثلثات في المضلع.

تدريب على اختبار

48) **إجابة قصيرة:** الشكل $ABCDE$ خماسي منتظم، والمستقيم ℓ يحوي $\overline{AE}$. ما قياس $\angle y$؟



$(5-2).180^{\circ} = 540^{\circ}$

$\angle DEA = \dfrac{540^{\circ}}{5} = 108^{\circ}$

$\angle Y = 180 - 108^{\circ} = 72^{\circ}$

49) إذا كان مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لمضلع مِثْلي مجموع قياسات زواياه الخارجيّة، فما نوع هذا المضلع؟

A مربع

B خماسي

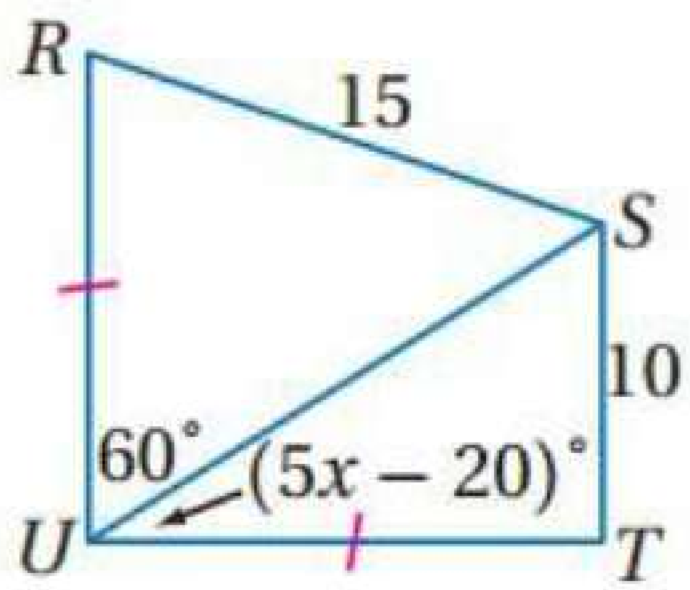
C سداسي

D ثماني

C سداسي

مراجعة تراكمية

50) **جبر:** اكتب متباينة تمثّل مدى القيم الممكنة لـِ x (الدرس 6-4)



$60 + 5x - 20 = 90$

$40 + 5x = 90$

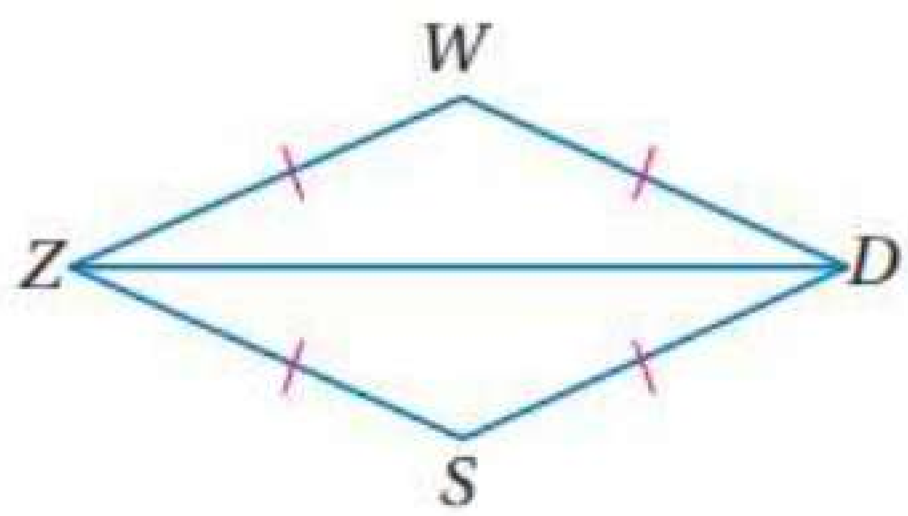
$5x = 90 - 40$

$5x = 50$

$x = 10$

بيّن في كل مما يأتي أن المثلثين متطابقان، وحدِّد حالة التطابق، ثم اكتب عبارة تطابق : (الدرسان 3-5 ,3-4)

51)

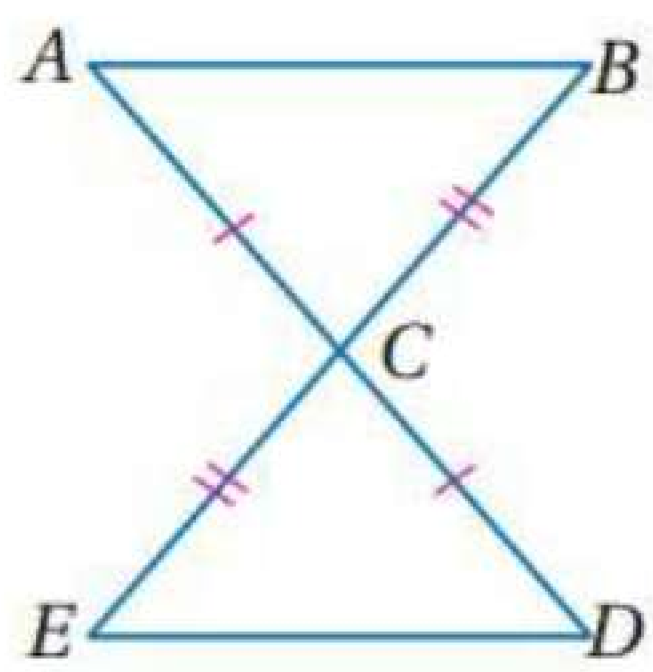


$\overline{WD} \cong \overline{DS}$, $\overline{WZ} \cong \overline{ZS}$ (معطى)

$\overline{ZD} \cong \overline{ZD}$ حسب خاصية الانعكاس

إذا $\Delta ZWD \cong \Delta ZSD$ حسب SSS

52)

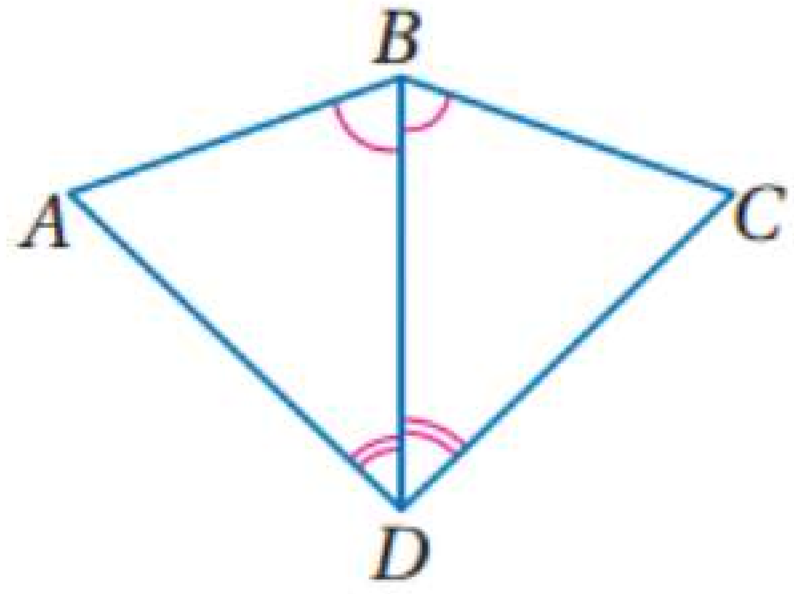


$\overline{CB} \cong \overline{CE}$, $\overline{AC} \cong \overline{CD}$ (معطى)

$\angle ACB \cong \angle ECD$ بالتقابل بالرأس

$\Delta ACB \cong \Delta ECD$ حسب SAS

(53



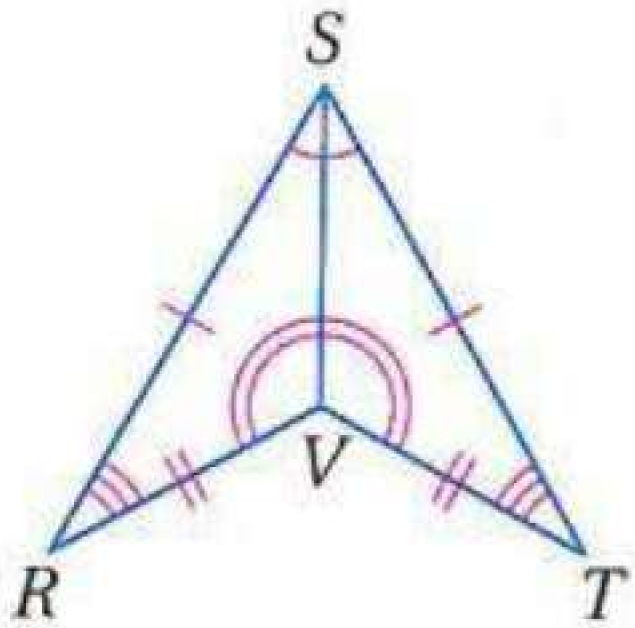
$\Delta CBD \cong \Delta ABD$

$\angle CBD = \angle ABD$

$\angle BDC = \angle BDA$

$BD = BD$ (خاصية الانعكاس)

(54



$SV = SV$ (حسب خاصية الانعكاس)

$ST = SR$ (معطى)

$VR = VT$ (معطى)

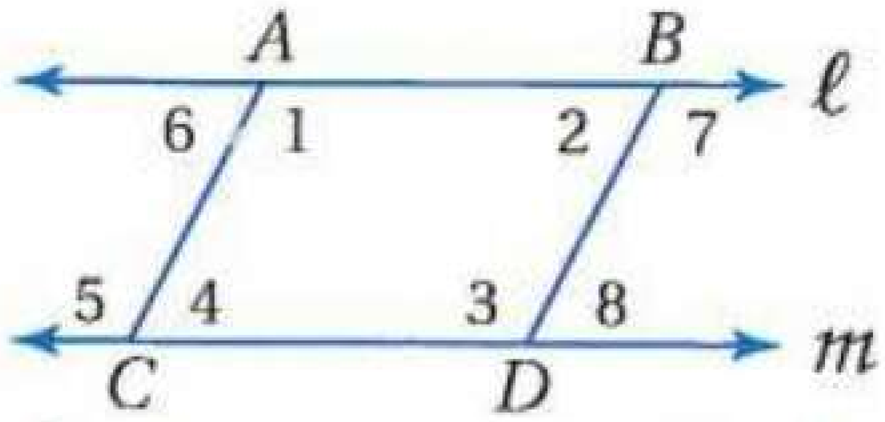
$\angle TSV = \angle RSV$

$\angle SVT = \angle SVR$

$\Delta SVT \cong \Delta SVR$ لأن جميع الأضلاع المتناظرة متطابقة وجميع الزوايا المتناظرة متطابقة

استعد للدرس اللاحق

في الشكل المجاور $\overline{BD} \parallel \overline{AC}$, $m \parallel \ell$ ، حدد جميع أزواج الزوايا في كل مما يأتي:



54) زاويتان متبادلتان داخليًّا.

الزوايا 1 و5؛ 4 و6؛ 2 و8؛ 3 و7

55) زاويتان متحالفتان.

الزوايا 1 و4؛ 2 و3؛ 1 و2؛ 3 و4؛ 8 و7؛ 6 و5

5-1 توسع: معمل الجداول الإلكترونية: زوايا المضلع

تمارين ومسائل:

1) اكتب صيغة لإيجاد قياس زاوية داخلية للمضلع المنتظم.

$$\frac{C2}{A2}$$

2) اكتب صيغة لإيجاد مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة للمضلع المنتظم.

$$A2 * E2$$

3) ما قياس كل زاوية داخليّة إذا كان عدد الأضلاع 1 أو 2؟

$$0^\circ - 180^\circ$$

4) هل من الممكن أن يكون عدد الأضلاع 1 أو 2؟ وضّح إجابتك.

لا؛ لأن المضلع شكل مغلق مكون من قطع مستقيمة تقع في المستوى نفسه.

استعمل جدولًا إلكترونيًا لحل الأسئلة 8–5 :

5) ما عدد المثلثات في مضلع عدد أضلاعه 17 ضلعًا؟

15

6) أوجد قياس الزاوية الخارجية لمضلع منتظم عدد أضلاعه 16 ضلعًا.

$$16n = 360$$

$$n = \frac{360}{16} = 22.5^\circ$$

7) أوجد قياس زاوية داخلية لمضلع منتظم عدد أضلاعه 115 ضلعًا.

$$20340 = 180.(n-2)$$

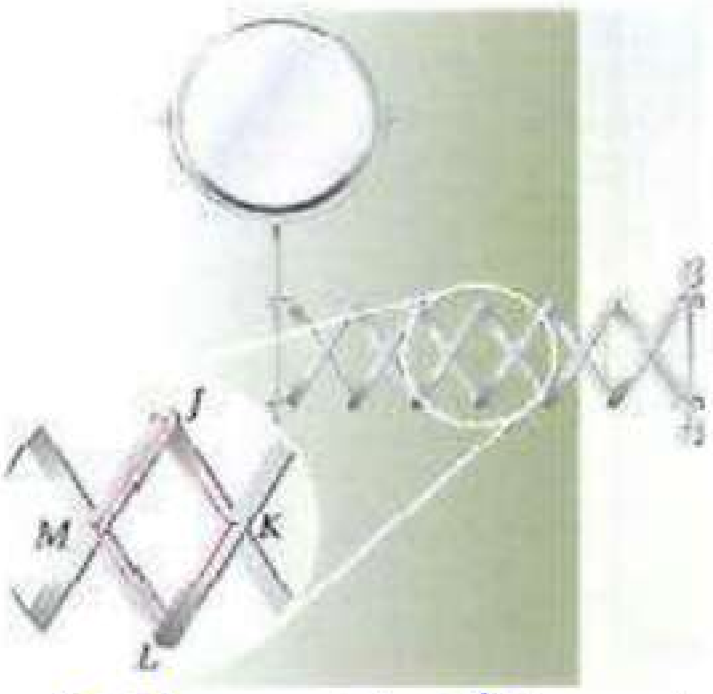
$$176.9^\circ = \frac{20340}{115}$$

8) إذا كان قياس كل من الزوايا الخارجية 0°، فأوجد قياسات جميع الزوايا الداخليّة. وهل هذا ممكن؟ وضّح إجابتك.

سيكون قياس كل زاوية داخلية، 180° وهذا غير ممكن للمضلع.

5-2 متوازي الأضلاع

تحقق



1) **مرايا :** تُستعمل في مرآة الحائط المبينة جانبًا متوازيات أضلاع يتغير شكلها كُلّما مُدّ الذراع. في $\square JKLM$ ، إذا كان $m\angle J = 47, MJ = 8$ cm، فأوجد كلًّا مما يأتي:

A) LK

$LK = MJ$ **(كل ضلعين في متوازي الأضلاع متطابقان)**

$= 8cm$

B) $m\angle L$

$m\angle L = m\angle J$ **(كل زاويتين متقابلتين في متوازي الأضلاع متطابقتان)**

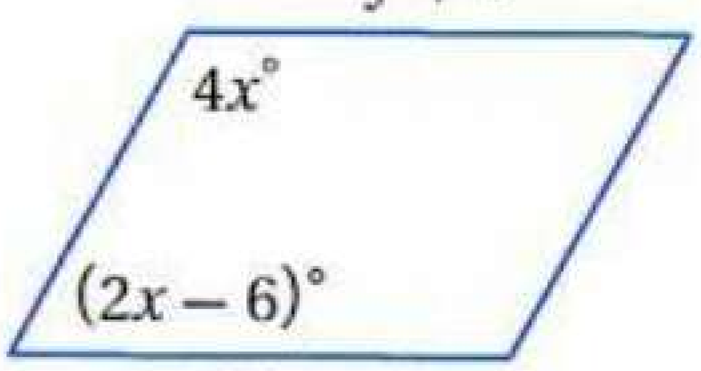
$= 47^\circ$

C) إذا مُدّ الذراع حتى أصبح $m\angle J = 90^\circ$، فكم يصبح قياس كل من $\angle K, \angle L, \angle M$؟ برّر إجابتك.

سيكون قياس كل من الزوايا الأخرى 90° تبعاً للنظرية 1.6.

أوجد قيمة المتغير في كل من متوازيي الأضلاع الآتيين :

2A)



$y + 8 = 5y$ **(تعريف تطابق القطع المستقيمة)**

$4y = 8$

$y = 2$

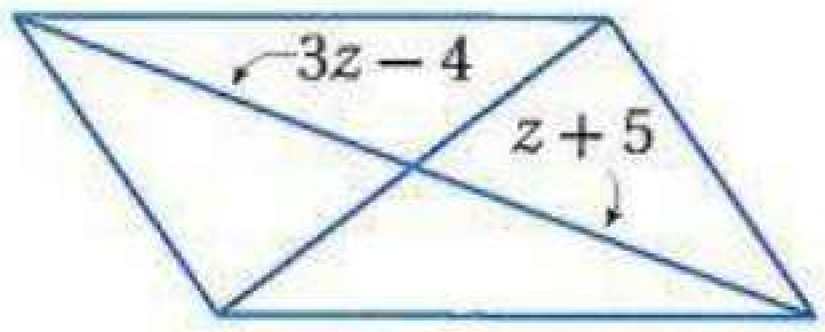
$4x + (2x - 6) = 180^\circ$

$6x = 186^\circ$

$x = 31$

$x = 31,\ y = 2$

(2B



$3z - 4 = z + 5$ (قطرا متوازي الأضلاع ينصف كلا منهما الآخر)

$2z = 9$

$z = 4.5$

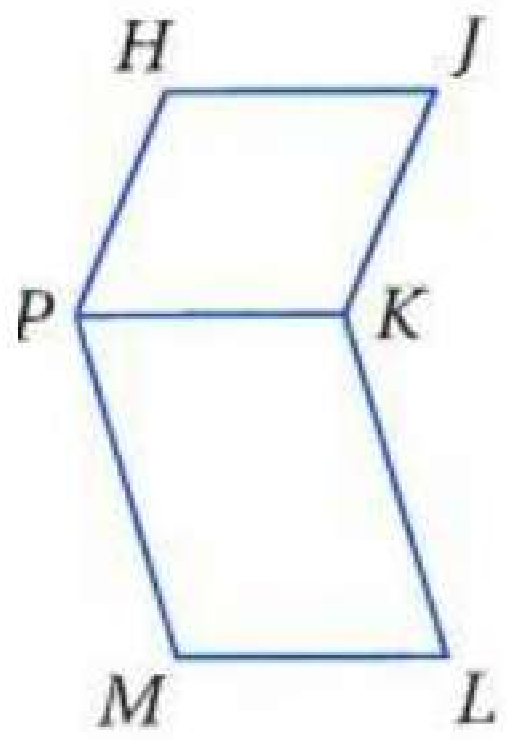
3) **هندسة إحداثية:** أوجد إحداثيي نقطة تقاطع قطري $\square RSTU$ الذي رؤوسه $R(-8, -2), S(-6, 7), T(6, 7), U(4, -2)$.

بما أن قطري متوازي الأضلاع ينصف كلا منهما الآخر، فإن نقطة تقاطعهما هي نقطة منتصف كل من $\overline{SU}$, $\overline{RT}$. أوجد نقطة منتصف $\overline{RT}$ التي طرفاها $(-8،-2), (6\ 7)$

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = \left(\frac{-8+6}{2}, \frac{-2+7}{2}\right)$$ (صيغة نقطة المنتصف)

$$= (-1،2.5)$$ (بالتبسيط)

إذن إحداثيا نقطة تقاطع قطري RSTU هما $(-1،2.5)$



4) اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $\square HJKP$, $PKLM$

المطلوب: $\overline{HJ} \cong \overline{ML}$

المعطيات: متوازيا الأضلاع HJKP, PKLM

المطلوب: $\overline{HJ} \cong \overline{ML}$

البرهان:

العبارات (المبررات):

1) HJKP, PKLM متوازيا أضلاع (معطيات)

2) $\overline{HJ} \cong \overline{PK}$, $\overline{PK} \cong \overline{ML}$ (الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة)

3) HJ = ML (خاصية التعدي)

تأكد:

1) **ملاحة :** يستعمل البحّارة مسطرتين متوازيتين يصل بينهما ذراعان متساويا الطول لتحديد اتجاه إبحارهم، فيضعون حافة إحدى المسطرتين بمحاذاة مسار الإبحار ثم يحركون المسطرة الأخرى حتى تصل إلى قرص بوصلة مرسوم على الخريطة. تُشكّل المسطرتين والذراعين الواصلين بينهما $\square MNPQ$.

a) إذا كان $MQ = 2\text{in}$ ، فأوجد NP.

$NP = 2\text{in}$ لأن كل ضلعين متناظرين متطابقين

b) إذا كان $m\angle NMQ = 38^\circ$ ، فأوجد $m\angle MNP$.

كل زاويتين متحالفتين مجموعهم = 180°

$$38 + m\angle NMQ = 180^\circ$$

$$m\angle NMQ = 180 - 38$$

$$m\angle NMQ = 142^\circ$$

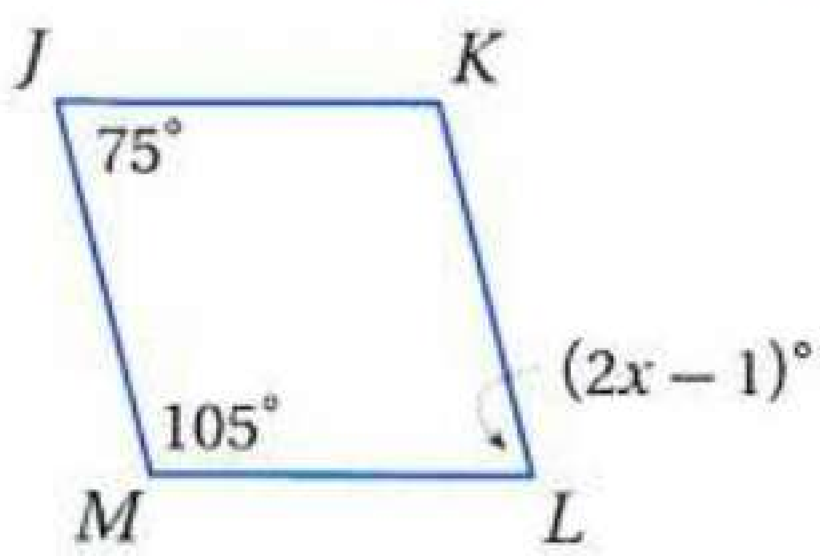
c) إذا كان $m\angle MQP = 128^\circ$ ، فأوجد $m\angle MNP$.

من خصائص متوازي الأضلاع كل زاويتين متقابلين متطابقين

$$\angle MNP = 128^\circ$$

المثال 2 **جبر:** أوجد قيم المتغيرات في كل من متوازيات الأضلاع الآتية :

2)



من خصائص متوازي الأضلاع كل زاويتين متقابلين متطابقين

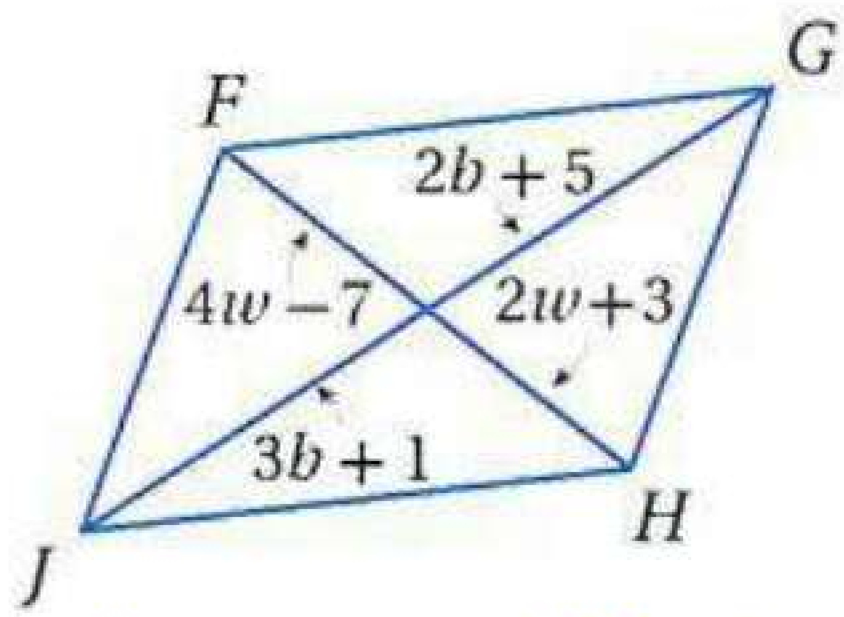
$\angle L = 75^\circ$

$2x - 1 = 75$

$2x = 76$

$x = 38$

(3



حسب نظرية قطرا منوازي الأضلاع

$2w + 3 = 4w - 7$

$2w - 4w = -7 - 3$

$-2w = -10$

$w = 5$

$2b + 5 = 3b + 1$

$2b - 3b = 1 - 5$

$-b = -4$

$b = 4$

المثال 3 (4 **هندسة إحداثية :** أوجد إحداثيي نقطة تقاطع قطري $\square ABCD$ الذي رؤوسه $A(-4, 6), B(5, 6), C(4, -2), D(-5, -2)$.

بما أن قطري متوازي الأضلاع ينصف كلا منهما الآخر، فإن نقطة تقاطعهما هي نقطة منتصف كل من $\overline{BD}$, $\overline{AC}$. أوجد نقطة منتصف $\overline{AC}$ التي طرفاها

$(-4،6), (4 \quad -2)$

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = \left(\frac{-4+4}{2}, \frac{6-2}{2}\right)$$ (صيغة نقطة المنتصف)

$$m\angle WZX + m\angle ZXW = 90^\circ$$
$$x - 11 + x - 9 = 90$$
$$2x - 20 = 90$$
$$2x = 110$$
$$x = 55$$
$$\angle ZXW = x - 11 = 55 - 11$$
$$\angle ZXW = 44$$
$$\angle ZXY = 90 - 44 = 46^\circ$$

(بالتبسيط)

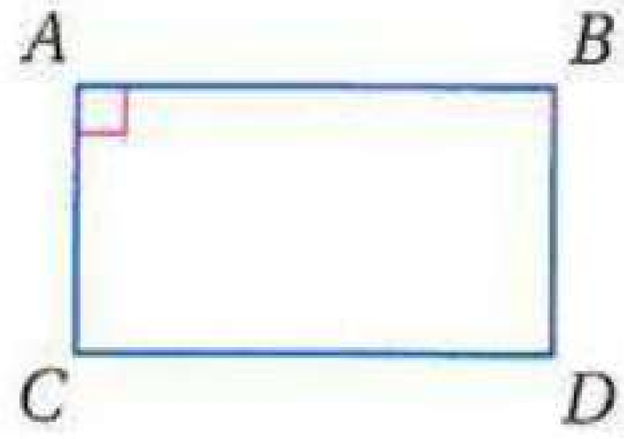
إذن إحداثيا نقطة تقاطع قطري $\overline{ABCD}$ هما $(0،2)$

المثال 4 **برهان:** اكتب برهانًا من النوع المحدد في كل من السؤالين الآتيين :

5) برهانًا حرًّا.

المعطيات: $ABCD$ متوازي أضلاع، $\angle A$ قائمة.

المطلوب: $\angle B, \angle C, \angle D$ قوائم. (النظرية 5.6)



المعطيات: ABCD متوازي أضلاع فيه الزاوية A قائمة.

المطلوب: الزوايا B, C, D قوائم. (النظرية 5.6).

البرهان: حسب تعريف متوازي الأضلاع $\overline{AD} \parallel \overline{CB}$

ولأن $\angle A$ قائمة فإن $\overline{AD} \perp \overline{AB}$.

وحسب نظرية القاطع العمودي يكون $\overline{AB} \perp \overline{CB}$.

إذن $\angle B$ قائمة لأن المستقيمين المتعامدين يشكلان زاوية قائمة

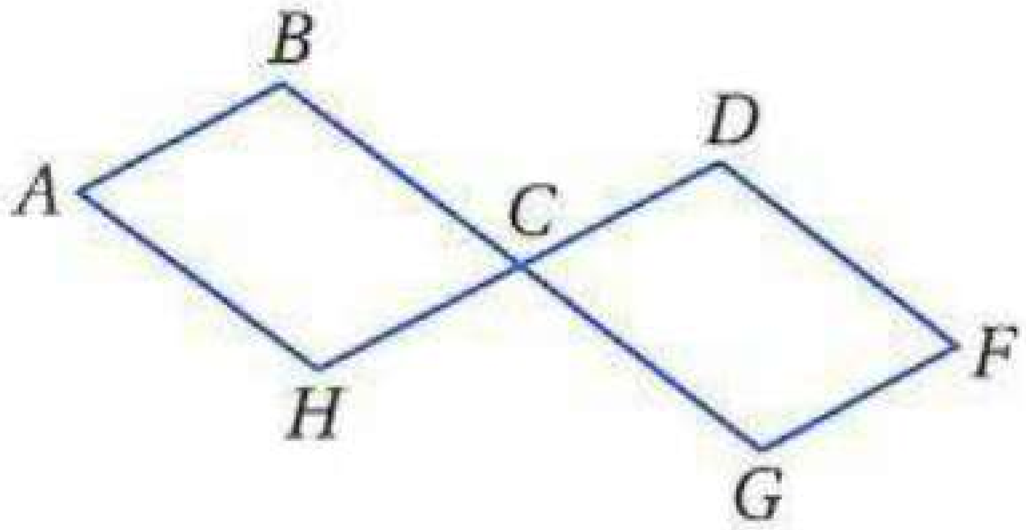
وكذلك $\angle D \cong \angle B$ و $\angle A \cong \angle C$ لأن الزوايا المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة.

إذن الزوايا C, D قائمتان لأن لجميع الزوايا المتطابقة القياس نفسه.

6) برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $DCGF$, $ABCH$ متوازيا أضلاع.

المطلوب: $\angle A \cong \angle F$.



المعطيات: متوازيا الأضلاع DCGF, ABCH.

المطلوب: $\angle A \cong \angle F$

البرهان:

العبارات (المبررات):

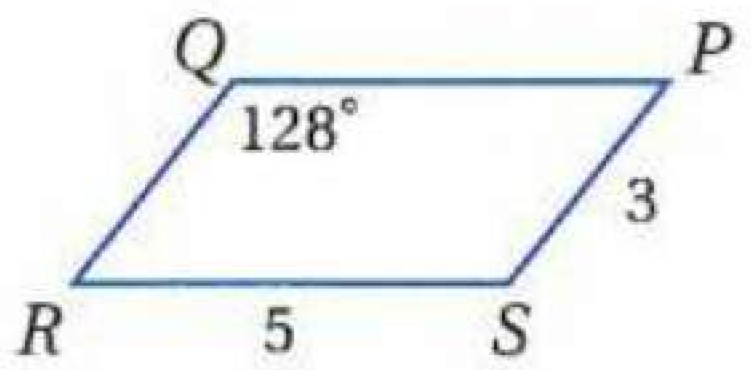
1) ABCH و DCGF متوازيا أضلاع. (معطى)

2) Ê BCH ≅ Ê DCG (الزاويتان المتقابلتان بالرأس متطابقتان)

3) Ê A ≅ Ê BCH و Ê F ≅ Ê DCG (الزوايا المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة)

4) Ê A ≅ Ê F (خاصية التعدي)

تدرب وحل المسائل:



استعمل $\square PQRS$ المبين جانبًا لإيجاد كل مما يأتي :

7) $m\angle R$

كل زاويتين متحالفتين مجموعهم = 180°

$$128 + m\angle QRS = 180^\circ$$

$$m\angle QRS = 180^\circ - 128^\circ$$

$$m\angle QRS = 52^\circ$$

8) QR

كل ضلعين متناظرين متطابقين في متوازي الأضلاع

$$QR = PS = 3cm$$

9) QP

كل ضلعين متناظرين متطابقين في متوازي الأضلاع

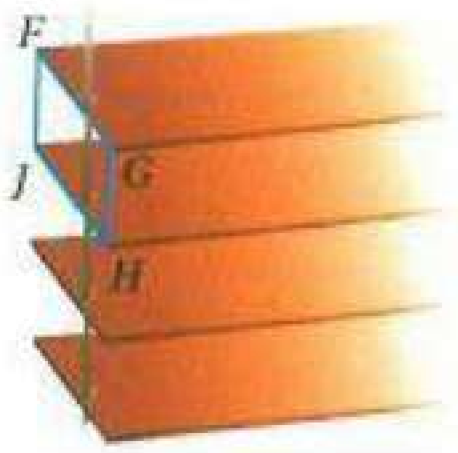
$$QP = RS = 5cm$$

10) $m\angle S$

كل زاويتين متقابلتين متساويتين

$$m\angle Q = m\angle S = 128^\circ$$

11) **ستائر:** في الشكل المقابل صورة لشرائح ستائر النوافذ المتوازية دائمًا؛ لتسمح بدخول أشعة الشمس. في $\square FGHJ$ ، إذا كان $FJ = \frac{3}{4}$ in, $FG = 1$ in, $\angle JHG = 62^\circ$ ، فأوجد كلًّا مما يأتي :



a) JH

كل ضلعين في متوازي الأضلاع متقابلين متطابقين

$$FG = JH = 1in$$

GH (b

كل ضلعين في متوازي الأضلاع متقابلين متطابقين

$$FG = GH = \frac{3}{4} \text{in}$$

$m\angle JFG$ (c

كل زاويتين في متوازي الأضلاع متقابلين متطابقين

$$m\angle JHG = m\angle JFG = 62^\circ$$

$m\angle FJH$ (d

كل زاويتين متحالفتين مجموعهم = 180°

$$m\angle JFG + m\angle FJH = 180^\circ$$

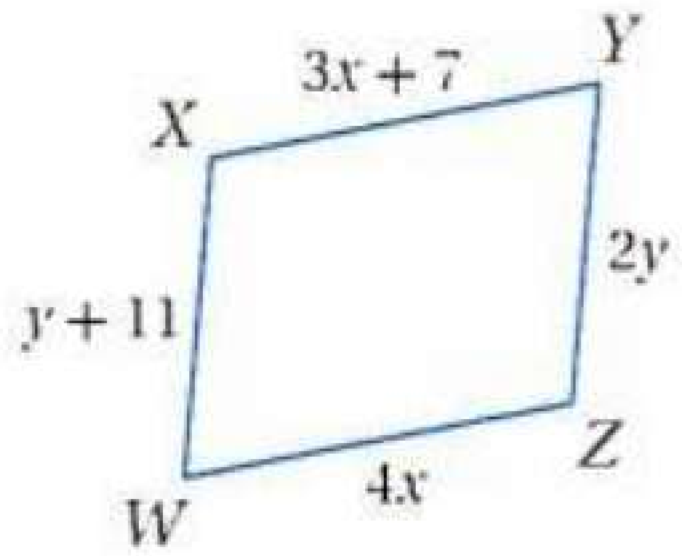
$$62^\circ + m\angle FJH = 180^\circ$$

$$m\angle FJH = 180^\circ - 62^\circ$$

$$m\angle QRS = 118^\circ$$

جبر: أوجد قيمتي x, y في كل من متوازيات الأضلاع الآتية :

(12



بما أن الشكل متوازي أضلاع إذن كل ضلعين متقابلين متطابقين

$$3x + 7 = 4x$$

$$4x - 3x = 7$$

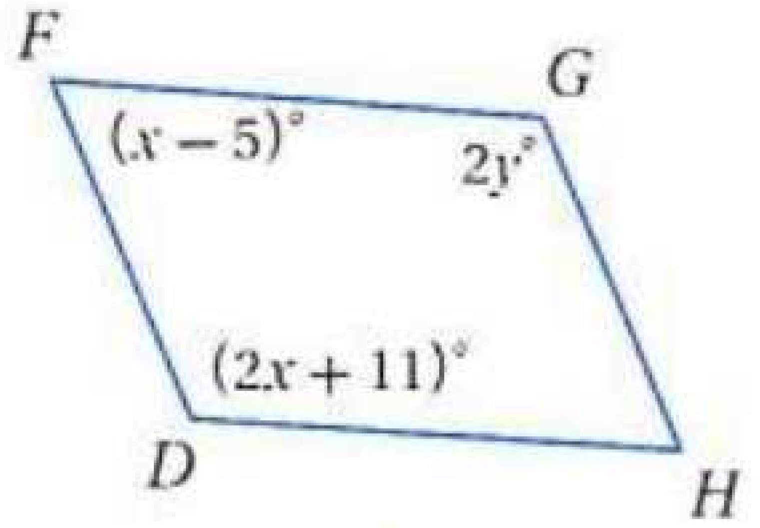
$$x = 7$$

$$2y = y + 11$$

$$2y - y = 11$$

$$y = 11$$

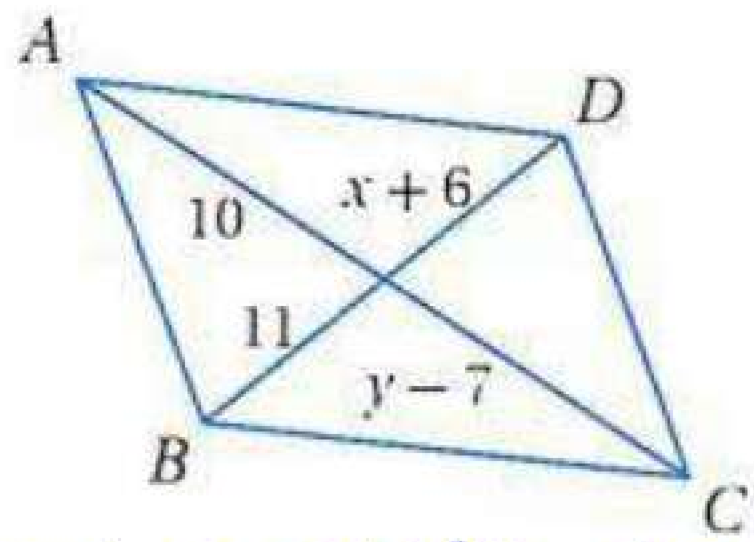
(13



كل زاويتين متحالفتين مجموعهم = 180°

$$x - 5 + 2x + 11 = 180^{\circ}$$
$$x + 16 = 180$$
$$x = 164$$
$$x - 5 + 2y = 180$$
$$164 - 5 + 2y = 180$$
$$159 + 2y = 180$$
$$2y = 180 - 159 = 21$$
$$y = 10.5$$

(14



قطرا متوازي الأضلاع ينصف كل منهما الأخر

$$x + 6 = 11$$
$$x = 5$$
$$10 = y - 7$$
$$y = 10 + 7$$
$$y = 17$$

هندسة إحداثية: أوجد إحداثيي نقطة تقاطع قطري $\square WXYZ$ المعطاة رؤوسه في كل من السؤالين الآتيين :

15) $W(-1, 7), X(8, 7), Y(6, -2), Z(-3, -2)$

بما أن قطري متوازي الأضلاع ينصف كلا منهما الآخر، فإن نقطة تقاطعهما هي نقطة منتصف كل من $\overline{XZ}$, $\overline{WY}$. أوجد نقطة منتصف $\overline{WY}$ التي طرفاها

$(-1،7), (6 \ -2)$

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) = \left(\frac{-1+6}{2}, \frac{7-2}{2}\right)$$ (صيغة نقطة المنتصف)

$(2.5،2.5)$ (بالتبسيط)

إذن إحداثيا نقطة تقاطع قطري $\overline{ABCD}$ هما $(2.5،2.5)$

16) $W(-4, 5), X(5, 7), Y(4, -2), Z(-5, -4)$

بما أن قطري متوازي الأضلاع ينصف كلا منهما الآخر، فإن نقطة تقاطعهما هي نقطة منتصف كل من $\overline{XZ}$, $\overline{WY}$. أوجد نقطة منتصف $\overline{WY}$ التي طرفاها

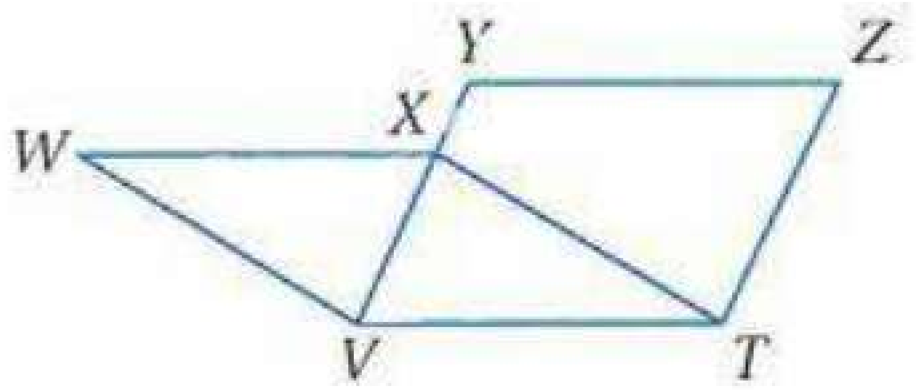
$(-4،5), (4 \ -2)$

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) = \left(\frac{-4+4}{2}, \frac{5-2}{2}\right)$$ (صيغة نقطة المنتصف)

$(0،1.5)$ (بالتبسيط)

إذن إحداثيا نقطة تقاطع قطري $\overline{ABCD}$ هما $(0،1.5)$

برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين فيما يأتي :



17) المعطيات: $\square WXTV, \square ZYVT$

المطلوب: $\overline{WX} \cong \overline{ZY}$

المعطيات: متوازيا الأضلاع WXTV, ZYVT.

المطلوب: $\overline{WX} \cong \overline{ZY}$

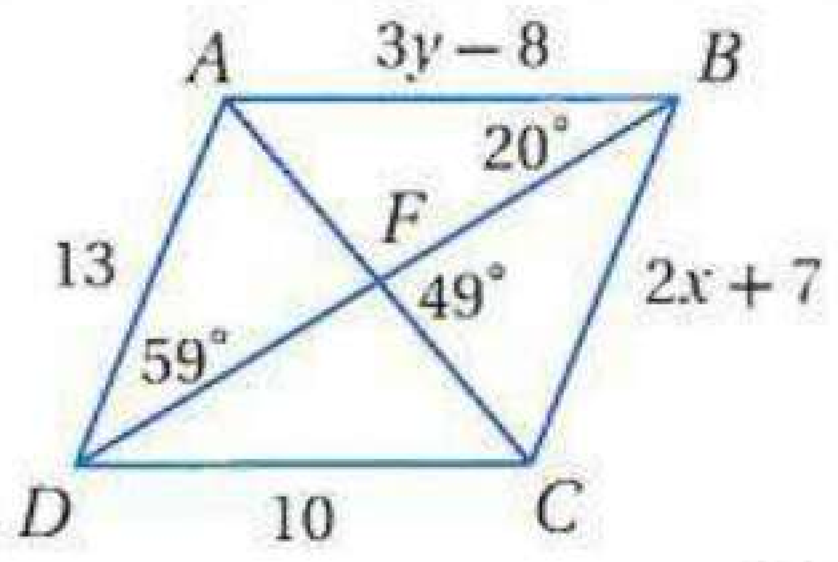
البرهان: العبارات (المبررات):

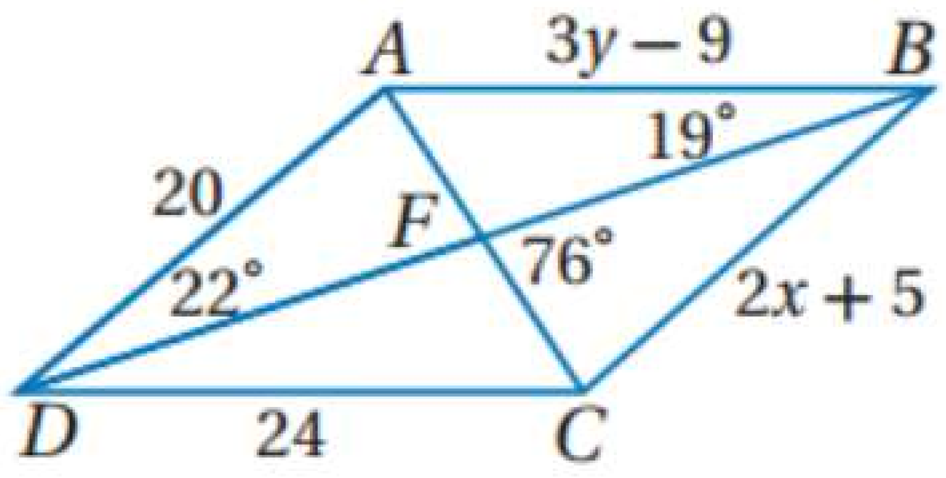
1) متوازيا الأضلاع WXTV, ZYVT (معطى)

2) $\overline{YZ} \cong \overline{VT}$, $\overline{VT} \cong \overline{WX}$. (الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة)

3) $\overline{YZ} \cong \overline{WX}$ (خاصية التعدي)

جبر: استعمل $\square ABCD$ المبين جانبًا لإيجاد كل مما يأتي :





18) x

كل ضلعين متقابلين متطابقين

$2x + 5 = 20$

$2x = 20 - 5$

$2x = 15$

$x = 7.5$

19) y

$3y - 9 = 24$

$3y = 24 + 9$

$3y = 33$

$y = 11$

20) $m\angle AFB$

$\angle AFB = 180 - 76$

$\angle AFB = 104^\circ$

21) $m\angle DAC$

$\angle DAC = 180 - (76 + 22)$

$\angle DAC = 82^\circ$

$m\angle ACD$ (22

$$\angle CAB = 180 - (\angle AFB + \angle ABF)$$

$$\angle CAB = 180 - (19 + 76) = 85^\circ$$

$$\angle ACD = \angle CAB = 85^\circ$$

بالتبادل داخليا

$m\angle DAB$ (23

بالتقابل بالرأس

$$\angle AFD = 76$$

$$\angle DAF = 180 - (76 + 22) = 82$$

$$\angle DAB = \angle DAF + \angle CAB$$

$$\angle DAB = 82 + 85 = 167^\circ$$

24) **هندسة إحداثيّة :** إذا كانت $A(-2, 5), B(2, 2), C(4, -4)$ رؤوسًا في $\square ABCD$، فأوجد إحداثيات الرأس D. وضّح تبريرك.

الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع متوازية

وبما أن ميل $\overline{BC}$ يساوي $\frac{-6}{2}$ فإن ميل $\overline{AD}$ يساوي $\frac{-6}{2}$ أيضاً.

ولتعيين الرأس D، ابدأ من الرأس A وتحرك إلى الأسفل 6 وحدات وإلى اليمين وحدتين.

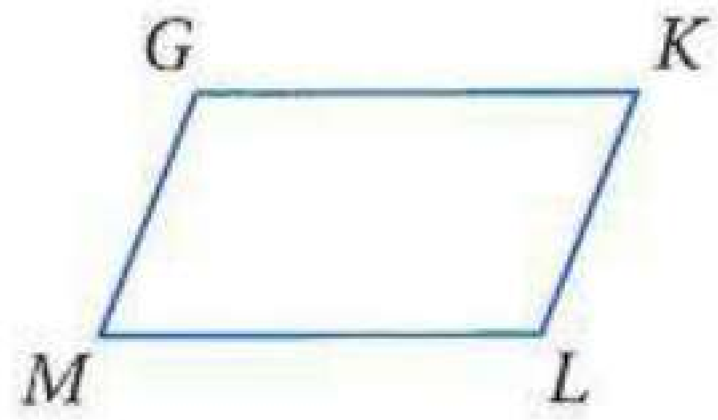
إذن الرأس $D = (0, -1)$

برهان: اكتب برهانًا من النوع المحدد في كل مما يأتي :

25) برهان ذو عمودين.

المعطيات: $GKLM$ متوازي أضلاع ،

المطلوب: $\angle G$ و $\angle K$ ، $\angle K$ و $\angle L$ ،
$\angle L$ و $\angle M$ ، $\angle M$ و $\angle G$ زوايا متكاملة.
(النظرية 5.5)



البرهان:

العبارات (المبررات):

1) متوازي الأضلاع GKLM (معطى)

2) $\overline{GK} \parallel \overline{ML}$, $\overline{GM} \parallel \overline{KL}$ (الأضلاع المتقابلة لمتوازي الأضلاع متوازية)

3) Ë K و Ë G ، Ë K و Ë L ، Ë L و Ë M ، Ë M و Ë G زوايا متكاملة

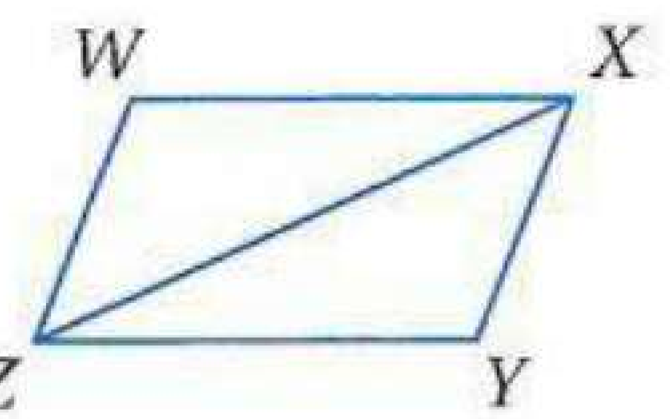
(كل زاويتين متحالفتين في متوازي الأضلاع متكاملتين)

26) برهان ذو عمودين.

المعطيات: $WXYZ$ متوازي أضلاع ،

المطلوب: $\triangle WXZ \cong \triangle YZX$

(النظرية 5.8)



البرهان:

العبارات (المبررات):

2) متوازي الأضلاع WXYZ (معطى)

$WX = ZY$, $XY = WZ$ ضلعين متناظرين متطابقين

$XZ = ZX$ خاصية الانعكاس

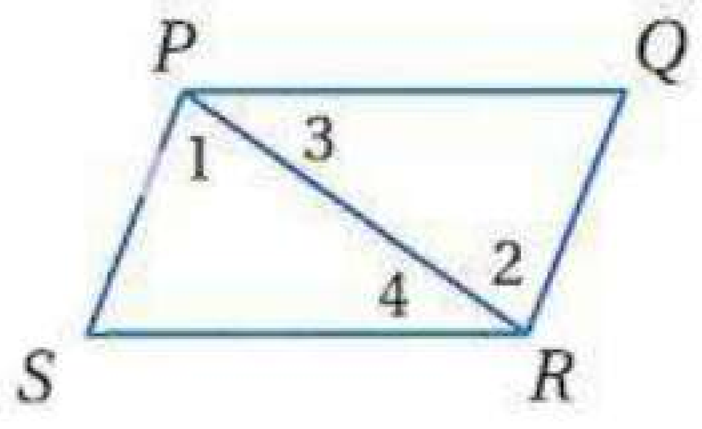
3) $\Delta XYZ \cong \Delta YZX$ (SSS)

27) برهان ذو عمودين.

المعطيات: $PQRS$ متوازي أضلاع.

المطلوب: $\overline{PQ} \cong \overline{RS}$, $\overline{QR} \cong \overline{SP}$

(النظرية 5.3)



البرهان:

العبارات (المبررات):

1) متوازي الأضلاع PQRS (معطى)

2) ارسم قطعة مستقيمة مساعدة PR (قطر PQRS) وسِم الزوايا 1، 2، 3، 4 كما هو مبين.

3) $\overline{PQ} \parallel \overline{SR}$, $\overline{PS} \parallel \overline{QR}$ (الأضلاع المتقابلة لمتوازي الأضلاع متوازية)

4) $\angle 1 = \angle 2$ ، و $\angle 3 = \angle 4$ (نظرية الزوايا المتبادلة داخليا)

5) $PR = RP$ (خاصية الانعكاس)

6) $\Delta QRP \cong \Delta SRP$ (SAS)

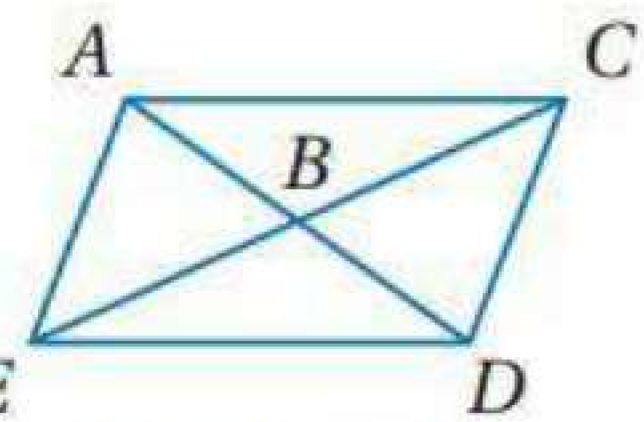
7) $\overline{QR} \cong \overline{SP}$, $\overline{PQ} \cong \overline{RS}$ (العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين متطابقة)

28) برهانًا حرًّا.

المعطيات: $ACDE$ متوازي أضلاع.

المطلوب: القطران $\overline{AC}$ و $\overline{AD}$ ينصف كلٌّ منهما الآخر.

(النظرية 5.7)



البرهان: معطى أن ACDE متوازي أضلاع.

بما أن الأضلاع المتقابلة لمتوازي الأضلاع متطابقة فإن $\overline{EA} \cong \overline{DC}$.

ومن تعريف متوازي الأضلاع $\overline{EA} \parallel \overline{DC}$

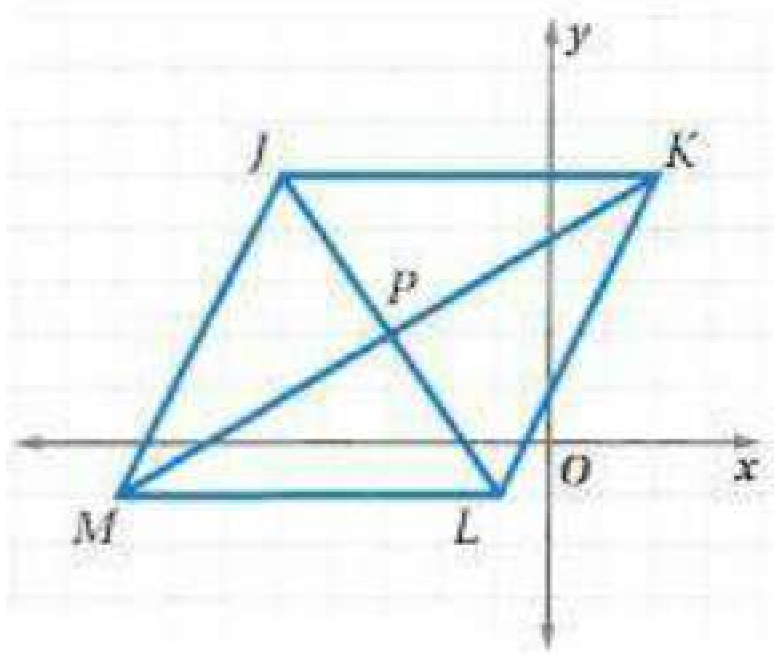
وتكون $\angle AEB \cong \angle DCB$ و $\angle EAB \cong \angle CDB$ لأن الزوايا المتبادلة داخلياً متطابقة.

لأن الزوايا المتبادلة داخلياً متطابقة. إذن $\Delta CBD \cong EBA$ حسب ASA.

و $\overline{BC} \cong \overline{EB}$ و $\overline{BD} \cong \overline{AB}$ لأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة ومن تعريف منصف القطعة المستقيمة فإن $\overline{EC}$ تنصف $\overline{AD}$ و $\overline{AD}$ تنصف $\overline{EC}$.

29) **هندسة إحداثية:** استعن بالشكل المجاور في كل مما يأتي:

a) استعمل صيغة المسافة بين نقطتين لتحديد ما إذا كان قطرا $JKLM$ ينصّف كل منهما الآخر. وضّح إجابتك.



$(-3,2) \text{ ، } (2,5)$

$PK = \sqrt{(-3-2)^2 + (2-5)^2}$

$PK = \sqrt{34}$

$(-8,-1) \text{ ، } (-3,2)$

$MP = \sqrt{(-8+3)^2 + (-1-2)^2}$

$MP = \sqrt{34}$

$MP = PK = \sqrt{34}$

$L, P = (-1,-1) \text{ ، } (-3,2)$

$LP = \sqrt{(-1+3)^2 + (-1-2)^2}$

$LP = \sqrt{13}$

$J, P = (-5,5) \text{ ، } (-3,2)$

$JP = \sqrt{(-5+3)^2 + (5-2)^2}$

$JP = \sqrt{13}$

$JP = LP = \sqrt{13}$

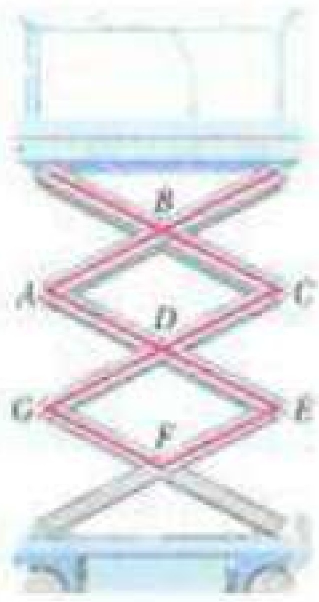
بما أن $JP = LP, MP = KP$ فإن القطرين ينصف كل منهما الآخر.

b) حدّد ما إذا كان قطرا $JKLM$ متطابقين. وضّح إجابتك.

لا؛ $JP + LP \neq MP + KP$

c) استعمل صيغة الميل لتحديد ما إذا كانت الأضلاع المتتالية متعامدة أم لا. وضّح إجابتك.

لا؛ ميل JK يساوي 0، وميل JM يساوي 2؛ أحدهما لا يساوي سالب معكوس الآخر.



30) **رافعات:** في الشكل المجاور: $DEFG$ ، $ABCD$ متوازيا أضلاع متطابقان.

a) حدد الزوايا التي تطابق $\angle A$. وضّح تبريرك.

الزوايا C, E, G؛ إجابة ممكنة: $\angle A \cong \angle C$ لأن الزوايا المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة.

$\angle A \cong \angle E$ لأن متوازيي الأضلاع متطابقان، $\angle E \cong \angle G$ لأن الزوايا المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة وتطابق $\angle A$ حسب خاصية التعدي.

b) حدد القطع المستقيمة التي تطابق $\overline{BC}$. وضّح تبريرك.

$\overline{AD}$,$\overline{DE}$,$\overline{GF}$

$\overline{BC} \cong \overline{AD}$ لأن الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة.

$\overline{BC} \cong \overline{DE}$ لأن متوازيي الأضلاع متطابقان

$\overline{DE} \cong \overline{GF}$ لأن الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة وتطابق $\overline{BC}$ حسب خاصية التعدي.

c) حدد الزوايا المكملة للزاوية C. وضّح تبريرك.

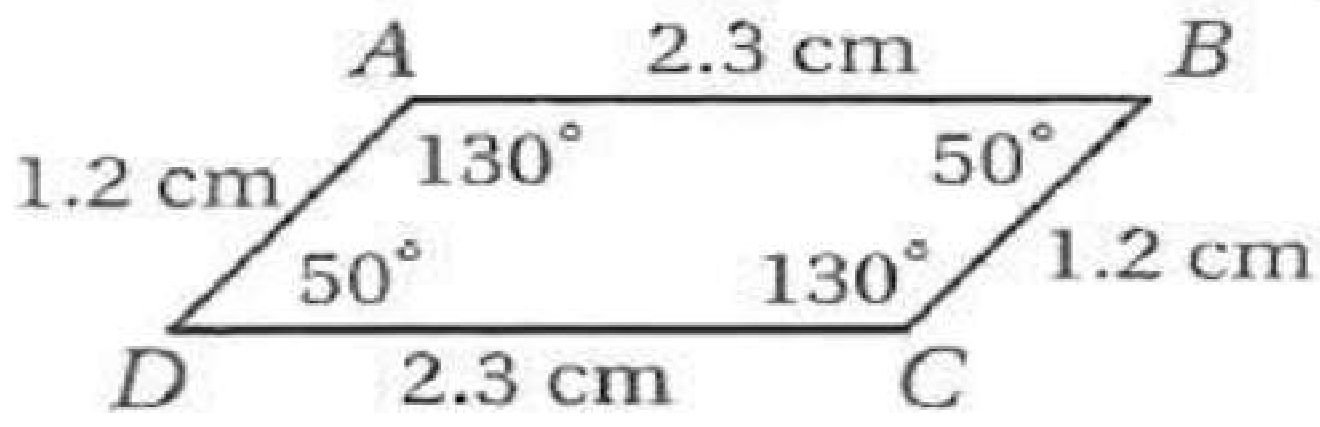
الزوايا $\angle ABC$,$\angle ADC$,$\angle EDG$,$\angle EFG$

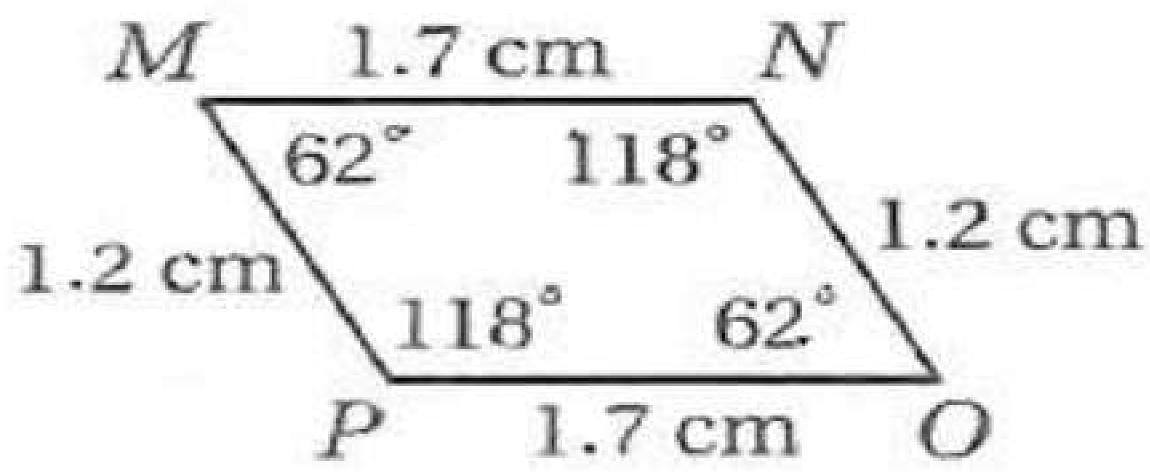
$\angle ABC$ و$\angle ADC$ مكملتان $\angle C$ ؛ لأن الزوايا المتحالفة في متوازي الأضلاع متكاملة.

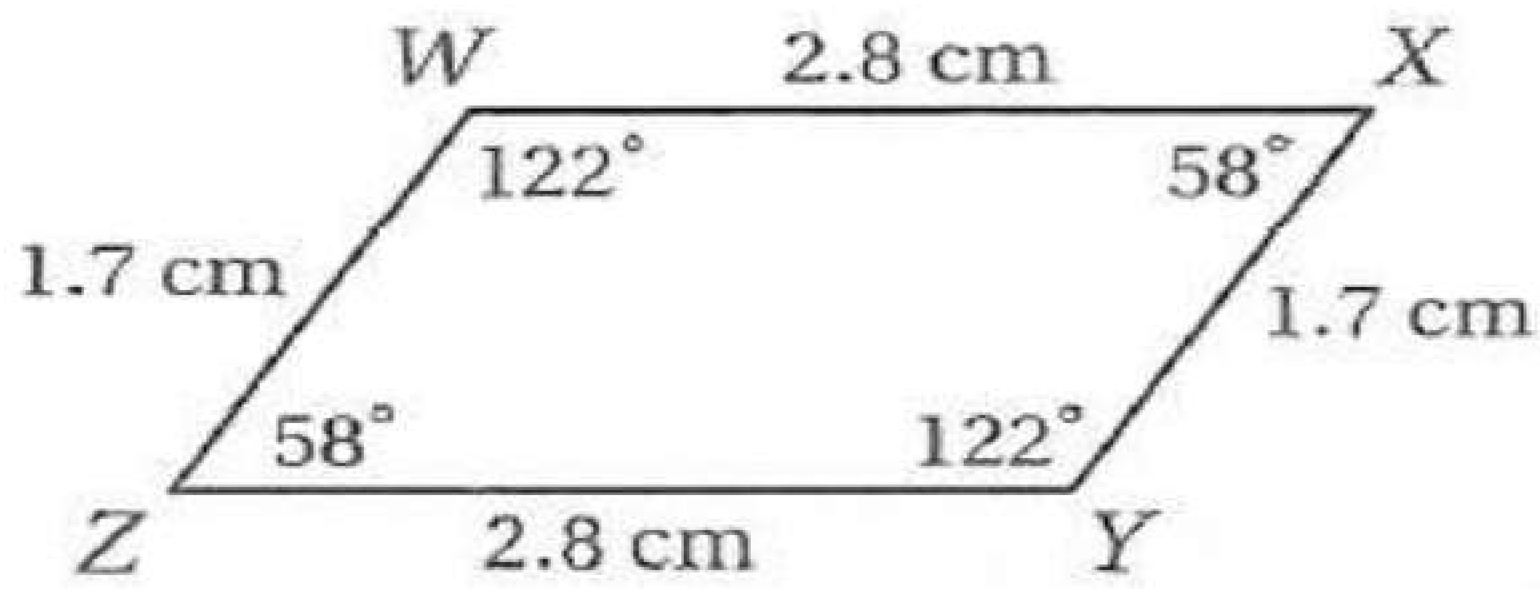
$\angle EDG$ مكملة $\angle C$ لأنها تطابق $\angle ADC$ حسب نظرية الزوايا المتقابلة بالرأس ومكملة $\angle C$ بالتعويض، $\angle EFG$ تطابق $\angle EDG$ لأن الزوايا المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة، ومكملة $\angle C$ بالتعويض.

31) **تمثيلات متعددة:** سوف تستقصي في هذه المسألة اختبارات لتمييز متوازي الاضلاع.

a) **هندسيًّا:** ارسم ثلاثة أزواج من القطع المستقيمة المتطابقة والمتوازية. صِل الأطراف لتكوِّن أشكالًا رباعية، وسمِّها $ABCD, MNOP, WXYZ$. ثم قِس أطوال الأضلاع وقياسات الزوايا لكل منها.







b) **جدوليًّا:** أكمل الجدول الآتي:

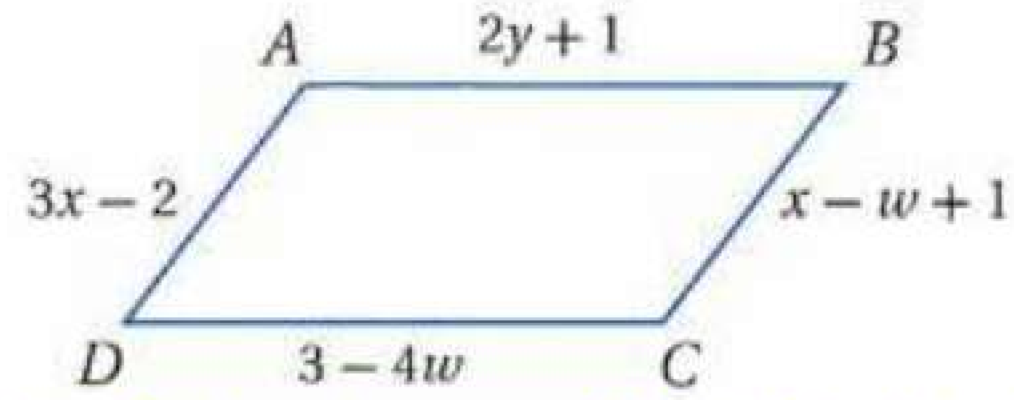
الشكل الرباعي	هل الأضلاع المتقابلة متطابقة؟	هل الزوايا المتقابلة متطابقة؟	هل الشكل متوازي أضلاع؟
ABCD	نعم	نعم	نعم
MNOP	نعم	نعم	نعم
WXYZ	نعم	نعم	نعم

c) **لفظيًّا:** ضع تخمينًا حول الأشكال الرباعيّة التي لها ضلعان متطابقان ومتوازيان.

إذا كان في الشكل الرباعي ضلعان متوازيان ومتطابقان فإن هذا الشكل متوازي أضلاع.

مسائل مهارات التفكير العليا:

32) **تحدَّ:** إذا كان محيط $\square ABCD$ في الشكل أدناه يساوي 22 in ، فأوجد AB .



الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقان

$$AB = CD, \text{ and } AD = BC$$
$$2y + 1 = 3 - 4w, \text{ and } 3x - 2 = x - w + 1$$
$$3x - 2 = x - w + 1$$
$$2x = 3 - w$$
$$x = \frac{3 - w}{2}$$

المحيط = مجموع أطوال الأضلاع

$$2y + 1 + x - w + 1 + 3 - 4w + 3x - 2 = 22$$

حيث ان كل ضلعين متقابلين متساويين

$$2y + 1 = 3 - 4w, \text{ and } 3x - 2 = x - w + 1$$

$2(3 - 4w + 3x - 2) = 22$ أي ان

$$3x - 4w + 10$$

بالتعويض عن قيمة x

$$3\left(\frac{3 - w}{2}\right) - 4w = 10$$
$$9 - 3w - 8w = 20$$
$$-11w = 11$$
$$w = -1$$

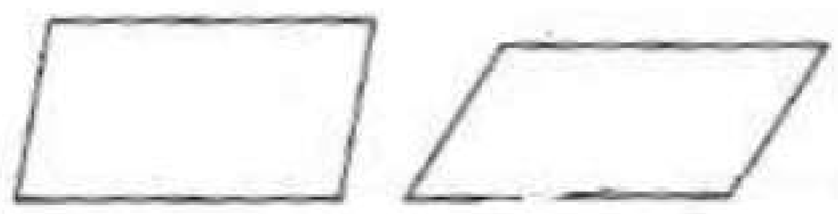
بالتعويض بقيمة w في اطوال الاضلاع

$$DC = 3 - 4(-1) = 7$$
$$AB = DC = 7\text{in}$$

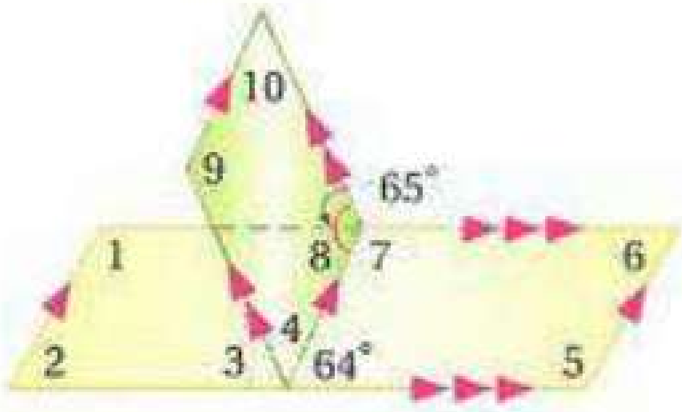
33) **اكتب:** هل توجد نظرية $SSSS$ في تطابق متوازيات الأضلاع. برّر إجابتك.

لا توجد لأن كل ضلعين متقابلين متطابقين وليس جميع الأضلاع متطابقة

34) **إجابة مفتوحة:** أعط مثالًا مضادًّا يبيّن أن متوازيات الأضلاع ذات الأضلاع المتناظرة المتطابقة ليست متطابقة دائمًا.



35) **تبرير:** أوجد $m\angle 1$ ، $m\angle 10$ في الشكل المجاور. وضّح تبريرك.



بما أن الشكل متوازي أضلاع إذن:

$\angle 10$ مكملة للزاوية التي قياسها 65° لأن الزوايا المتحالفة في متوازي الأضلاع متكاملة.

$$\angle 10 + 65^\circ = 180^\circ$$

$$\angle 10 = 180^\circ - 65^\circ$$

$$\angle 10 = 115^\circ$$

$\angle 2 = 64^\circ$ **متساويتان بالتناظر**

$\angle 2$ مكملة للزاوية $\angle 1$ لأن الزوايا المتحالفة في متوازي الأضلاع متكاملة.

$$\angle 1 + 64^\circ = 180^\circ$$

$$\angle 1 = 180^\circ - 64^\circ$$

$$\angle 1 = 116^\circ$$

36) **اكتب:** لخّص خصائص أضلاع متوازي الأضلاع وزواياه وأقطاره.

في متوازي الأضلاع تكون الأضلاع المتقابلة متطابقة، والزوايا المتقابلة متطابقة، وتكون كل زاويتين متحالفتين متكاملتين.

وإذا كانت إحدى الزوايا قائمة تكون جميع زواياه قوائم. وقطرا متوازي الأضلاع ينصف كل منهما الآخر.

تدريب على الاختبار المعياري:

37) قياسا زاويتين متحالفتين في متوازي أضلاع هما: $3x + 42$, $9x - 18$. ما قياس الزاويتين؟

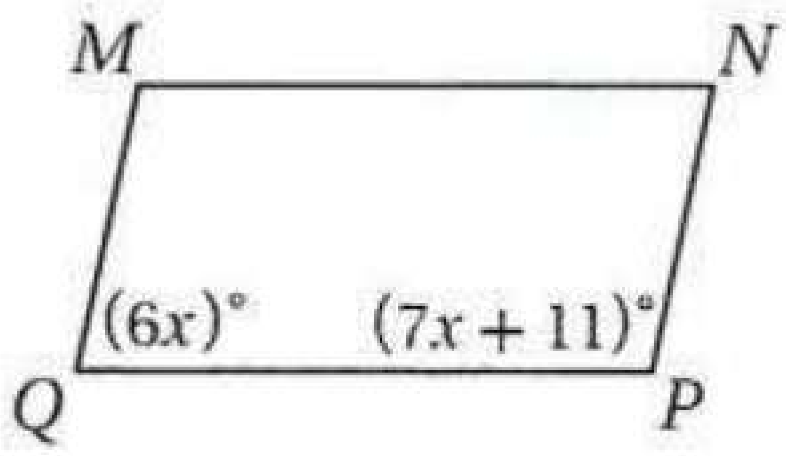
A $13, 167$ B $58.5, 31.5$

C $39, 141$ D $81, 99$

الاختيار D

$$3x + 42 + 9x - 18 = 180$$
$$12x + 24 = 180$$
$$12x = 180 - 24$$
$$12x = 156$$
$$x = 13$$
$$\angle 3x + 42 = 3 \times 13 + 42 = 81^\circ$$
$$\angle 9x - 18 = 9 \times 13 - 18 = 99^\circ$$

38) **إجابة شبكية:** إذا كان $MNPQ$ متوازي أضلاع، فما قيمة x؟



$$6x + 7x + 11 = 180$$
$$13x = 180 - 11$$
$$13x = 169$$
$$x = 13$$

مراجعة تراكمية

أوجد عدد أضلاع المضلع المنتظم المعطى قياس إحدى زواياه الداخلية في كل مما يأتي :

(الدرس 1-1)

39) 108°

$108n = (n-2).180$ (كتابة معادلة)

$108n = 180n - 360$ (خاصية التوزيع)

$-72n = -360$ (بطرح 180n من كلا الطرفين)

$n = 5$ (بقسمة كلا الطرفين على -72)

إذن للمضلع 5 أضلاع

40) 140°

$140n = (n-2).180$ (كتابة معادلة)

$140n = 180n - 360$ (خاصية التوزيع)

$-40n = -360$ (بطرح 180n من كلا الطرفين)

$n = 9$ (بقسمة كلا الطرفين على -40)

إذن للمضلع 9 أضلاع

41) 147.3°

$147.3n = (n-2).180$ (كتابة معادلة)

$147.3n = 180n - 360$ (خاصية التوزيع)

$-32.7n = -360$ (بطرح 180n من كلا الطرفين)

$n = 11$ (بقسمة كلا الطرفين على -32.7)

إذن للمضلع 11 ضلع

42) 160°

$160n = (n-2).180$ (كتابة معادلة)

$160n = 180n - 360$ (خاصية التوزيع)

$-20n = -360$ (بطرح 180n من كلا الطرفين)

$n = 18$ (بقسمة كلا الطرفين على -20)

إذن للمضلع 18 ضلع

43) 135°

$135n = (n-2).180$ (كتابة معادلة)

$135n = 180n - 360$ (خاصية التوزيع)

$-45n = -360$ (بطرح 180n من كلا الطرفين)

$n = 8$ (بقسمة كلا الطرفين على 45−)

إذن للمضلع 8 أضلاع

44) 176.4°

$176.4n = (n-2).180$ (كتابة معادلة)

$176.4n = 180n - 360$ (خاصية التوزيع)

$-3.6n = -360$ (بطرح 180n من كلا الطرفين)

$n = 100$ (بقسمة كلا الطرفين على 3.6−)

إذن للمضلع 100 ضلع

حدد ما إذا كان المستقيمان متوازيين أو متعامدين، أو غير ذلك في كل مما يأتي: (الدرس 5-2)

45) $y = -x + 6$

$x + y = 20$

$y = -x + 6$

$y = 20 - x$

معامل x في كل معادلة متساويين إذن المستقيمان متوازيين

46) $y - 7x = 6$

$7y + x = 8$

$y = 6 + 7x$

$y = \frac{8}{7} - \frac{x}{7}$

حاصل ضرب معامل x في كل معادلة = 1− إذن المستقيمان متعامدين

47) $3x + 4y = 12$

$6x + 2y = 6$

$4y = 12 - 3x \rightarrow y = 3 - \frac{3}{4}x$

$2y = 6 - 6x \rightarrow y = 3 - 3x$

معامل x في كل من المعادلتين غير متساويين إذا هما غير ذلك

48) $2x + 5y = -1$

$10y = -4x - 20$

$$5y = -1 - 2x$$

$$\frac{10y}{2} = \frac{-4x}{2} - \frac{20}{2} \rightarrow 5y = -2x - 10$$

معامل x في كل معادلة متساويين إذن المستقيمان متوازيين

49) **زراعة:** عند زراعة الأشجار، تسند الشجرة بدعامة (على شكل عصا) ترتكز على الأرض وتربط في جذع الشجرة لتثبيتها. استعمل متباينة SAS لتفسير سبب فعالية هذه الطريقة في تثبيت الأشجار المزروعة رأسيًا. (الدرس 6-4)

حسب نظرية المتباينة SAS، إذا بدأت الشجرة تميل، فإن إحدى زوايا المثلث المتكون من الشجرة وسطح الأرض والدعامة سوف تتغير، والضلع المقابل لتلك الزاوية سوف يتغير.

ولأن الدعامة ترتكز على الأرض ومثبتة في الشجرة فإنه لن يتغير طول أي ضلع من أضلاع المثلث. لذلك لا يمكن أن تتغير أي زاوية. وهذا يؤكد أن الشجرة ستبقى مستقيمة.

استعد للدرس اللاحق

رؤوس شكل رباعي هي $W(3, -1), X(4, 2), Y(-2, 3), Z(-3, 0)$. حدّد ما إذا كانت كل قطعة مستقيمة مما يأتي تمثل ضلعًا أو قطرًا في الشكل الرباعي، وأوجد ميل كل منها.

50) $\overline{YZ}$

ضلع؛ الميل $= \frac{3-0}{-2+3} = 3$

51) $\overline{YW}$

قطر؛ الميل $= \frac{3+1}{-2-3} = \frac{4}{-5}$

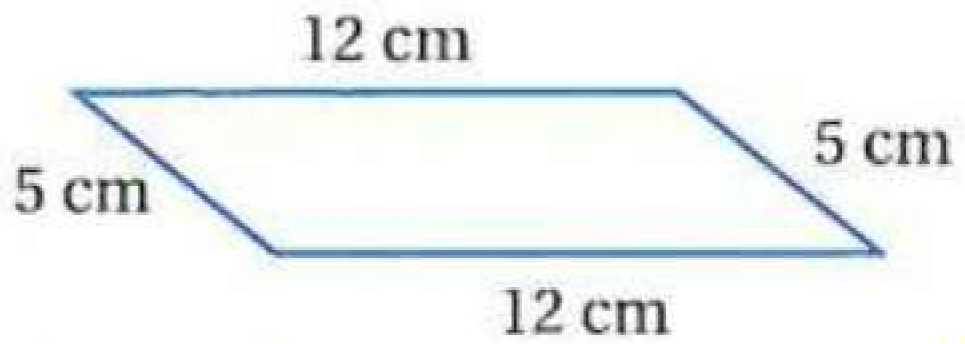
52) $\overline{ZW}$

ضلع؛ الميل: $\frac{0+1}{-3-3} = \frac{-1}{6}$

5-3 تمييز متوازي الأضلاع

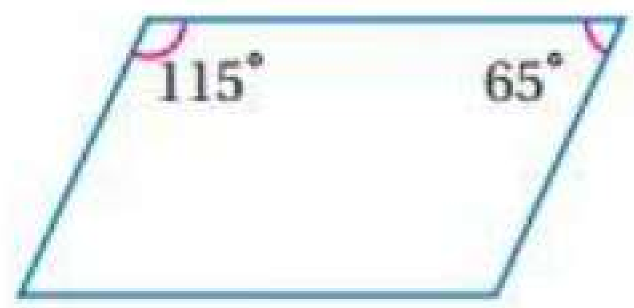
تحقق

(1A



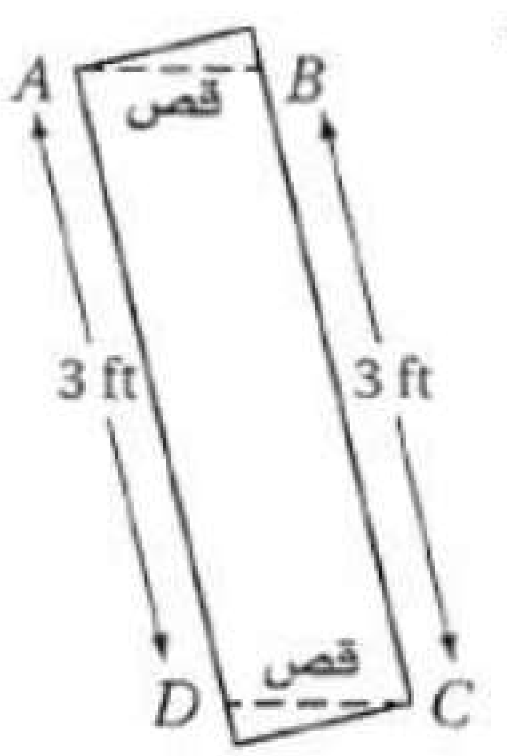
نعم؛ لأن كل ضلعين متقابلين فيه متطابقان.

(1B



لا؛ لأنه لا يحقق أي واحد من اختبارات متوازي الأضلاع.

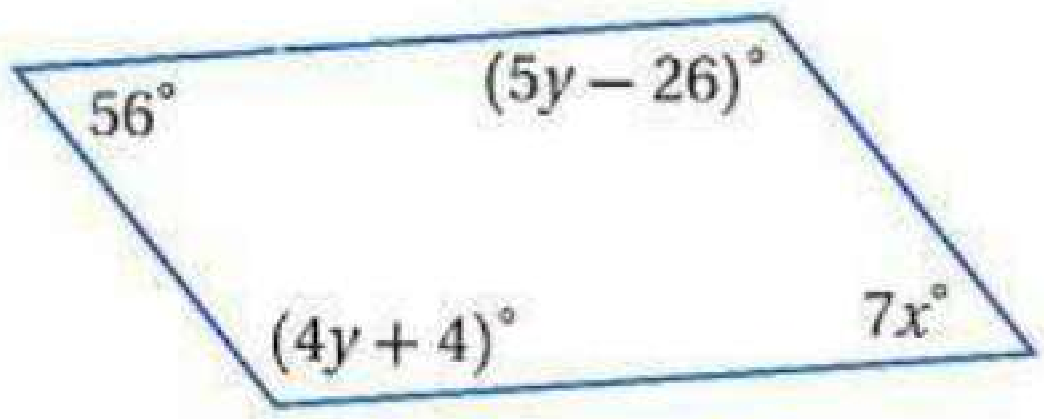
2) **لوحات:** عُد إلى فقرة "لماذا؟" بداية الدرس، وضّح لماذا يكون خطي القص أعلى وأسفل كل شريط متوازيين.



بما أن كل ضلعين متقابلين في الشكل الرباعي ABCD متطابقان فإن ABCD متوازي أضلاع إذن $AB \parallel DC$

أوجد قيمتي x, y في كل مما يأتي بحيث يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

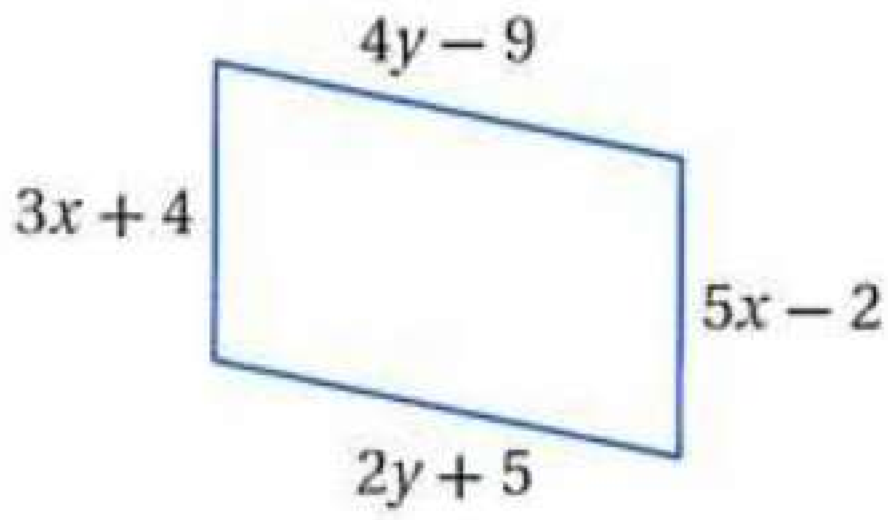
(3A



كل زاويتين متقابلتين متطابقتين

$$7x = 56$$
$$x = 8$$
$$5y - 26 = 4y + 4$$
$$y = 4 + 26 = 30$$

(3B



كل ضلعين متقابلين متطابقين

$$4y - 9 = 2y + 5$$
$$4y - 2y = 5 + 9$$
$$2y = 14$$
$$y = 7$$
$$3x + 4 = 5x - 2$$
$$3x - 5x = -2 - 4$$
$$-2x = -6$$
$$x = 3$$

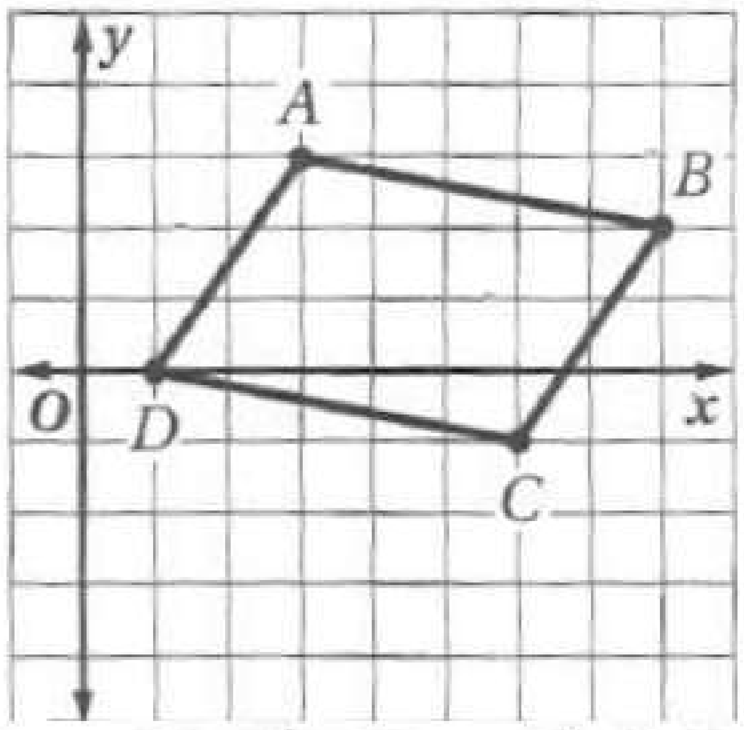
حدّد ما إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع أم لا في كل مما يأتي. برّر إجابتك باستعمال الطريقة المحددة في السؤال :

4A) $A(3, 3), B(8, 2), C(6, -1), D(1, 0)$ ، صيغة المسافة

$$A,B=(3,3),(8,2)$$
$$AB=\sqrt{(3-2)^2+(3-8)^2}$$
$$AB=\sqrt{1+25}=\sqrt{26}$$
$$C,D=(6,-1),(1,0)$$
$$CD=\sqrt{(-1-0)^2+(6-1)^2}$$
$$CD=\sqrt{1+25}=\sqrt{26}$$

$$B,C=(8,2),(6,-1)$$
$$BC=\sqrt{(2+1)^2+(8-6)^2}$$
$$BC=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$$
$$A,D=(3,3),(1,0)$$
$$AD=\sqrt{(3-0)^2+(3-1)^2}$$
$$AD=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$$

إذا كانت الأضلاع المتقابلة لشكل رباعي متطابقة فإنه متوازي أضلاع.
$AB=\sqrt{26}$ ؛ $DC=\sqrt{26}$ ؛ $BC=\sqrt{13}$ ؛ $AD=\sqrt{13}$.
حيث أن المسافة بين أي نقطتين = $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$
بما أن $AB=DC$ و $AD=BC$ فإن $AB=DC$ و $AD=BC$ لذلك فالشكل الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع حسب النظرية 5.9.



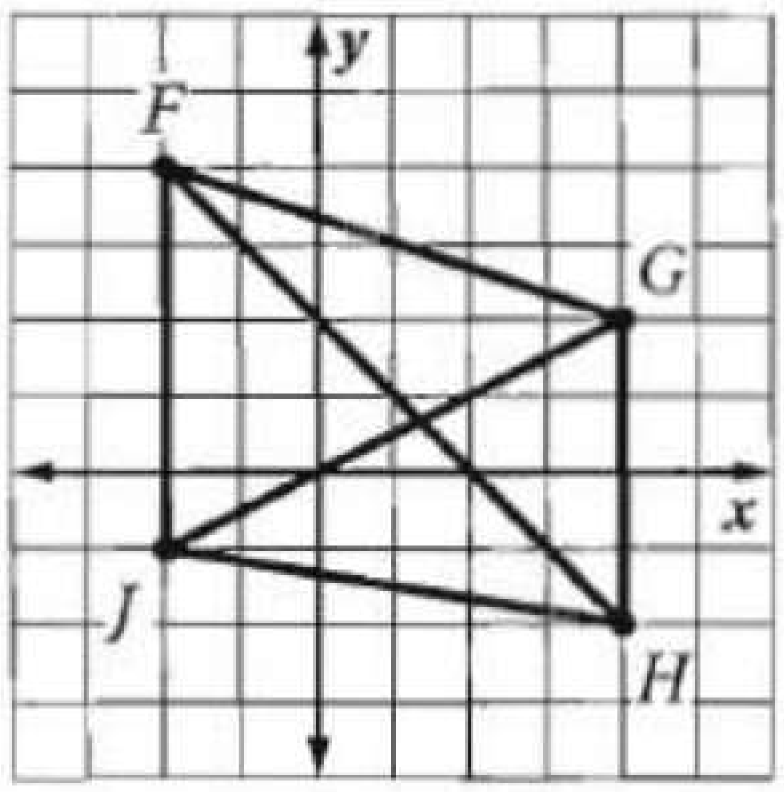
4B) $F(-2, 4), G(4, 2), H(4, -2), J(-2, -1)$ ، صيغة نقطة المنتصف

إذا كان قطرا شكل رباعي ينصف كل منهما الآخر، فإنه متوازي أضلاع، وينصف قطرا شكل رباعي كل منهما الآخر إذا كانت نقطتا منتصفيهما متطابقتين.

نقطة منتصف القطر $\overline{FH}$ هي $(1, 1)$. ونقطة منتصف القطر $\overline{GJ}$ هي $(1,0.5)$.

حيث أن نقطة المنتصف = $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

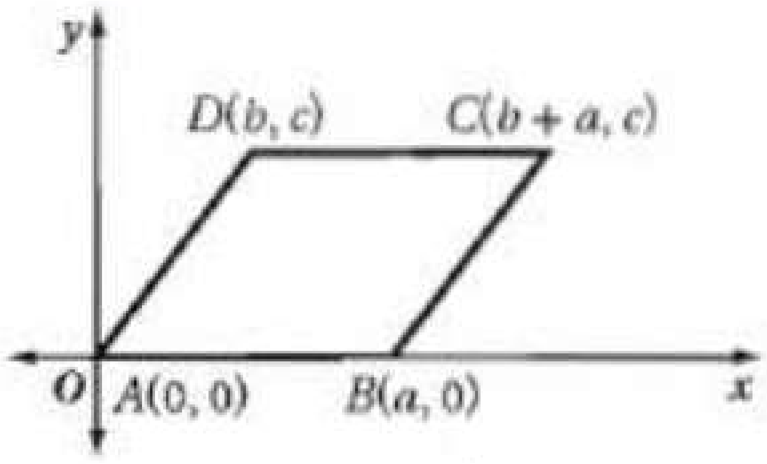
وبما أن نقطتي منتصفي القطرين $\overline{FH}$ و $\overline{GJ}$ ليس لهما الإحداثيات نفسها، فإن الشكل الرباعي FGHJ ليس متوازي أضلاع.



5) اكتب برهانًا إحداثيًّا للعبارة الآتية: إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع فإنّ أضلاعه المتقابلة متطابقة.

المعطيات: ABCD متوازي أضلاع.

المطلوب: AB = CD, AD = BC



برهان إحداثي:

$$AB = \sqrt{((a-0)^2 + (0-0)^2)} = a$$

$$DC = \sqrt{((b+a-b)^2 + (c-c)^2)} = a$$

$$AD = \sqrt{((c-0)^2 + (b-0)^2)} = \sqrt{(c^2 + b^2)}$$

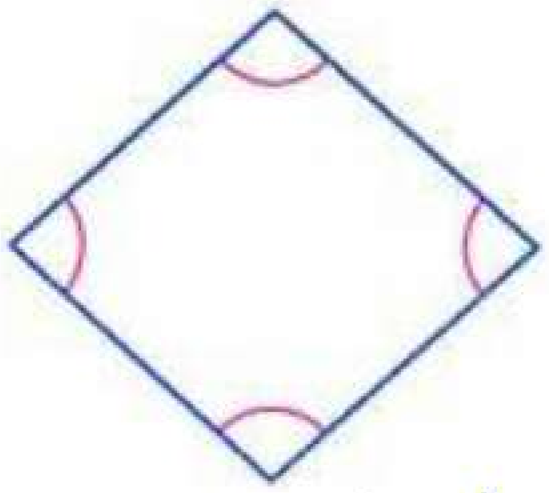
$$BC = \sqrt{((a-(b+a))^2 + (c-0)^2} = \sqrt{(c^2 + b^2)}$$

بما أن AB = DC وAD = BC، فإن AB = DC وAD = BC.

تأكد:

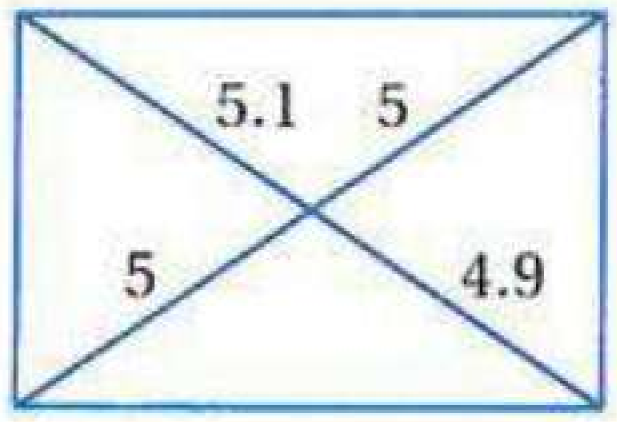
المثال 1 حدّد ما إذا كان شكل رباعي فيما يأتي متوازي أضلاع أم لا. برّر إجابتك.

(1



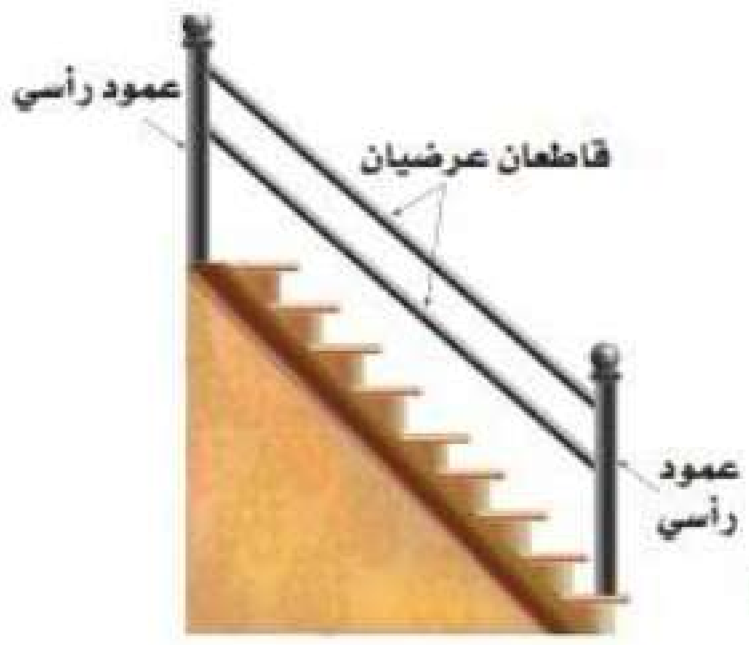
نعم؛ لأن كل زاويتين متقابلتين متطابقتان.

(2



لا؛ لأنه لا يحقق أي شرط من شروط متوازي الأضلاع.

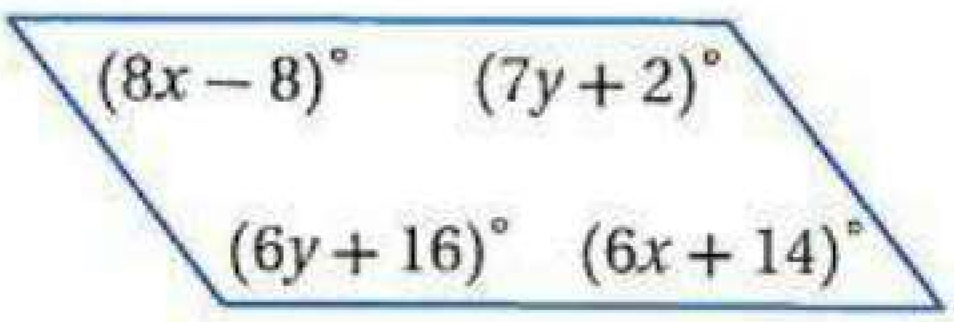
(3 **نجارة:** صنع نجار دربزينًا لدَرَج يتكوّن من عمودين رأسيين؛ الأول مثبت فوق الدرجة الأولى، والثاني مثبت فوق الدرجة الأخيرة، ويصل بينهما قاطعان خشبيان كما في الشكل المجاور. كيف يمكن للنجار التحقق من أن القاطعين الخشبيين العرضيين متوازيان، وذلك بأقل عدد من مرات القياس، إذا علمت بأن الدرجتين الأولى والأخيرة مستويتان مع الأرض.



إذا كان القاطعان الخشبيان متطابقان فإن الشكل متوازي أضلاع وبالتالي يكون القاطعان الخشبيين متوازيان.

جبر: أوجد قيمتي x, y في كل مما يأتي بحيث يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

(4



$8x - 8 = 6x + 14$

$8x - 6x = 14 + 8$

$2x = 22$

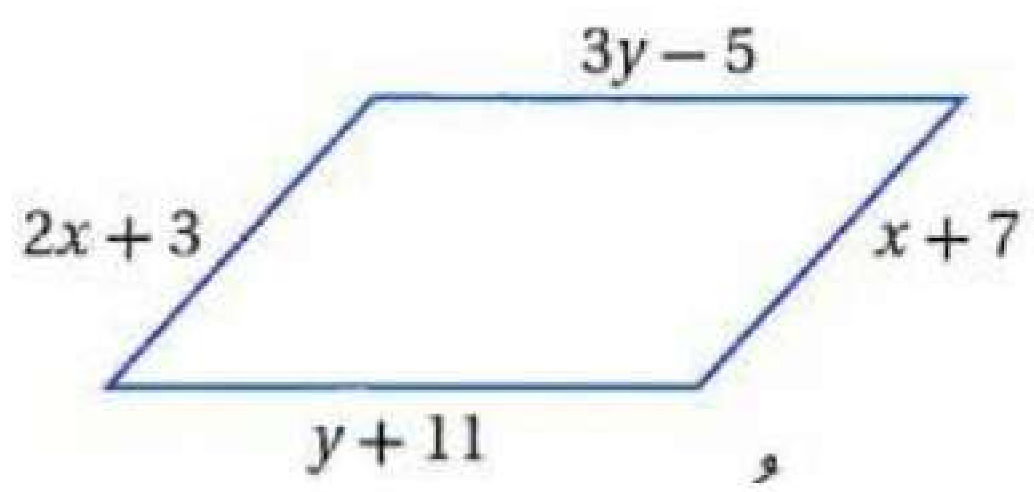
$x = 11$

$7y + 2 = 6y + 16$

$7y - 6y = 16 - 2$

$y = 14$

(5



$x + 7 = 2x + 3$

$2x - x = 7 - 3$

$x = 4$

$3y - 5 = y + 11$

$3y - y = 11 + 5$

$2y = 16$

$y = 8$

هندسة إحداثيّة : مثل في المستوى الإحداثي الشكل الرباعي الذي أعطيت إحداثيات رؤوسه فيما يأتي. وحدّد ما إذا كان متوازي أضلاع أم لا، برّر إجابتك باستعمال

(6 $A(-2, 4), B(5, 4), C(8, -1), D(-1, -1)$ ، صيغة الميل.

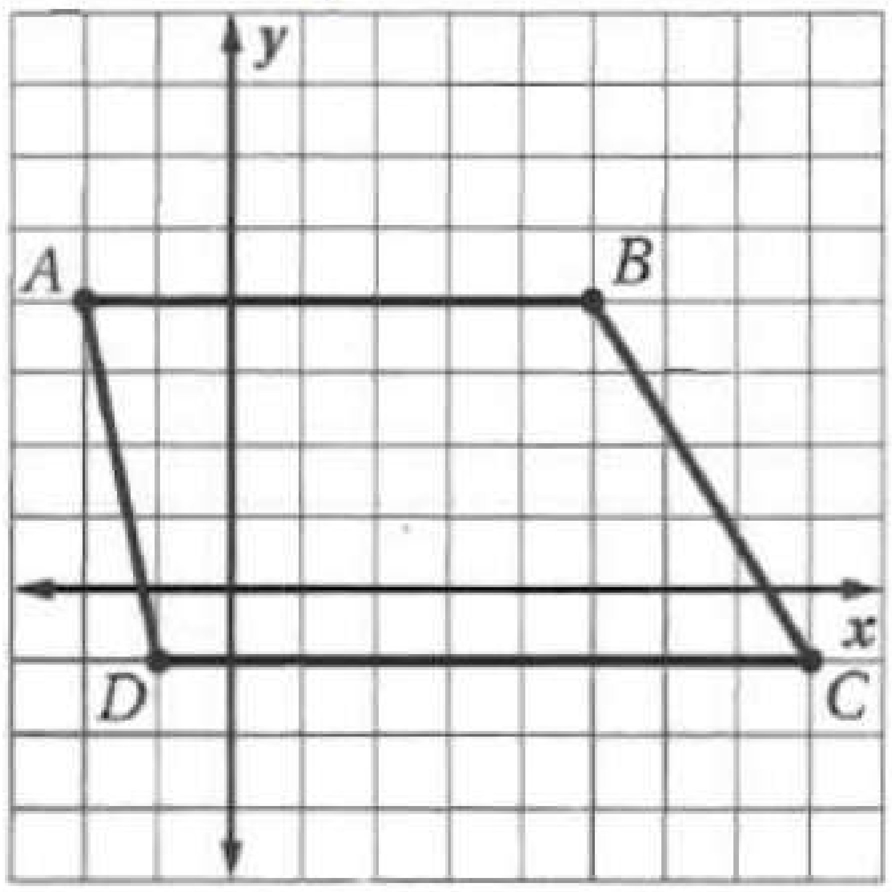
ميل $\overline{AB}$: $\frac{-2-5}{4-4} = \frac{-7}{0}$

ميل $\overline{BC}$: $\frac{5-8}{4+1} = \frac{3}{5}$

ميل $\overline{CD}$: $\frac{8+1}{0} = \frac{9}{5}$

ميل $\overline{AD}$: $\frac{-2+1}{4+1} = \frac{-1}{5}$

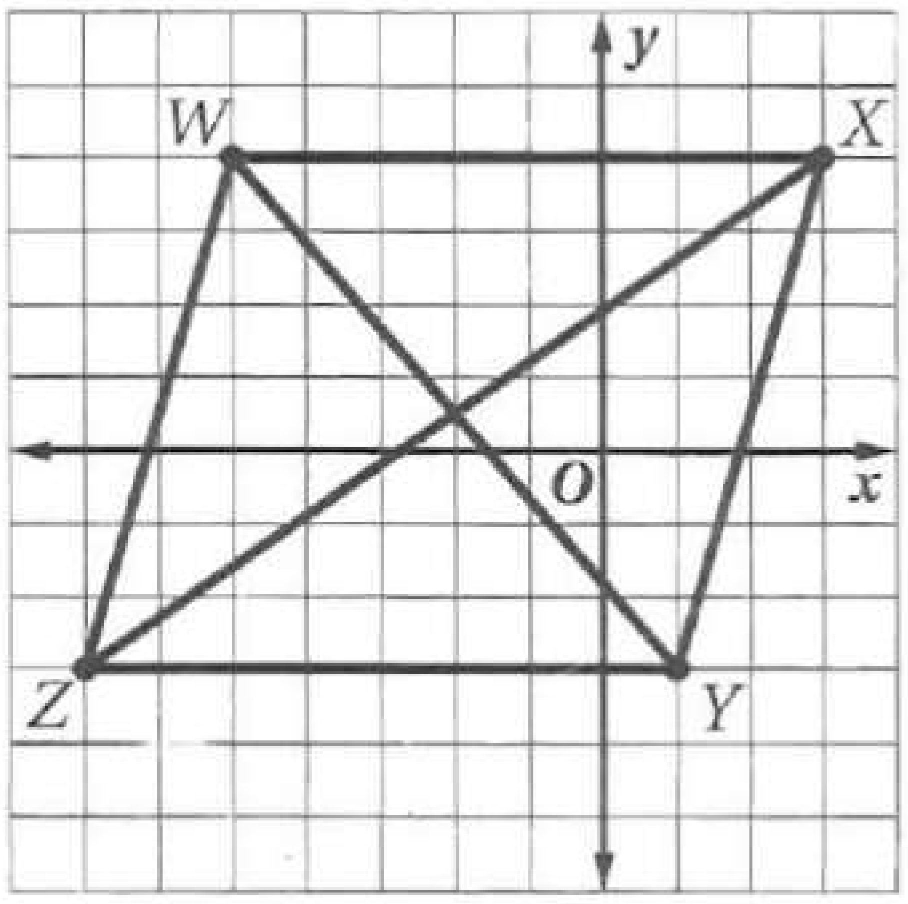
بما أن ميل $\overline{BC} \neq$ ميل $\overline{AD}$ ، فإن ABCD ليس متوازي أضلاع.



7) $W(-5, 4), X(3, 4), Y(1, -3), Z(-7, -3)$ ، صيغة نقطة المنتصف.

نعم؛ نقطة منتصف كل من $\overline{WY}$ و $\overline{XZ}$ هي $\left(-2, \frac{1}{2}\right)$

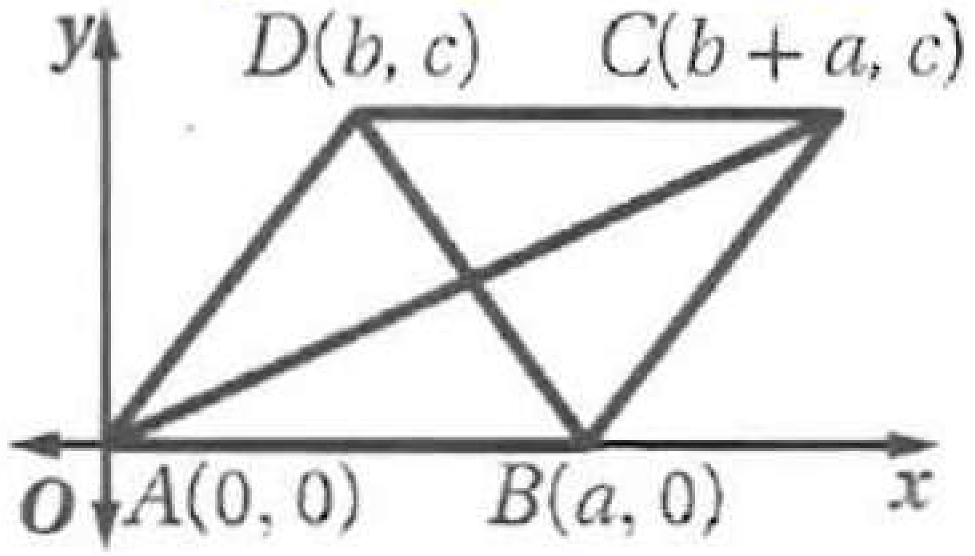
وبما أن القطرين ينصف كل منهما الآخر، فإن الشكل WXYZ متوازي أضلاع.



8) اكتب برهانًا إحداثيًا للعبارة الآتية: إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع، فإنّ قطريه ينصّف كل منهما الآخر.

المعطيات: ABCD متوازي أضلاع.

المطلوب: $\overline{AC}$ و $\overline{DB}$ ينصف كل منهما الآخر.



البرهان:

نقطة منتصف $\overline{AC}$

$$\left(\frac{a+b}{2},\frac{c}{2}\right)=\left(\frac{0+(a+b)}{2},\frac{0+c}{2}\right)$$

ونقطة منتصف $\overline{DB}$

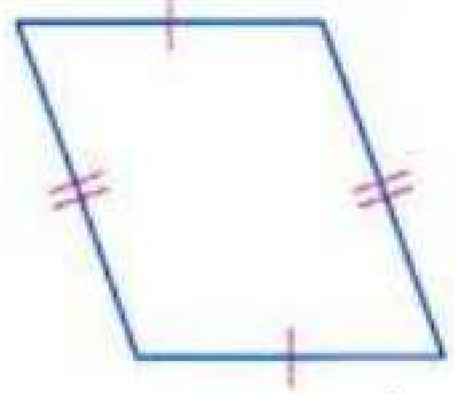
$$\left(\frac{a+b}{2},\frac{c}{2}\right)=\left(\frac{a+b}{2},\frac{0+c}{2}\right)$$

إذن، $\overline{AC}$ و $\overline{DB}$ ينصف كل منهما الآخر.

تدرب وحل المسائل:

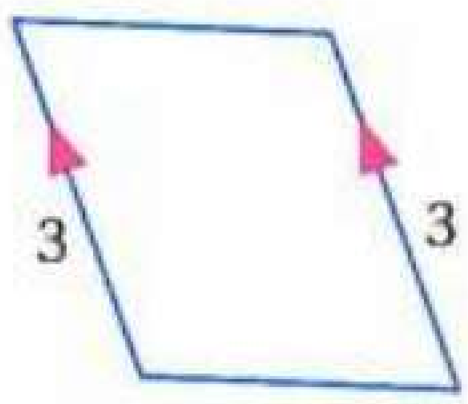
حدّد ما إذا كان كل شكل رباعي فيما يأتي متوازي أضلاع أم لا. برّر إجابتك.

9)



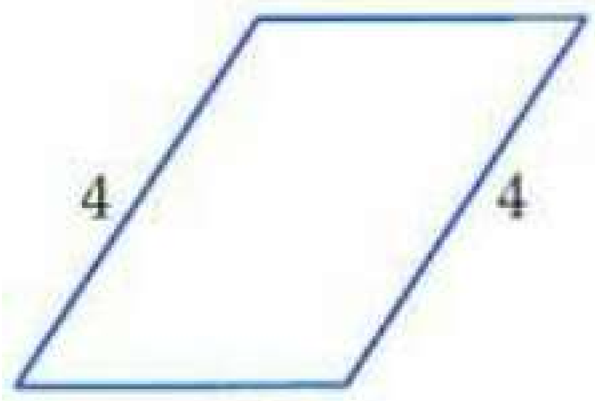
نعم؛ لأن كل ضلعين متقابلين متطابقان.

10)



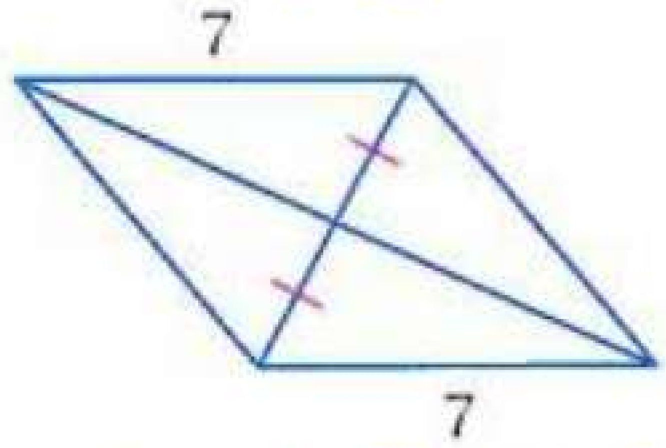
نعم؛ لأن فيه ضلعين متقابلين متوازيان ومتطابقان.

11)



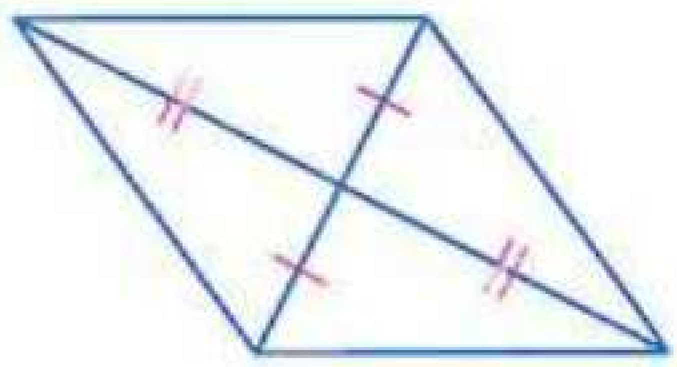
لا؛ لأنه لا يحقق أي واحد من اختبارات متوازي الأضلاع.

12)



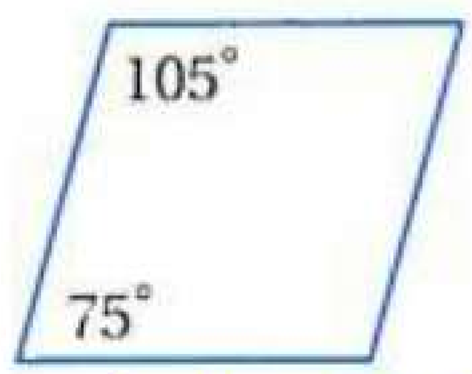
)لا؛ لأنه لا يحقق أي واحد من اختبارات متوازي الأضلاع.

13)

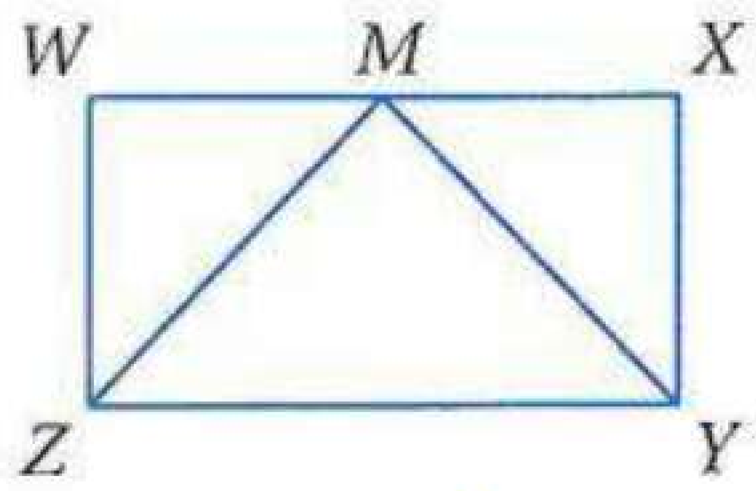


نعم؛ لأن قطرية ينصف كل منهما الآخر.

(14



لا؛ لأنه لا يحقق أي واحد من اختبارات متوازي الأضلاع.



15) **برهان:** إذا كان $WXYZ$ متوازي أضلاع، حيث $\angle W \cong \angle X$، M نقطة منتصف $\overline{WX}$، فاكتب برهانًا حرًّا لإثبات أن $\triangle ZMY$ متطابق الضلعين.

المعطيات: WXYZ متوازي أضلاع فيه $\angle W \cong \angle X$ و M نقطة منتصف $\overline{WX}$.

المطلوب: ΔZMY متطابق الضلعين.

البرهان: بما أن WXYZ متوازي أضلاع، فإن $\overline{WZ} \cong \overline{XY}$.

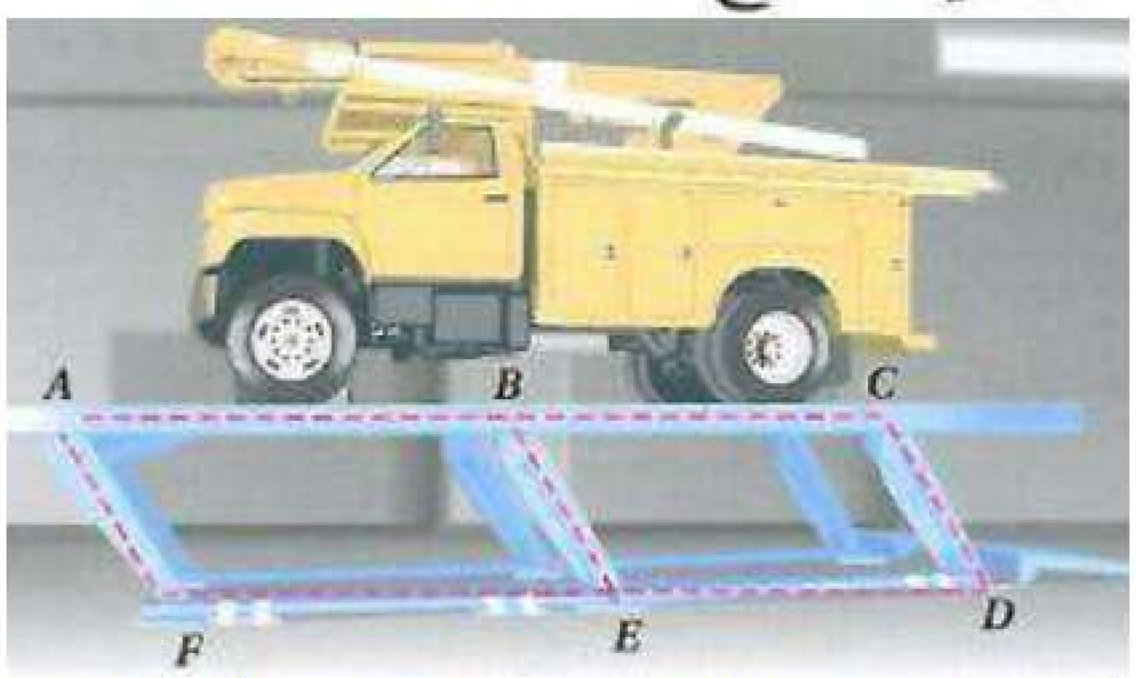
وبما أن M نقطة منتصف $\overline{WX}$، فإن $WM = MX$.

ومعطى أن $\angle X \cong \angle W$، لذلك وحسب SAS فإن $\Delta ZWM \cong \Delta YXM$

ولأن العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين متطابقة، فإن $\overline{ZM} \cong \overline{YM}$.

إذن ZMY مثلث متطابق الضلعين بحسب تعريف المثلث متطابق الضلعين.

16) **رافعات:** تستعمل رافعات متوازيات الأضلاع لرفع المركبات الثقيلة عند صيانتها. ففي الشكل أدناه: $ABEF, BCDE$ متوازيا أضلاع. اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات أن $ACDF$ متوازي أضلاع أيضًا.



المعطيات: ABEF متوازي أضلاع؛ BCDE متوازي أضلاع.

المطلوب: ACDF متوازي أضلاع.

البرهان: العبارات (المبررات):

1) ABEF متوازي أضلاع؛ BCDE متوازي أضلاع (معطيات)

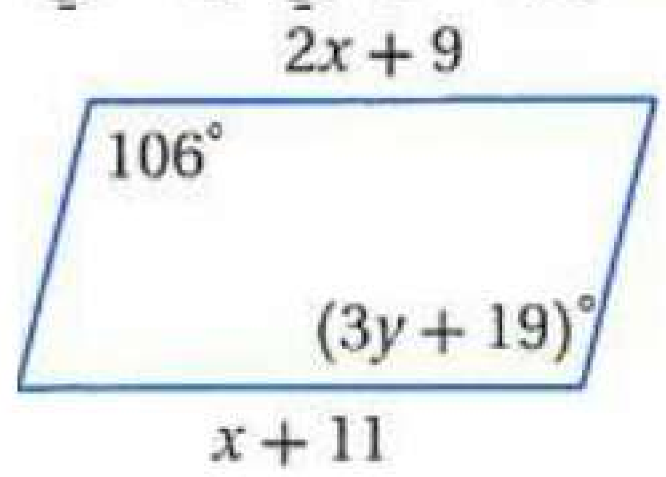
2) $\overline{BE}$ □ $\overline{CD}$, $\overline{AF}$ □ $\overline{BE}$, $AF = BE$, $BE = CD$ (تعريف متوازي الأضلاع)

3) $\overline{AF}$ □ $\overline{CD}$, $AF = CD$ (خاصية التعدي)

4) ACDF متوازي أضلاع. (إذا كان ضلعان في شكل رباعي متطابقين ومتوازيين فإنه متوازي أضلاع)

جبر: أوجد قيمتي x, y في كل مما يأتي بحيث يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

17)



$2x + 9 = x + 11$

$2x - x = 11 - 9$

$x = 2$

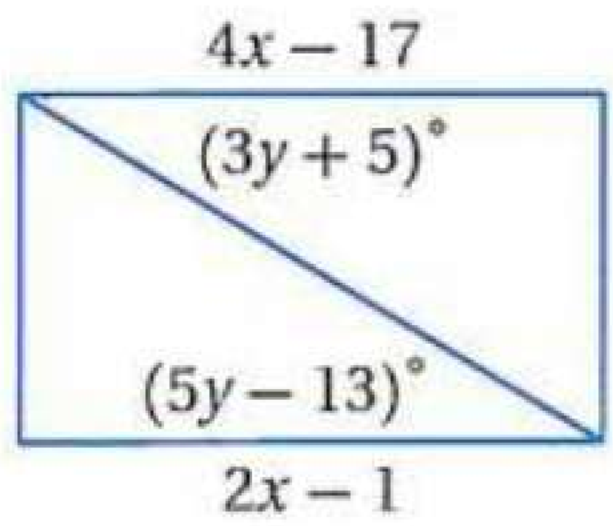
$106 = 3y + 19$

$3y = 106 - 19$

$3y = 87$

$y = 29$

18)



$4x - 17 = 2x - 1$

$4x - 2x = 17 - 1$

$2x = 16$

$x = 8$

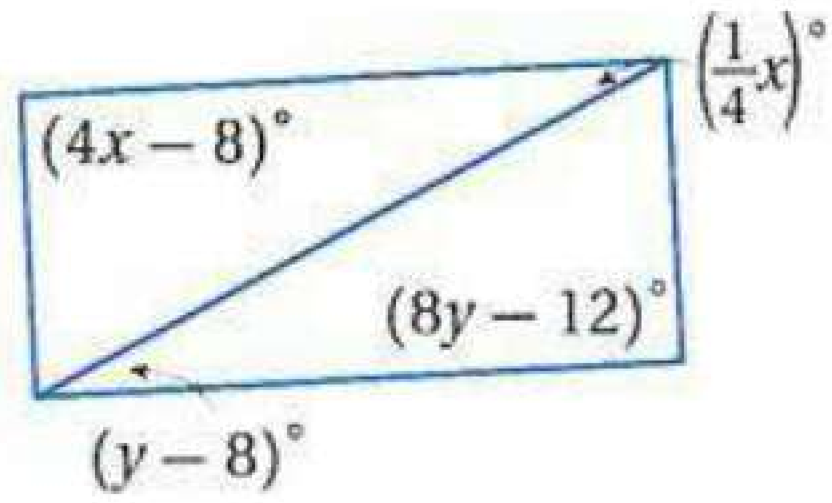
$3y + 5 = 5y - 13$

$3y - 5y = -13 - 5$

$-2y = -18$

$y = 9$

(19



$4x - 8 = 8y - 12 \quad \div 4$

$x - 2 = 2y - 3$

$x = 2y - 3 + 2$

$x = 2y - 1$

$\frac{1}{4}x = y - 8$

$\frac{1}{4}(2y - 1) = y - 8$

$\frac{1}{2}y - \frac{1}{4} = y - 8 \quad \times 4$

$2y - 1 = 4y - 32$

$2y - 4y = -32 + 1$

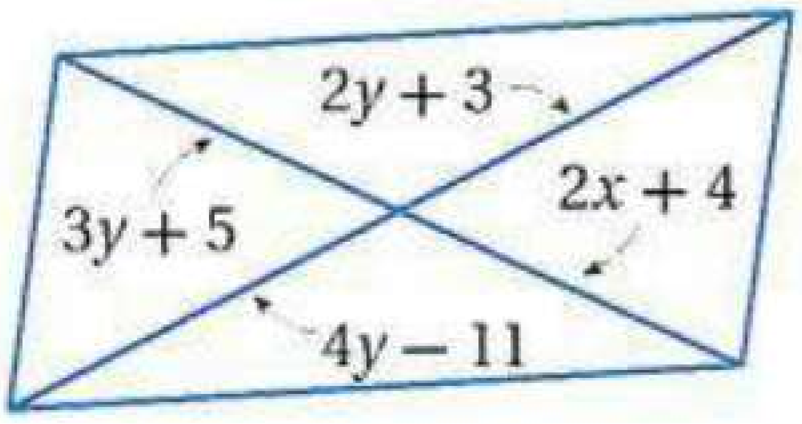
$-2y = -31$

$y = 15.5$

$\because x = 2y - 1$

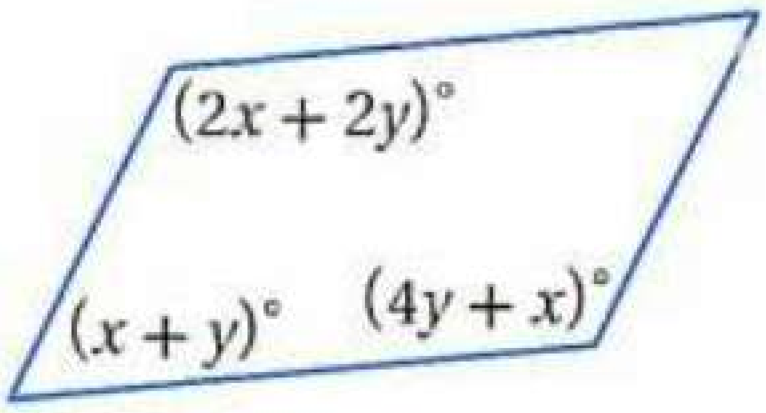
$\therefore x = 2 \times 15.5 - 1 = 30$

(20



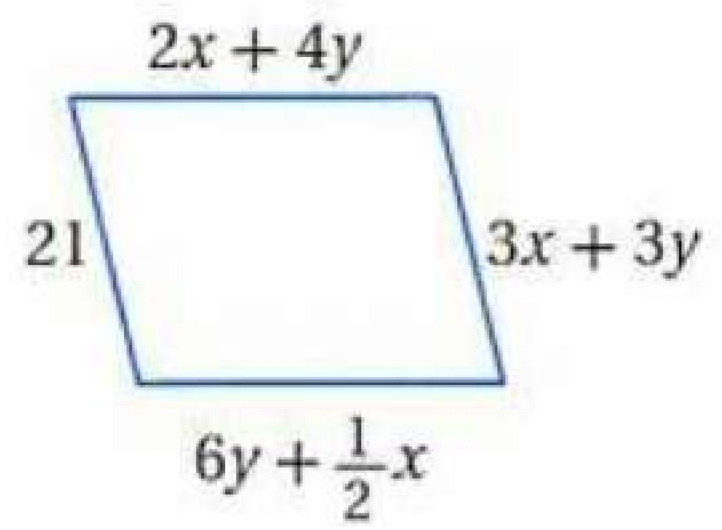
$$2y + 3 = 4y - 11$$
$$2y - 4y = -11 - 3$$
$$-2y = -14$$
$$y = 7$$
$$2x + 4 = 3y + 5$$
$$2x + 4 = 21 + 5$$
$$2x = 26 - 4$$
$$2x = 22$$
$$x = 11$$

(21



$$2x + 2y = 4y + x$$
$$x = 4y - 2y$$
$$x = 2y$$
$$(x + y) + (4y + x) = 180$$
$$(2y + y) + (4y + 2y) = 180$$
$$9y = 180$$
$$y = 20$$
$$x = 40$$

(22



$$3x + 3y = 21$$
$$x + y = 7$$
$$x = 7 - y$$
$$2x + 4y = 6y + \frac{1}{2}x$$
$$2(7 - y) + 4y = 6y + \frac{1}{2}(7 - y)$$
$$14 - 2y + 4y = 6y + \frac{7}{2} - \frac{1}{2}y$$
$$14 + 2y = 5.5y + \frac{7}{2}$$
$$2y - 5.5y = \frac{7}{2} - 14$$
$$-3.5y = -10.5$$
$$y = 3$$
$$x = 7 - y = 7 - 3 = 4$$

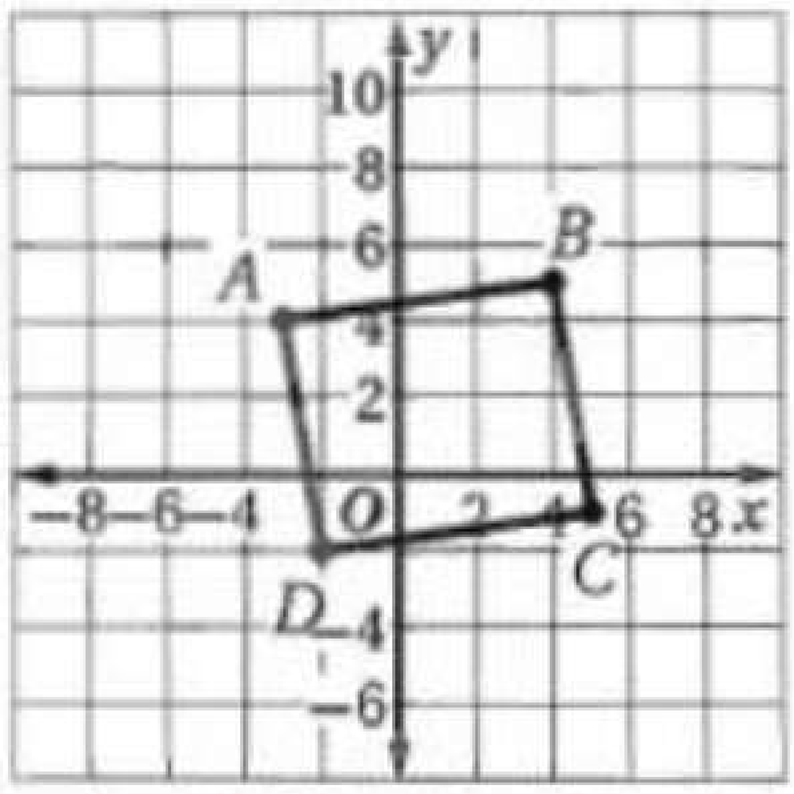
هندسة إحداثيّة: مثّل في المستوى الإحداثي الشكل الرباعي الذي أُعطيت إحداثيات رؤوسه فيما يأتي. وحدّد ما إذا كان متوازي أضلاع أم لا، برّر إجابتك باستعمال الطريقة المحدّدة في السؤال.

(23 $A(-3, 4)$، $B(4, 5)$، $C(5, -1)$، $D(-2, -2)$، صيغة الميل.

نعم؛ ميل $\overline{AB}$ يساوي ميل $\overline{CD}$ ويساوي $\frac{1}{7}$ لذلك $\overline{AB}$ □ $\overline{CD}$.

حيث أن الميل $= \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

وبما أن ميل $\overline{BC}$ يساوي ميل $\overline{AD}$ ويساوي -6
فإن $\overline{AD}$ □ $\overline{BC}$ ولأن كل ضلعين متقابلين متوازيان فإن ABCD متوازي أضلاع.



24) $J(-4, -4)$، $K(-3, 1)$، $L(4, 3)$، $M(3, -3)$ ، صيغة المسافة بين نقطتين.

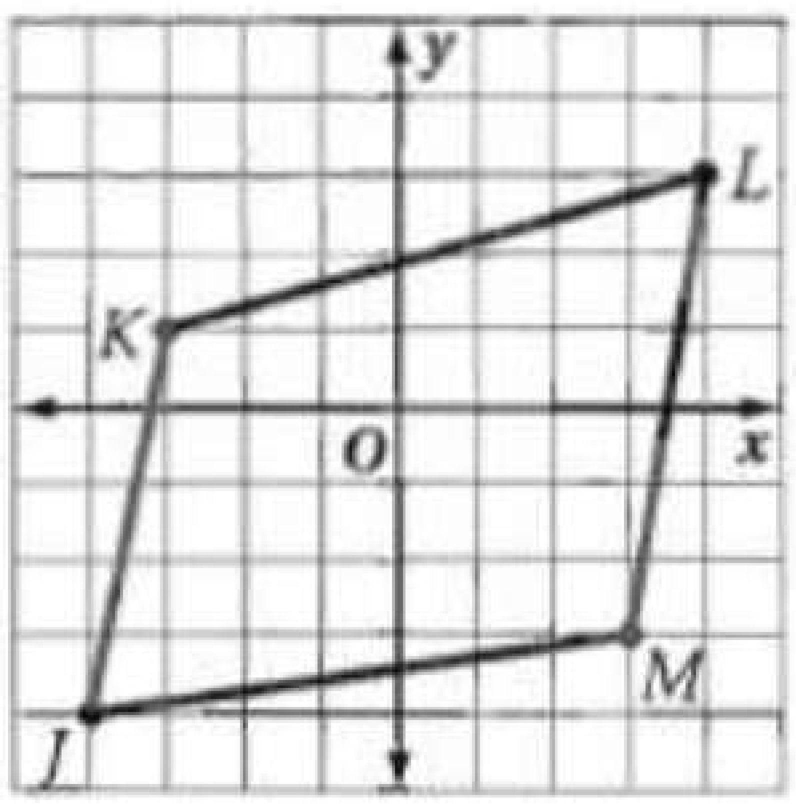
لا؛ يجب أن يكون كل ضلعين متقابلين متطابقين.

والمسافة بين K و L تساوي $\sqrt{53}$. والمسافة بين L و M تساوي $\sqrt{37}$.

والمسافة بين M و J تساوي $\sqrt{50}$. والمسافة بين J و K تساوي $\sqrt{26}$.

حيث أن المسافة بين أي نقطتين = $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

وبما أن كل ضلعين متقابلين ليسا متطابقين، فإن JKLM ليس متوازي أضلاع.



25) $V(3, 5)$ ،$W(1, -2)$ ،$X(-6, 2)$ ،$Y(-4, 7)$ ، صيغتا الميل والمسافة بين نقطتين.

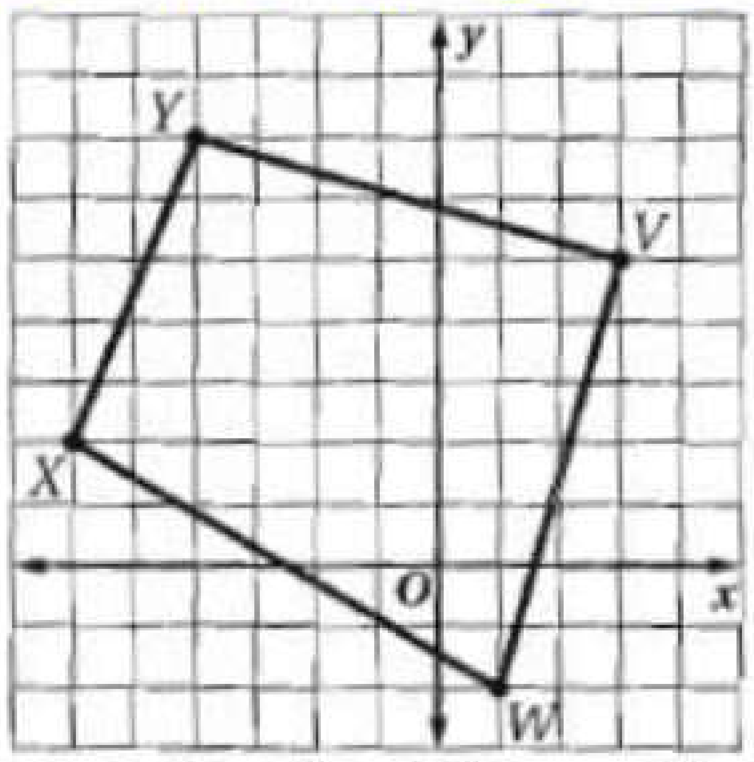
ميل $\overline{YX}$: $\frac{-4+6}{7-2} = \frac{2}{5}$

ميل $\overline{XW}$: $\frac{-6-1}{2+2} = \frac{-7}{4}$

ميل $\overline{WV}$: $\frac{1-3}{-2-5} = \frac{-2}{-7} = \frac{2}{7}$

ميل $\overline{YV}$: $\frac{-4-3}{7-5} = \frac{-7}{2}$

ميل $\overline{YV}$ يساوي $\frac{-7}{2}$ ، وميل $\overline{XW}$ يساوي $\frac{-7}{4}$ ، وميل $\overline{YX}$ يساوي $\frac{2}{5}$ ، وميل $\overline{VW}$ يساوي $\frac{2}{7}$. وبما أن ميل $\overline{YV}$ لا يساوي ميل $\overline{XW}$ ، وميل $\overline{YX}$ لا يساوي ميل $\overline{VW}$ فإن VWXY ليس متوازي أضلاع.



26) $Q(2, -4)$ ،$R(4, 3)$ ،$S(-3, 6)$ ،$T(-5, -1)$ ، صيغتا الميل والمسافة بين نقطتين.

ميل $\overline{TS}$: $\frac{-5+3}{-1-6} = \frac{-2}{-7} = \frac{2}{7}$

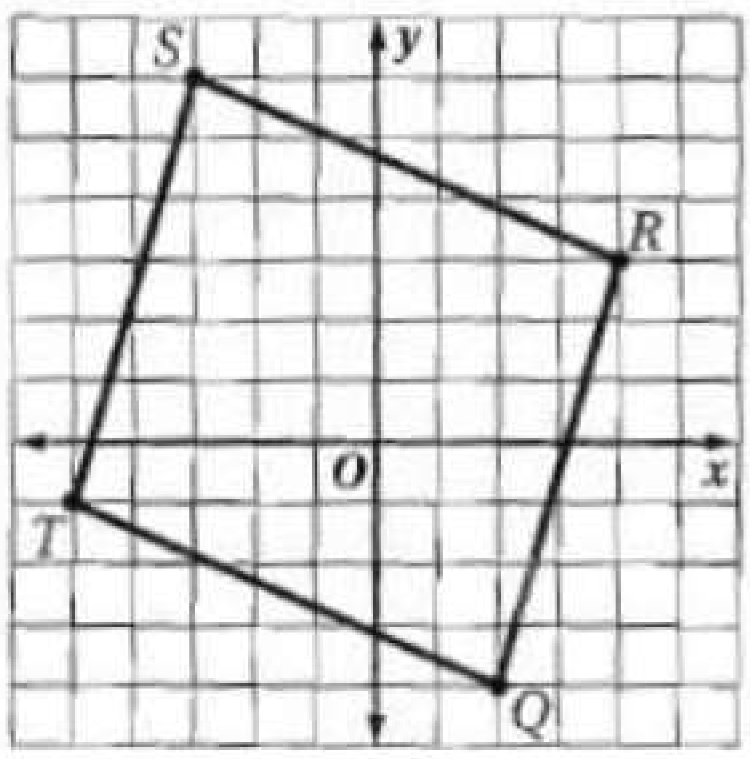
ميل $\overline{RQ}$: $\frac{4-2}{3+4} = \frac{2}{7}$

يجب أن يكون فيه ضلعان متقابلان متوازيين ومتطابقين. وبما أن ميل

$\overline{RQ}$ يساوي ميل $\overline{TS}$ ويساوي $\frac{2}{7}$ ، فإن $\overline{QR} \square \overline{TS} \| \overline{ST}$ ولأن $QR = ST$

$=\sqrt{53}$

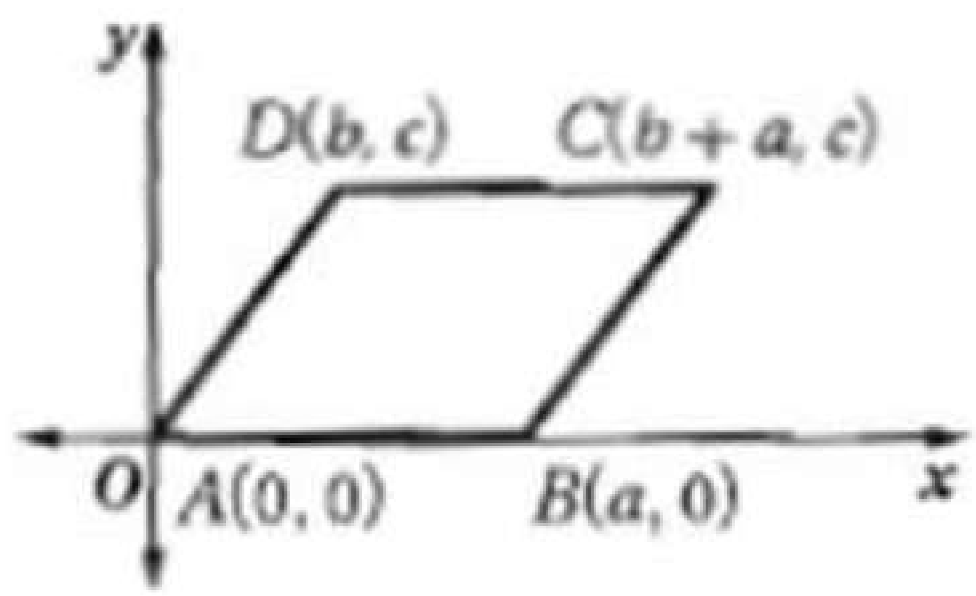
فإن $\overline{QR} \cong \overline{TS}$ إذن، QRST متوازي أضلاع.



27) اكتب برهانًا إحداثيًا للعبارة: إذا كان كل ضلعين متقابلين في الشكل الرباعي متطابقين، فإنه متوازي أضلاع.

المعطيات: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $\overline{AD} \cong \overline{BC}$

المطلوب: متوازي أضلاع ABCD .



البرهان:

ميل $\overline{AD}$: $m = \dfrac{c-0}{b-0} = \dfrac{c}{b}$

ميل $\overline{AB}$: $m = \dfrac{0-0}{a-0} = 0$

ميل $\overline{BC}$: $m = \dfrac{c-0}{b+a-a} = \dfrac{c}{b}$

ميل $\overline{DC}$: $m = \dfrac{c - c}{b + a - b} = 0$

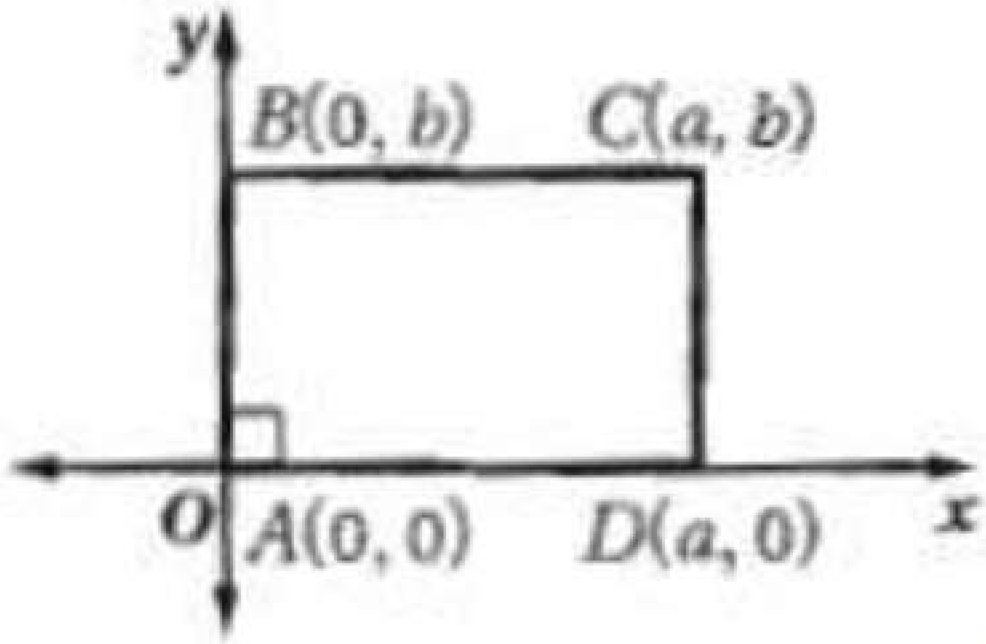
لذلك $\overline{BC}$ □ $\overline{AD}$ و $\overline{CD}$ □ $\overline{AB}$.

إذن وحسب تعريف متوازي الأضلاع يكون ABCD متوازي أضلاع.

28) اكتب برهانًا إحداثيًا للعبارة: إذا كانت إحدى زوايا متوازي الأضلاع قائمة، فإنّ جميع زواياه قوائم.

المعطيات: ABCD متوازي أضلاع، الزاوية A زاوية قائمة.

المطلوب: الزوايا B, C, D قوائم.



البرهان:

ميل $\overline{BC}$: $m = \dfrac{b - b}{a - 0} = 0$، ميل $\overline{CD}$: غير معرف

ميل $\overline{AD}$: $m = \dfrac{0 - 0}{a - 0} = 0$، ميل $\overline{AB}$: غير معرف

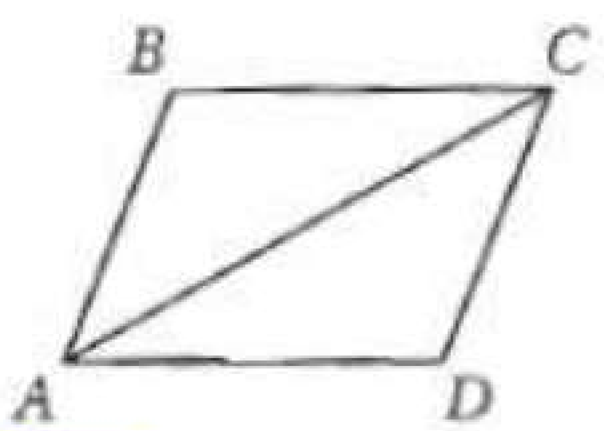
لذلك $\overline{BC} \perp \overline{AB}$, $\overline{AD} \perp \overline{CD}$, $\overline{CD} \perp \overline{BC}$.

إذن، الزوايا D, C, B قوائم.

29) **برهان:** اكتب برهانًا حرًّا للنظرية 1.10.

المعطيات: $\angle D \cong \angle B$, $\angle C \cong \angle A$

المطلوب: ABCD متوازي أضلاع.



البرهان: ارسم $\overline{AC}$ لتشكل مثلثين.

وبما أن مجموع قياسات زوايا أي مثلث يساوي 180° فإن مجموع قياسات زوايا المثلثين يساوي 360°.

إذن $m\angle A + m\angle B + m\angle C + m\angle D = 360^\circ$

وبما أن $\angle C \cong \angle A$ و $\angle D \cong \angle B$ فإن $m\angle A = m\angle C$

و $m\angle B = m\angle D$.

وبالتعويض $m\angle A + m\angle A + m\angle B + m\angle B = 360^\circ$

إذن $2\,(m\angle A) + 2\,(m\angle B) = 360^\circ$

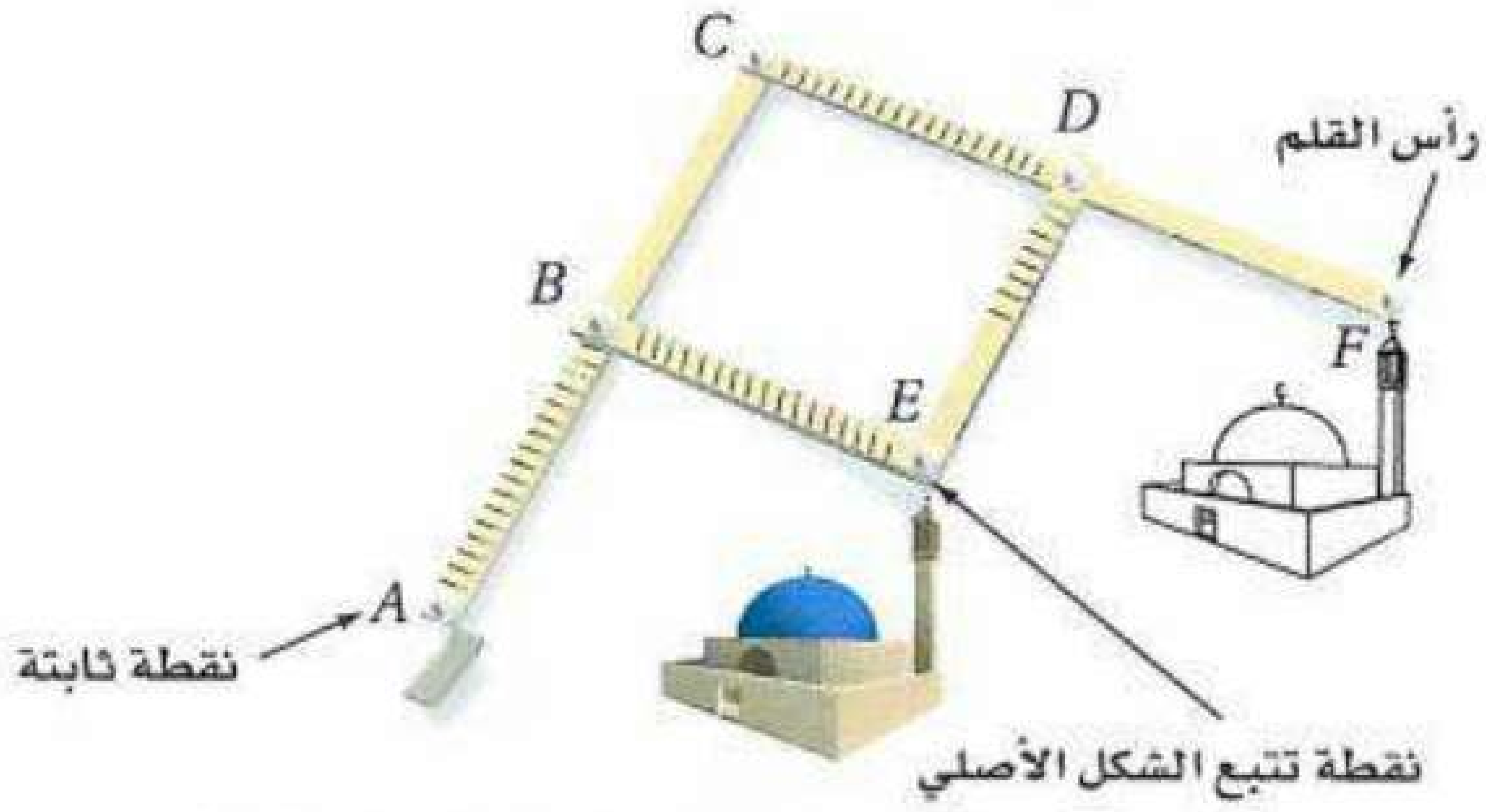
وبقسمة كلا الطرفين على 2 ينتج $m\angle A + m\angle B = 180^\circ$ لذا فإن الزاويتين المتحالفتين متكاملتان و $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$.

وبالمثل $2(m\angle A) + 2(m\angle D) = 360^\circ$ أو $m\angle A + m\angle D = 180^\circ$

إذن هاتان الزاويتان المتحالفتان متكاملتان و $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.

إذن الأضلاع المتقابلة متوازية، لذلك فالشكل ABCD متوازي أضلاع.

30) المنساخ: استعن بمعلومات الربط مع الحياة إلى اليمين والشكل أدناه.



a) إذا كان $\overline{DF} \cong \overline{DE}$, $\overline{AB} \cong \overline{CD} \cong \overline{BE}$, $\overline{AC} \cong \overline{CF}$، فاكتب برهانًا حرًّا لإثبات أنّ $\overline{CD} \parallel \overline{BE}$.

المعطيات: $\overline{DF} \cong \overline{DE}$, $\overline{AB} \cong \overline{CD} \cong \overline{BE}$, $\overline{AC} \cong \overline{CF}$

المطلوب: $\overline{CD} \parallel \overline{BE}$.

البرهان: نعلم أن $\overline{DF} \cong \overline{DE}$, $\overline{AB} \cong \overline{CD} \cong \overline{BE}$, $\overline{AC} \cong \overline{CF}$

إذن $AC = CF$ حسب تعريف التطابق

$AC = AB + BC$ و $CF = CD + DF$ (حسب مسلمة جمع القطع المستقيمة)

وبالتعويض، يكون $AB + BC = CD + DF$، وباستعمال التعويض مرة أخرى يكون $AB + BC = AB + DF$ وحسب خاصية الطرح $BC = DF$

إذن $\overline{BC} \cong \overline{DF}$ حسب تعريف التطابق، و $\overline{BC} \cong \overline{DE}$ (حسب خاصية التعدي)

وإذا كان كل ضلعين متقابلين لشكل رباعي متطابقين فإن الشكل الرباعي متوازي أضلاع. إذن BCDE متوازي أضلاع ومن تعريف متوازي الأضلاع يكون $\overline{CD}$ □ $\overline{BE}$.

b) مقياس الرسم للشكل المنسوخ هو نسبة CF إلى BE، فإذا كان $AB = 12\,\text{in}$, $DF = 8\text{in}$، وطول الشكل الأصلي $5.5\,\text{in}$، فما طول الصورة؟

$$\overline{AB} = \overline{CD},\quad \overline{AB} = 12$$

$$\overline{CD} = 12$$

$$\overline{CF} = \overline{CD} + \overline{DF}$$

$$\overline{CF} = 12 + \overline{DF}$$

$$\overline{CF} = 12 + 8 = 20$$

$$\frac{\overline{CF}}{\overline{BE}} = \frac{20}{12}$$

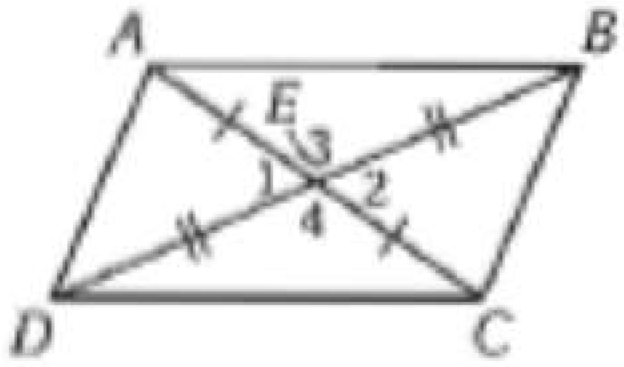
$$\frac{20}{12} = \frac{?}{5.5}$$

$$\frac{20 \times 5.5}{12} \approx 9.2\text{in}$$

31) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين للنظرية 5.11

المعطيات: $\overline{DE} \cong \overline{EB}$, $\overline{AE} \cong \overline{EC}$

المطلوب: ABCD متوازي أضلاع.



العبارات (المبررات):

1) $\overline{AE} \cong \overline{EC}$, $\overline{DE} \cong \overline{EB}$ (معطيات)

2) $\angle 1 \cong \angle 2$, $\angle 3 \cong \angle 4$ (الزاويتان المتقابلتان بالرأس متطابقتان)

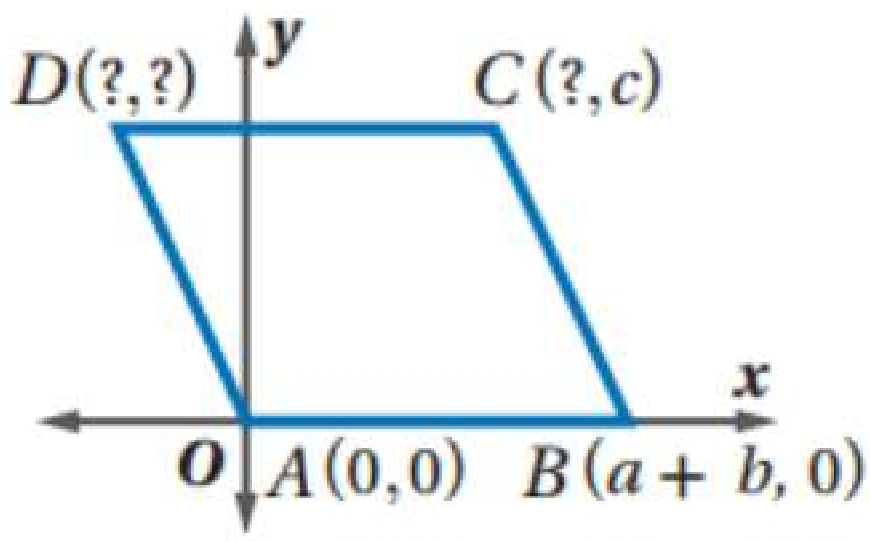
3) $\Delta ADE \cong \Delta CBE$, $\Delta ABE \cong \Delta CDE$ (SAS)

4) $\overline{AB} \cong \overline{DC}$, $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ (العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة)

5) ABCD متوازي أضلاع (إذا كان كل ضلعين متقابلين في شكل رباعي متطابقين فإنه متوازي أضلاع)

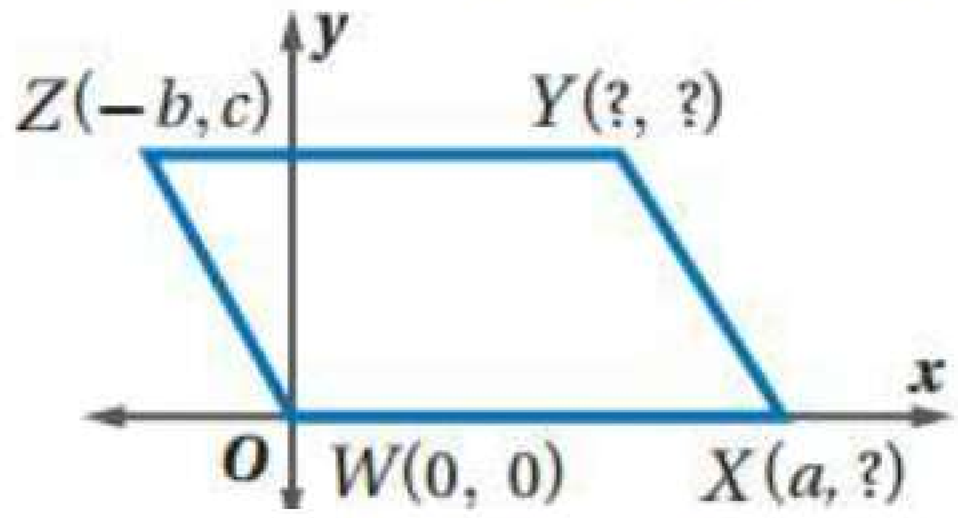
أوجد الإحداثيات المجهولة لرؤوس كل من متوازيي الأضلاع الآتيين:

32)



C (a , c) , D (- b , c)

33)



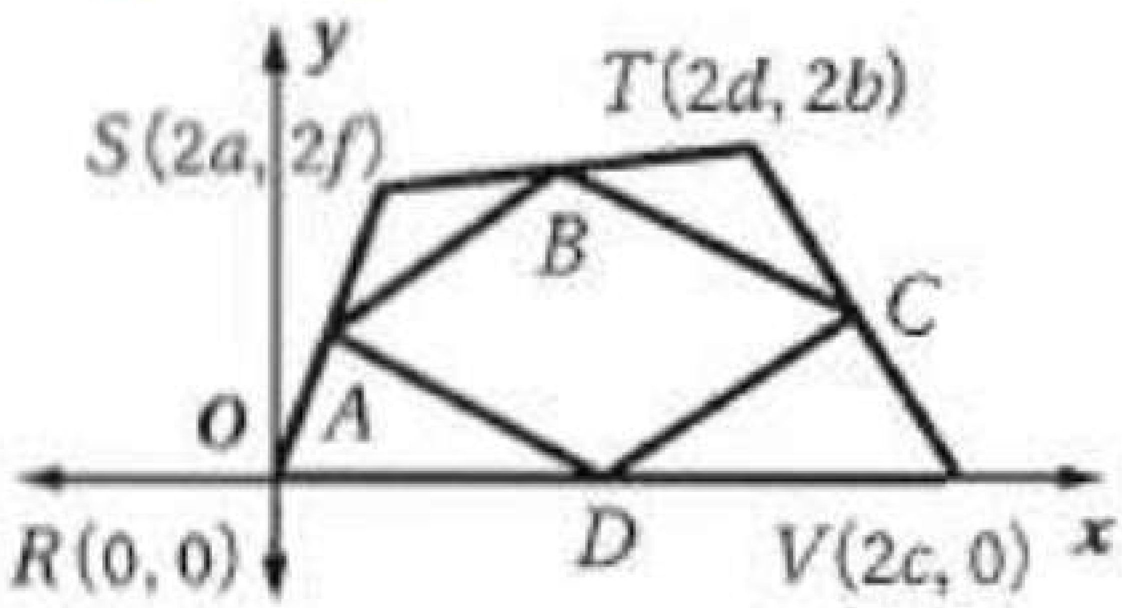
Y (a – b , c) , X (a , 0)

34) **برهان:** اكتب برهانًا إحداثيًا لإثبات أن القطع المستقيمة الواصلة بين منتصفات أضلاع أي شكل رباعي تشكّل متوازي أضلاع.

المعطيات: RSTV شكل رباعي

والنقاط A, B, C, D منتصفات الأضلاع $\overline{VR}$, $\overline{TV}$, $\overline{ST}$, $\overline{RS}$ على الترتيب.

المطلوب: ABCD متوازي أضلاع.



البرهان:

ارسم الشكل الرباعي RSTV في المستوى الإحداثي، وسِم الإحداثيات كما هو مبين في الشكل (استعمال إحداثيات من مضاعفات العدد 2 سيجعل الحسابات أسهل) ومن صيغة نقطة المنتصف تكون إحداثيات النقاط A, B, C, D هي:

$$A\left(\frac{2a}{2},\frac{2f}{2}\right)=(a\,,f)$$

$$B\left(\frac{2d+2a}{2},\frac{2f+2b}{2}\right)=(d+a,\ f+b)$$

$$C\left(\frac{2d+2c}{2},\frac{2b}{2}\right)=(d+c\,,b)$$

$$D\left(\frac{2c}{2},\frac{0}{2}\right)=(c\,,0)$$

أوجد ميل كل من $\overline{AB}$ و $\overline{DC}$.

ولأن ميلي $\overline{AB}$ و $\overline{DC}$ متساويان، فإن القطعتين المستقيمتين متوازيتان.

استعمل صيغة المسافة بين نقطتين لإيجاد $\overline{DC}$, $\overline{AB}$.

$$\overline{AB}=\sqrt{((d+a-a)^2+(f+b-f)^2)}$$

$$=\sqrt{(d^2+b^2)}$$

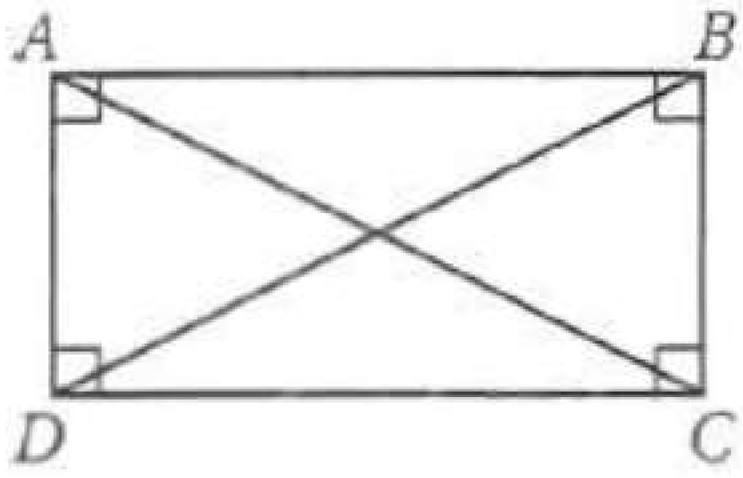
$$\overline{AB}=\sqrt{((d+c-c)^2+(b-0)^2)}$$

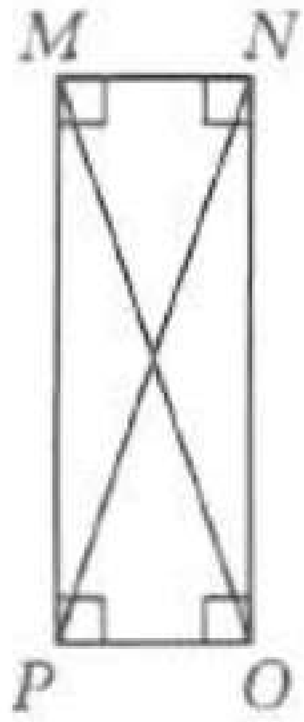
$$=\sqrt{(d^2+b^2)}$$

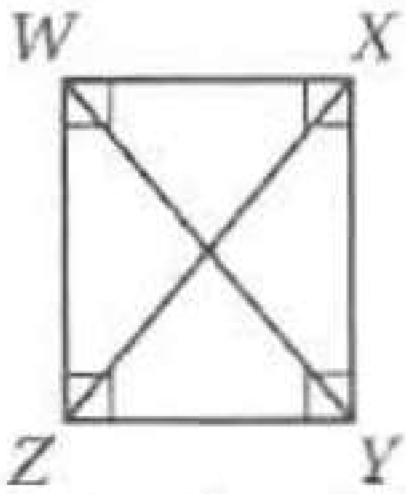
إذن $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ و $\overline{AB}\cong\overline{DC}$. لذلك ABCD متوازي أضلاع لأنه إذا كان ضلعان متقابلان في شكل رباعي متوازيين ومتطابقين فإنه متوازي أضلاع.

35) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة سوف تستقصي إحدى خصائص المستطيل.

a) **هندسيًا:** ارسم ثلاثة مستطيلات بأبعاد مختلفة وسمِّها $ABCD, MNOP, WXYZ$، ثم ارسم قطري كل منها.







b) قِس طولي قطري كل مستطيل، ثم أكمل الجدول المجاور.

المستطيل	القطر	الطول
ABCD	AC	3.3 cm
	BD	3.3 cm
MNOP	MO	2.8 cm
	NP	2.8 cm
WXYZ	WY	2.0 cm
	XZ	2.0 cm

c) **لفظيًّا:** اكتب تخمينًا حول قطري المستطيل.

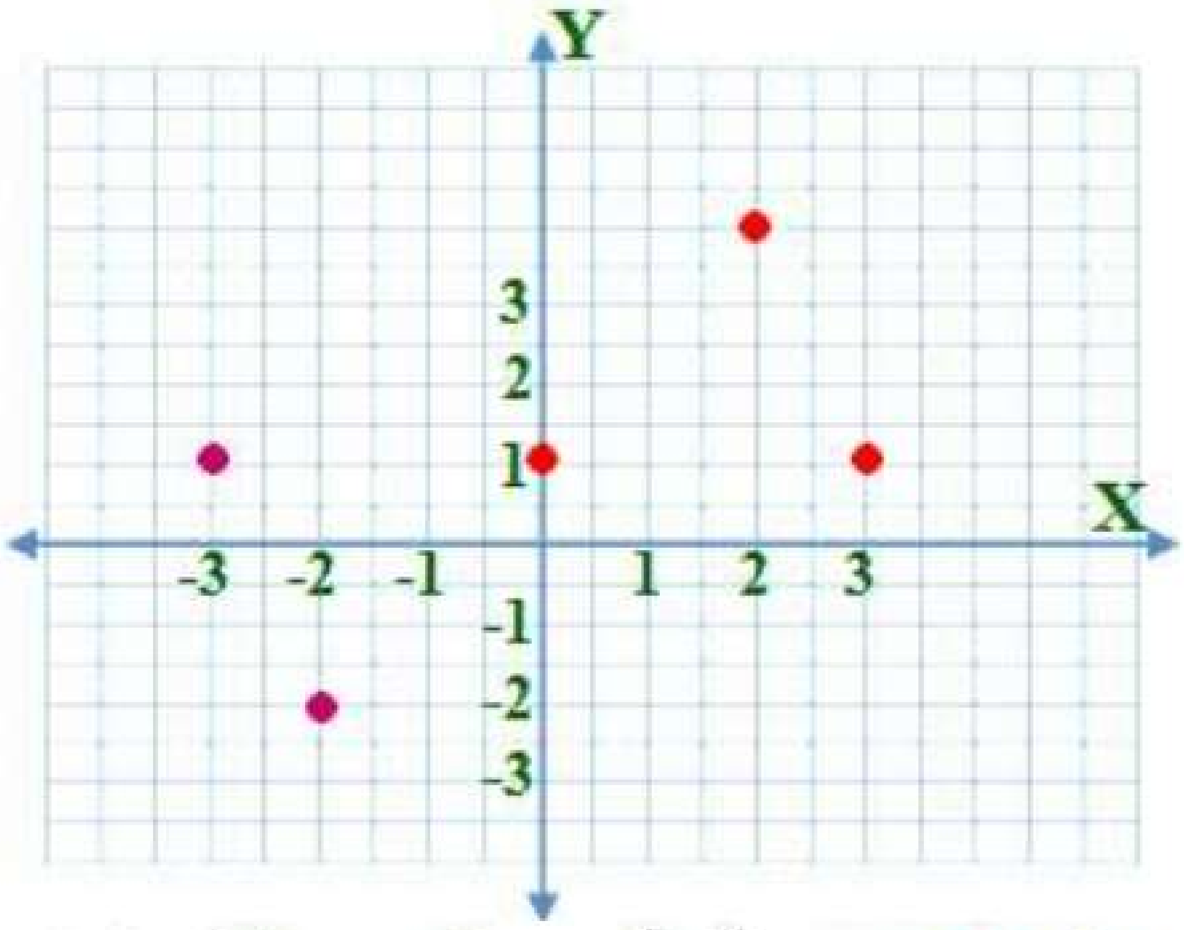
قطرا المستطيل متطابقان.

مسائل مهارات التفكير العليا:

36) **تحدٍّ:** يتقاطع قطرا متوازي أضلاع عند النقطة (0, 1). ويقع أحد رؤوسه عند النقطة (2, 4)، بينما يقع رأس آخر عند النقطة (3, 1). أوجد موقعي الرأسين الآخرين.

قطرا متوازي الأضلاع ينصف كل منهما الأخر

$$(-2,-2),(-3,1)$$



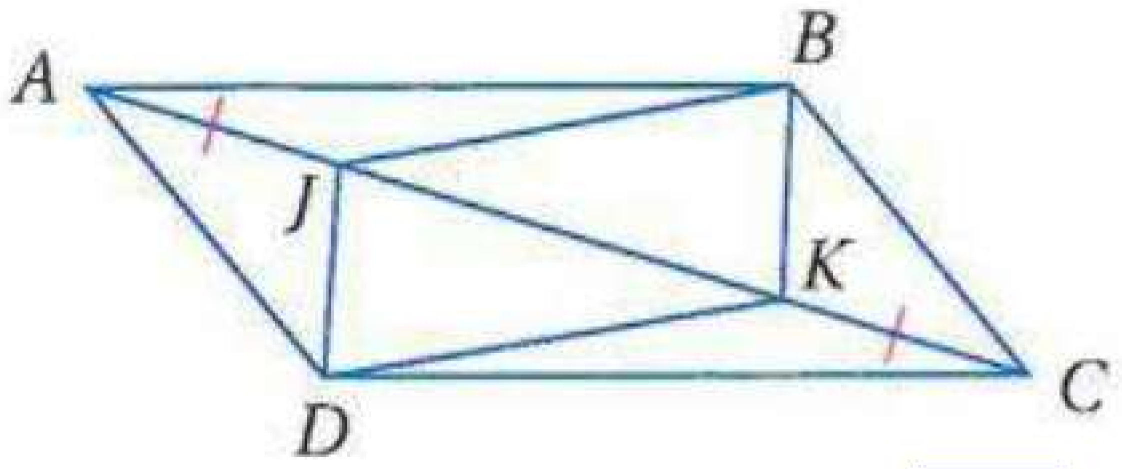
37) **اكتب:** بيِّن أوجه الشبه والاختلاف بين النظريتين 5.9 و 5.3 .

النظريتان إحداهما عكس الأخرى
فرضية النظرية 1.3 "الشكل متوازي الأضلاع"
وفرضية النظرية 1.9 "الأضلاع المتقابلة في الشكل الرباعي متطابقة".
نتيجة النظرية 1.3 الأضلاع المتقابلة متطابقة ونتيجة النظرية 1.9 الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

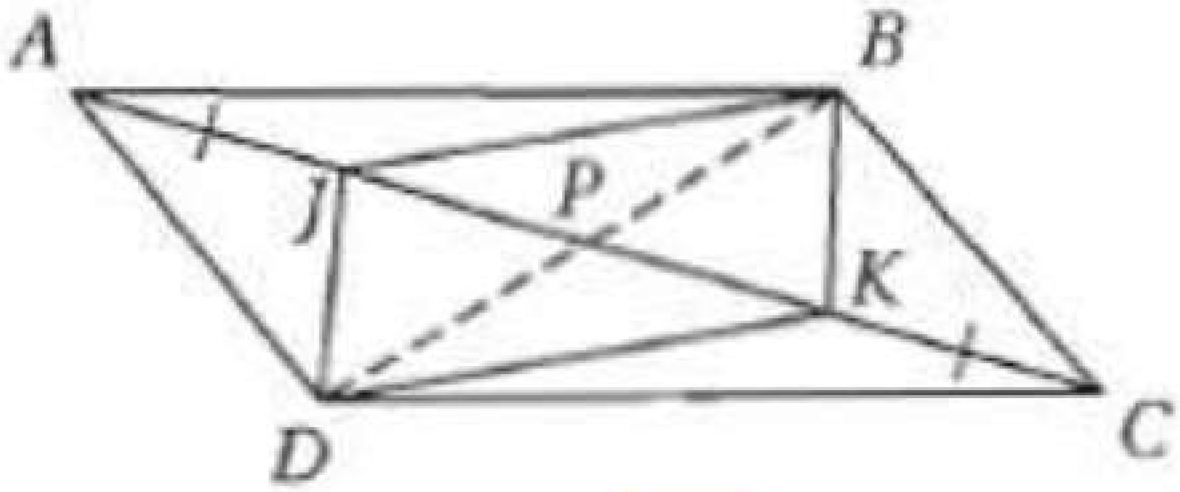
38) **تبرير:** إذا كانت الزوايا المتناظرة في متوازيي أضلاع متطابقة، فهل يكون متوازيا الأضلاع متطابقين أحيانًا، أم دائمًا، أم لا يكونان متطابقين أبدًا؟

أحياناً؛ يمكن أن يكون متوازيا الأضلاع متطابقين، إلا أنه يمكنك أيضاً جعل متوازي الأضلاع أكبر أو أصغر بتغيير أطوال الأضلاع ودون تغيير قياسات الزوايا.

39) **تحدٍّ:** في الشكل المجاور، $ABCD$ متوازي أضلاع، $\overline{AJ} \cong \overline{KC}$.
بيّن أن الشكل الرباعي $JBKD$ متوازي أضلاع.



المعطيات: ABCD متوازي أضلاع و $\overline{KC} \cong \overline{AJ}$.
المطلوب: JBKD متوازي أضلاع.



البرهان: ارسم $\overline{DB}$.
بما أن ABCD متوازي أضلاع، فإن القطرين $\overline{DB}$ و $\overline{AC}$ ينصف كل منهما الآخر حسب النظرية 1.7. سمِ نقطة تقاطعهما P.
ومن تعريف نقطة المنتصف يكون $\overline{PC} \cong \overline{AP}$ ، إذن $AP = PC$.
وحسب مسلمة جمع القطع المستقيمة فإن
$AP = AJ + JP \ , PC = PK + KC$ وبالتعويض
$AJ + JP = PK + KC$ وبما أن $\overline{KC} \cong \overline{AJ}$ ، فإن $AJ = KC$ حسب تعريف التطابق.
$KC + JP = PK + KC$
وبالتعويض $KC + JP = PK + KC$ ومن خاصية الطرح يكون $JP = PK$.
إذن ومن تعريف التطابق تكون
$\overline{PK} \cong \overline{JP}$ إذن P نقطة منتصف $\overline{JK}$.
وبما أن $\overline{JK}$ و $\overline{DB}$ تنصف كل منهما الأخرى.
وهما قطران للشكل الرباعي JBKD، فحسب النظرية 1.11 يكون الشكل الرباعي JBKD متوازي أضلاع.

40) **اكتب:** استعمل العبارات الشرطية الثنائية "إذا وفقط إذا" في دمج كل من النظريات: 5.9 وَ 5.10 وَ 5.11 وَ 5.12 وعكسها.

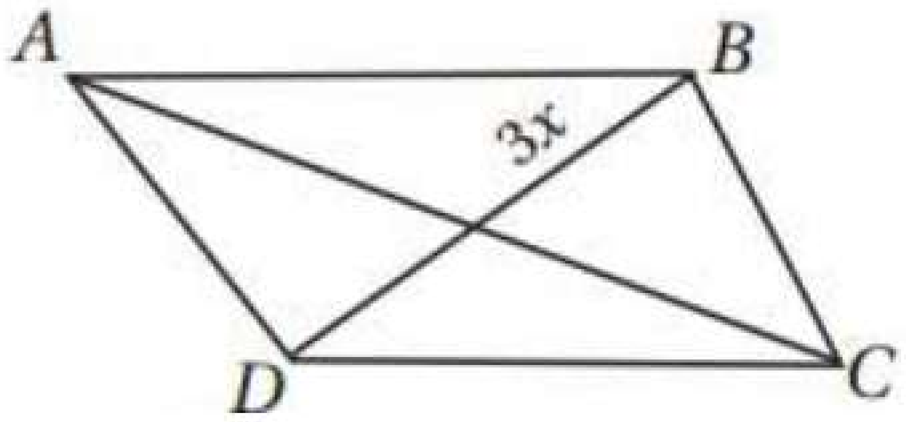
يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع إذا أمكنك بيان أن:
كل ضلعين متقابلين متطابقان أو متوازيان، أو كل زاويتين متقابلتين متطابقتان، أو القطران ينصف كل منهما الآخر، أو ضلعان متقابلان متطابقان ومتوازيان.

تدريب على الاختبار المعياري

41) إذا كان الضلعان AB, DC في الشكل الرباعي $ABCD$ متوازيين، فأيّ المعطيات الآتية كافية لإثبات أنّ $ABCD$ متوازي أضلاع؟

B : $\overline{AB} \cong \overline{DC}$

42) **إجابة قصيرة:** في الشكل الرباعي $ABCD$ أدناه، إذا كان $AC = 40$, $BD = \frac{3}{5} AC$، $\overline{BD}$ تنصّف $\overline{AC}$، فما قيمة x التي تجعل $ABCD$ متوازي أضلاع؟



$$DB = \frac{3}{5} AC$$

$$DB = \frac{3}{5} \times 40$$

$$DB = 24$$

$$3x = \frac{24}{2} = 12$$

$$x = 12 \div 3 = 4$$

موقع حلول كتبي

مراجعة تراكمية

هندسة إحداثية : أوجد إحداثي نقطة تقاطع قطري متوازي الأضلاع $ABCD$ في كل من السؤالين الآتيين (الدرس 2-1)

43) $A(-3, 5), B(6, 5), C(5, -4), D(-4, -4)$

بما أن قطري متوازي الأضلاع ينصف كلا منهما الآخر، فإن نقطة تقاطعهما هي نقطة منتصف كل من $\overline{BD}$, $\overline{AC}$. أوجد نقطة منتصف $\overline{AC}$ التي طرفاها

$(-3،5), (5 \ -4)$

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) = \left(\frac{-3+5}{2}, \frac{5-4}{2}\right)$$ (صيغة نقطة المنتصف)

$= (1،0.5)$ (بالتبسيط)

إذن إحداثيا نقطة تقاطع قطري RSTU هما $(1،0.5)$

44) $A(2, 5), B(10, 7), C(7, -2), D(-1, -4)$

بما أن قطري متوازي الأضلاع ينصف كلا منهما الآخر، فإن نقطة تقاطعهما هي نقطة منتصف كل من $\overline{BD}$, $\overline{AC}$. أوجد نقطة منتصف $\overline{AC}$ التي طرفاها

$(2،5), (7 \ -2)$

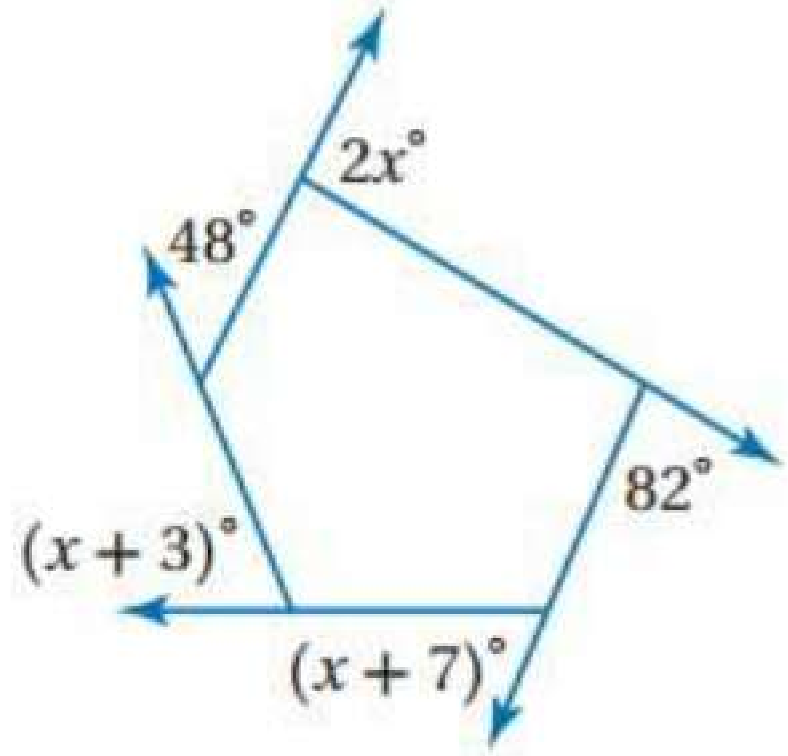
$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) = \left(\frac{2+7}{2}, \frac{5-2}{2}\right)$$ (صيغة نقطة المنتصف)

$= (4.5،1.5)$ (بالتبسيط)

إذن إحداثيا نقطة تقاطع قطري RSTU هما $(4.5،1.5)$

أوجد قيمة x فِي كل من الأسئلة الآتية : (الدرس 1-1)

(45



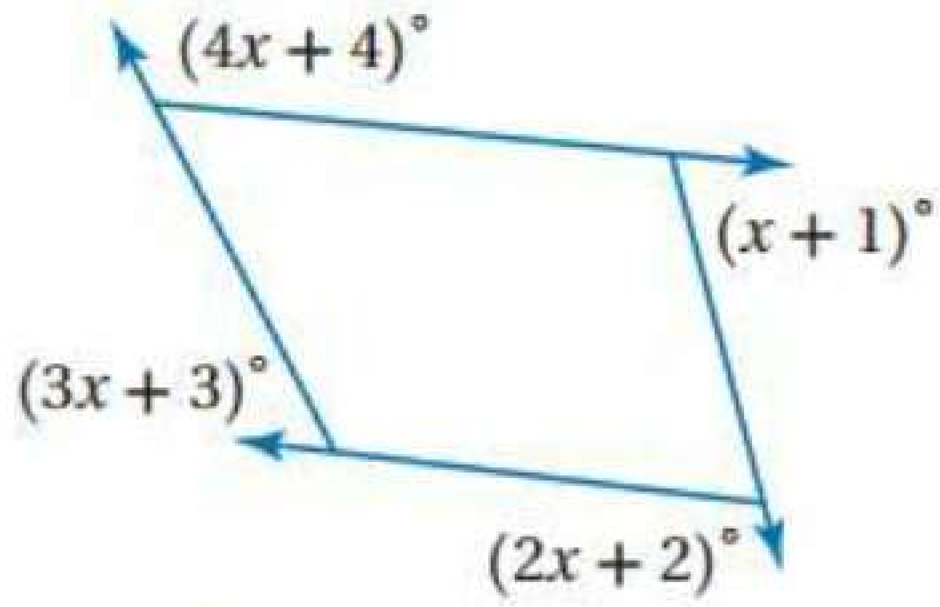
$$2x+(x+3)+(x+7)+82+48=360^\circ$$

$$4x+140=360$$

$$4x=220$$

$$x=55$$

(46

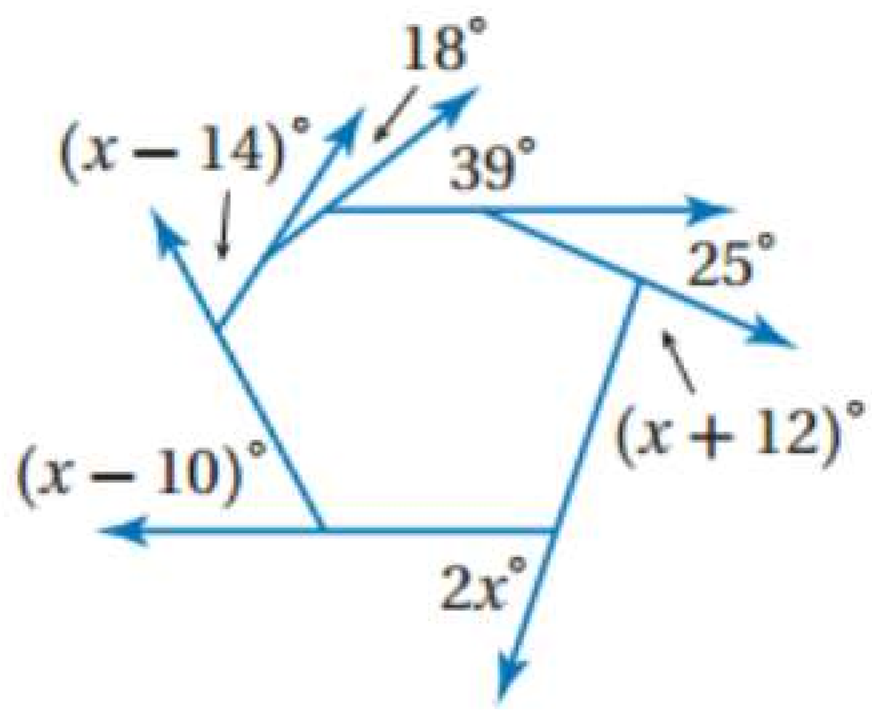


$$(4x+4)+(x+1)+(2x+2)+(3x+3)=360^\circ$$

$$10x=360-10$$

$$x=35$$

(47



$$(x-14)+18+39+25+(x+12)+2x+(x-10)=360^{\circ}$$

$$5x+70=360$$

$$5x=360-70=290$$

$$x=58$$

أوجد عدد أضلاع المضلع المنتظم المعطى قياس إحدى زواياه الداخلية في كل مما يأتي: (الدرس 1-1)

140° (48

$$140n=(n-2).180$$

$$140n=180n-360$$

$$140n-180n=-360$$

$$-40n=-360$$

$$n=259$$

160° (49

$$160n=(n-2).180$$

$$160n=180n-360$$

$$160n-180n=-360$$

$$-20n=-360$$

$$n=18$$

168° (50

$$168n=(n-2).180$$

$$168n=180n-360$$

$$-180n+168n=-360$$

$$-12n=-360$$

$$n=30$$

162° (51

$$162n = (n-2).180$$
$$162n = 180n - 360$$
$$-180n + 162n = -360$$
$$-18n = -360$$
$$n = 20$$

استعد للدرس اللاحق

استعمل الميل لتحديد ما إذا كان XY, YZ متعامدتين أم لا في كل مما يأتي:

$X(-2, 2), Y(0, 1), Z(4, 1)$ (52

ميل $\overline{XY} = \frac{-2-0}{2-1} = \frac{-2}{1} = -2$

ميل $\overline{YZ} = \frac{4-0}{1-1} = \frac{4}{0}$

غير متعامدتين لأن حاصل ضرب ميل كل منهم لا يساوي -1

$X(4, 1), Y(5, 3), Z(6, 2)$ (53

ميل $\overline{XY} = \frac{4-5}{1-3} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$

ميل $\overline{YZ} = \frac{5-6}{3-2} = \frac{-1}{1} = -1$

غير متعامدتين لأن حاصل ضرب ميل كل منهم لا يساوي -1

اختبار منتصف الفصل

أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة في كل من المضلعات المحدبة الآتية : (الدرس 1-1)

1) الخماسي

$n = 5$

$(n-2).180 = (5-2).180^\circ = 540^\circ$

2) السباعي

$n = 7$

$(n-2).180 = (7-2).180^\circ = 900^\circ$

3) ذو 18 ضلعًا

$n = 18$

$(n-2).180 = (18-2).180^\circ = 2880^\circ$

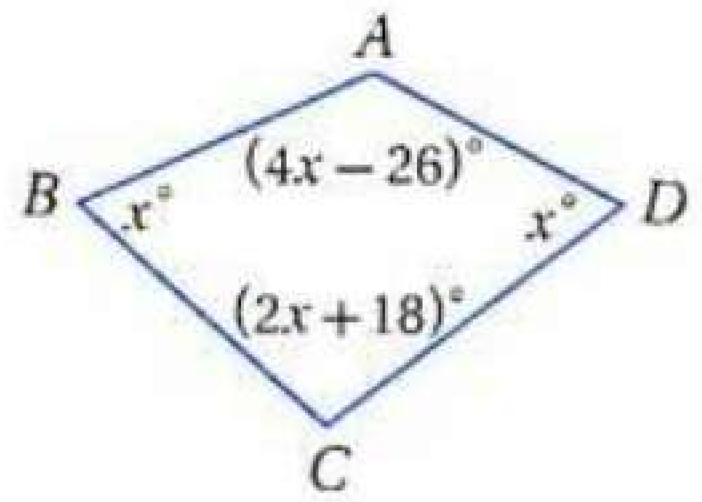
4) ذو 23 ضلعًا

$n = 23$

$(n-2).180 = (23-2).180^\circ = 3780^\circ$

أوجد قياسات جميع الزوايا الداخلية في كل من المضلعين الآتيين: (الدرس 1-1)

(5



$$(4x-26+x+x+2x+18)=360^\circ$$

$$8x-8=360$$

$$x=46$$

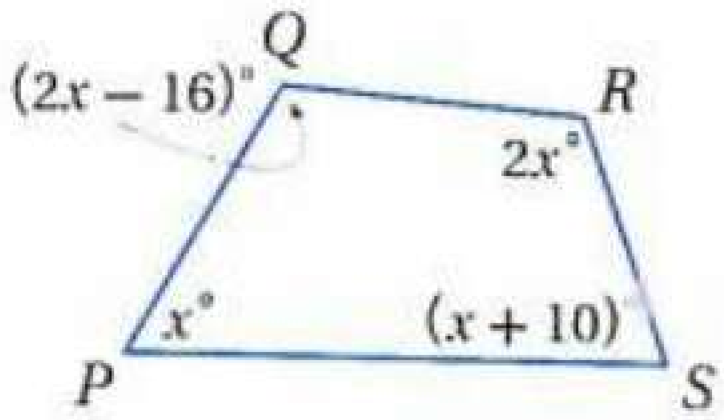
$$m\angle A=4\times 46-26=158^\circ$$

$$m\angle C=2\times 46+18=110^\circ$$

$$m\angle B=46^\circ$$

$$m\angle D=46^\circ$$

(6



$$(2x-16+2x+x+x+10)=360^\circ$$

$$6x-6=360$$

$$x=61$$

$$m\angle Q=2x-16=2\times 61-16=106^\circ$$

$$m\angle R=2\times 61=122^\circ$$

$$m\angle P=61^\circ$$

$$m\angle S=x+10=61+10=71^\circ$$

أوجد عدد أضلاع المضلع المنتظم المعطى مجموع قياسات زواياه الداخلية في كل مما يأتي :

(الدرس 1-1)

7) 720°

$$720 = (n-2).180$$
$$720 = 180n - 360$$
$$720 + 360 = 180n$$
$$n = 6$$

8) 1260°

$$1260 = (n-2).180$$
$$1260 = 180n - 360$$
$$1260 + 360 = 180n$$
$$n = 9$$

9) 1800°

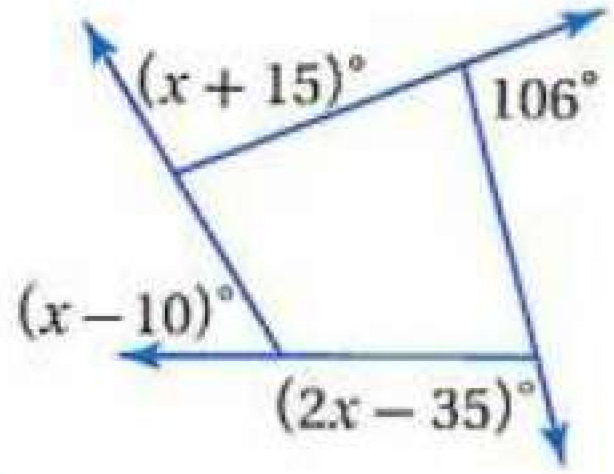
$$1800 = (n-2).180$$
$$1800 = 180n - 360$$
$$1800 + 360 = 180n$$
$$n = 12$$

10) 4500°

$$4500 = (n-2).180$$
$$4500 = 180n - 360$$
$$4500 + 360 = 180n$$
$$n = 27$$

أوجد قيمة x في كل من الشكلين الآتيين : (الدرس 1-1)

(11

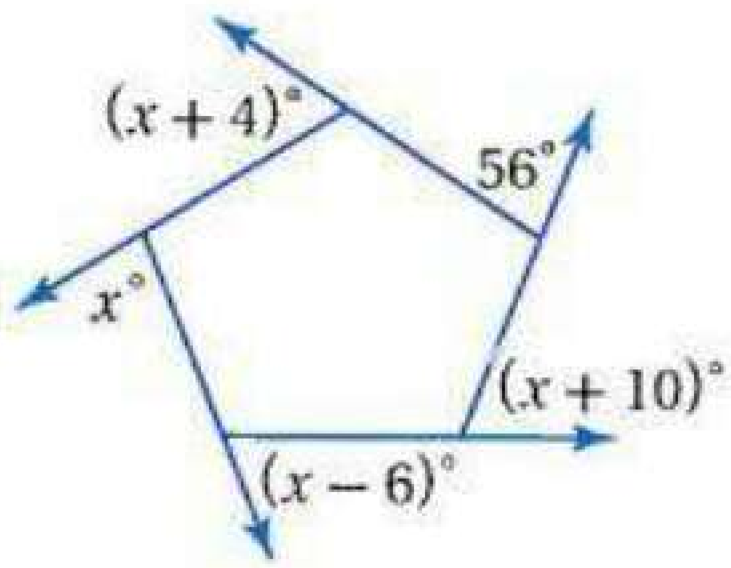


$$(x+15)+106+(x-10)+(2x-35)=360$$

$$4x+76=360$$

$$x=71$$

(12

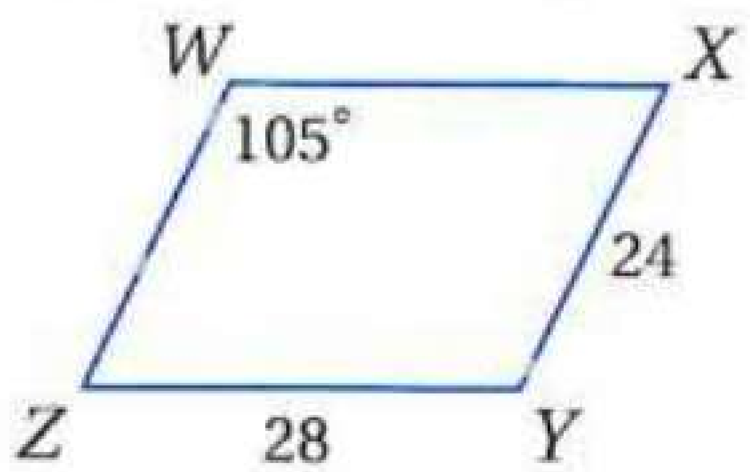


$$(x+4)+56+(x+10)+(x-6)+x=360$$

$$4x+64=360$$

$$x=74$$

استعمل $\square WXYZ$ لإيجاد كل مما يأتي : (الدرس 1-2)



$m\angle WZY$ (13

$$105^\circ+\angle WZY=180^\circ$$

$$\angle WZY=180^\circ-105^\circ$$

$$\angle WZY=75^\circ$$

14) WZ

$WZ = XY = 24$

15) $m\angle XYZ$

$\angle XYZ = \angle ZWX = 105^\circ$

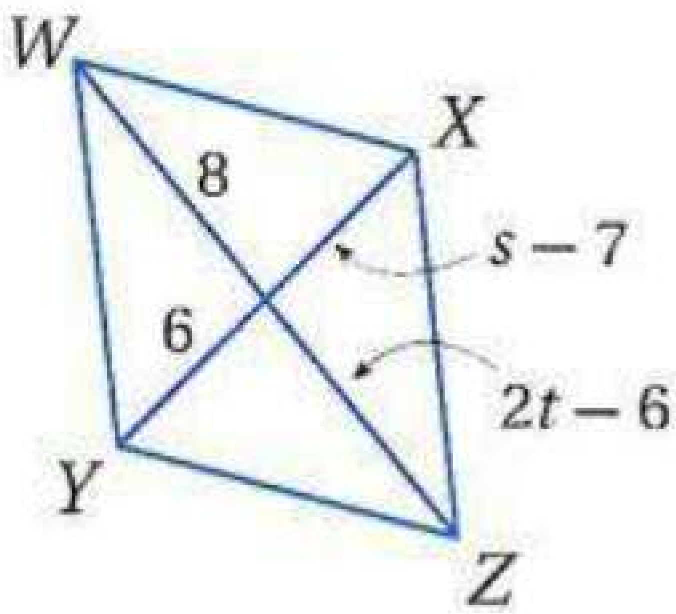
16) **إنارة:** استعمل مقبض الإنارة العلوي الذي يشكل متوازي أضلاع في إيجاد $m\angle p$ في $\square PQRS$. (الدرس 2-5)

$\angle P$ و $\angle S$ زاويتان متكاملتان

$\angle P = 180 - 64 = 116^\circ$

جبر: أوجد قيم المتغيرات في كل من متوازيي الأضلاع الآتيين : (الدرس 2-1)

17)



$s - 7 = 6$

$s = 6 + 7$

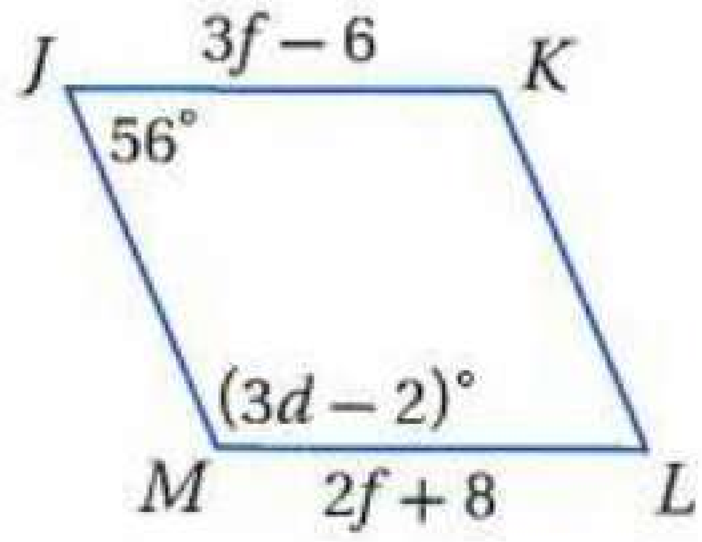
$s = 13$

$2t - 6 = 8$

$2t = 6 + 8$

$t = 7$

18)

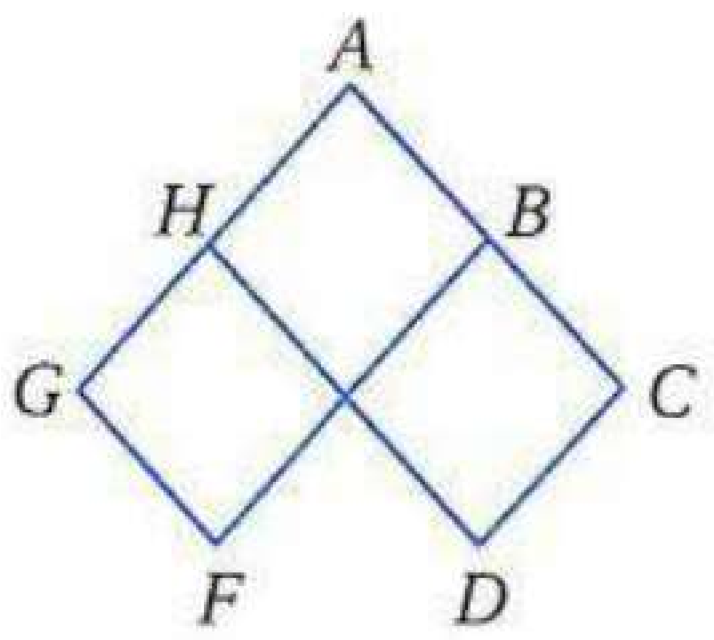


$$3f - 6 = 2f + 8$$
$$3f - 2f = 8 + 6$$
$$f = 14$$
$$56 + (3d - 2) = 180$$
$$54 + 3d = 180$$
$$3d = 180 - 54$$
$$3d = 126$$
$$d = 42$$

19) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين. (الدرس 2-1)

المعطيات: $\square HACD$ ، $\square GFBA$

المطلوب: $\angle F \cong \angle D$



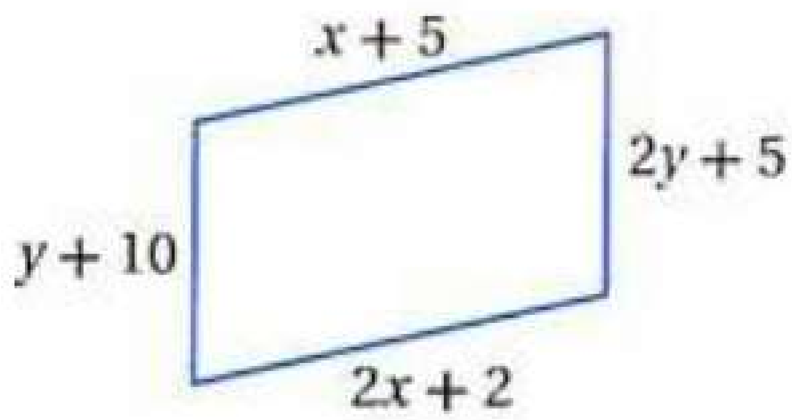
البرهان: العبارات (المبررات):

1) متوازيا الأضلاع GFBA, HACD. (معطيات)

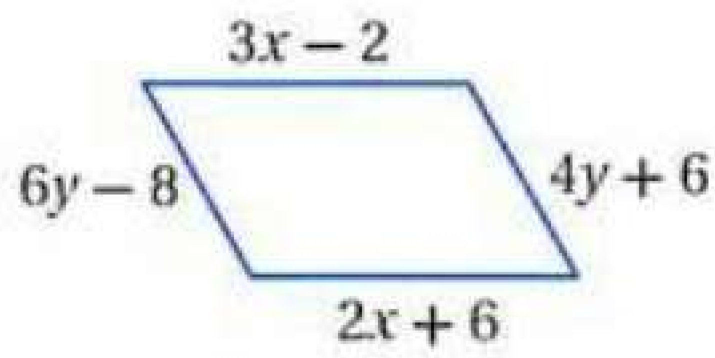
2) $\angle F \cong \angle A$, $\angle A \cong \angle D$ (الزوايا المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة)

3) $\angle F \cong \angle D$ (خاصية التعدي)

أوجد قيمتي x , y في كل مما يأتي بحيث يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع : (الدرس 3-1)

20) 

$$x + 5 = 2x + 2$$
$$2x - x = 5 - 2$$
$$x = 3$$
$$y + 10 = 2y + 5$$
$$y = 10 - 5$$
$$y = 5$$

21) 

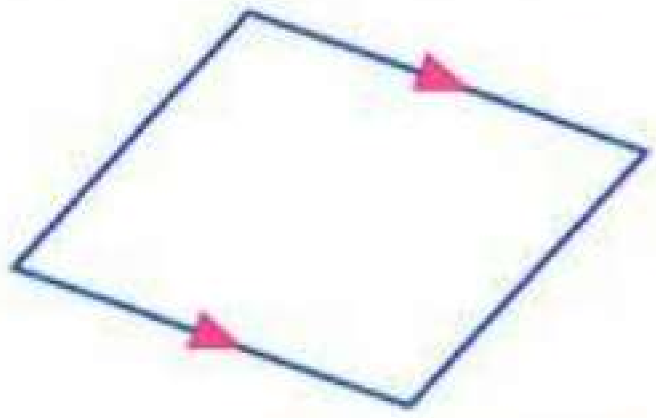
$$3x - 2 = 2x + 6$$
$$3x - 2x = 6 + 2$$
$$x = 8$$
$$4y + 6 = 6y - 8$$
$$6y - 4y = 6 + 8$$
$$2y = 14$$
$$y = 7$$

22) **طاولات:** لماذا يبقى سطح طاولة كي الثياب في الصورة أدناه موازيًا لأرضية الغرفة دائمًا؟

عُمل الساقان بحيث ينصف كل منهما الآخر،
إذن فالشكل الرباعي المتكون من أطراف الساقين يكون دائماً متوازي الأضلاع.
لذلك فسطح الطاولة العلوي يبقى موازياً لسطح الأرض.

23) **اختيار من متعدد:** أيّ الأشكال الرباعية الآتية ليس متوازي أضلاع؟ (الدرس 3-1)

D



هندسة إحداثيّة: حدد ما إذا كان الشكل الرباعي المعطاة إحداثيات رؤوسه في كل مما يأتي متوازي أضلاع؟ برّر إجابتك باستعمال الطريقة المحددة في السؤال. (الدرس 3-1)

24) $A(-6, -5), B(-1, -4), C(0, -1), D(-5, -2)$، صيغة المسافة بين نقطتين.

نعم؛ يجب أن يكون كل ضلعين متقابلين متطابقين.

المسافة بين A و B تساوي $\sqrt{26}$. والمسافة بين B وC تساوي $\sqrt{10}$.

والمسافة بين C وD تساوي $\sqrt{26}$. والمسافة بين D و A تساوي $\sqrt{10}$.

وبما أن كل ضلعين متقابلين متطابقان، فإن ABCD متوازي أضلاع.

حيث أن المسافة بين نقطتين تحسب من خلال $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

25) $Q(-5, 2), R(-3, -6), S(2, 2), T(-1, 6)$، صيغة الميل.

ميل $\overline{QR}$: $\frac{-5+3}{2+6} = \frac{-2}{8} = \frac{-1}{4}$

ميل $\overline{RS}$: $\frac{-3-2}{-6-2} = \frac{-5}{-8} = \frac{5}{8}$

ميل $\overline{ST}$: $\frac{2+1}{2-6} = \frac{3}{-4}$

ميل $\overline{OT}$: $\frac{-2+1}{4+1} = \frac{-1}{5}$

بما أن ميل $\overline{QR}$ لا يساوي ميل $\overline{ST}$، فإن QRST ليس متوازي أضلاع.

5-4

المستطيل

تحقق

1A) إذا كان $TS = 120$ ، فأوجد PR.

$TS = 120$ معطى

$QS = 120 \times 2 = 240$ قطرا المستطيل ينصف كل منهما الأخر

$QS = PR = 240$ من خصائص المستطيل القطران متطابقان

1B) إذا كان $m\angle PRS = 64^\circ$، فأوجد $m\angle SQR$.

الزوايا الأربع قوائم للمستطيل

إذن $\angle SRQ = 90^\circ$

$\angle QRT = \angle SQR = 90^\circ - 64^\circ = 26^\circ$

2) استعن بالشكل في المثال 2. إذا كان $MK = 5y + 1$, $JP = 3y - 5$، فأوجد قيمة y.

قطرا المستطيل متطابقان وينصف كل منهما الأخر

$MK = LJ$

$MK = (JP + PL)$

$\because JP = PL$

$\therefore MK = 2(JP)$

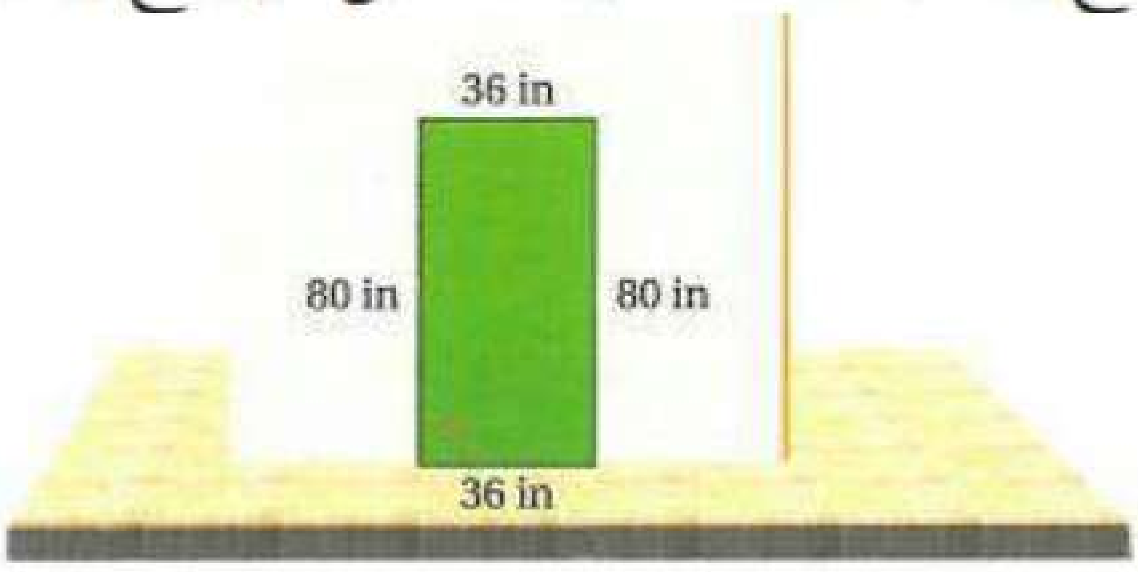
$5y + 1 = 2(3y - 5)$

$5y + 1 = 6y - 10$

$6y - 5y = 1 + 10$

$y = 11$

3) **تصميم:** بالرجوع إلى فقرة "لماذا؟" بداية الدرس. قاس أحمد أبعاد المنطقة التي قام بطلائها كما في الشكل أدناه. وباستعمال زاوية النجارين تحقق من أن الزاوية عند الركن الأيسر السفلي قائمة. فهل يمكنه استنتاج أن المنطقة مستطيلة الشكل؟ وضِّح إجابتك.



نعم؛ بما أن الأضلاع المتقابلة متطابقة، فإن المنطقة التي قام بطلائها تشكل متوازي أضلاع. وإذا كانت إحدى زوايا متوازي أضلاع قائمة فإن جميع الزوايا قائمة.
وبما أن الزاوية السفلى إلى اليسار قائمة فإن جميع الزوايا قائمة، لذلك وحسب التعريف، يكون المدخل مستطيلاً.

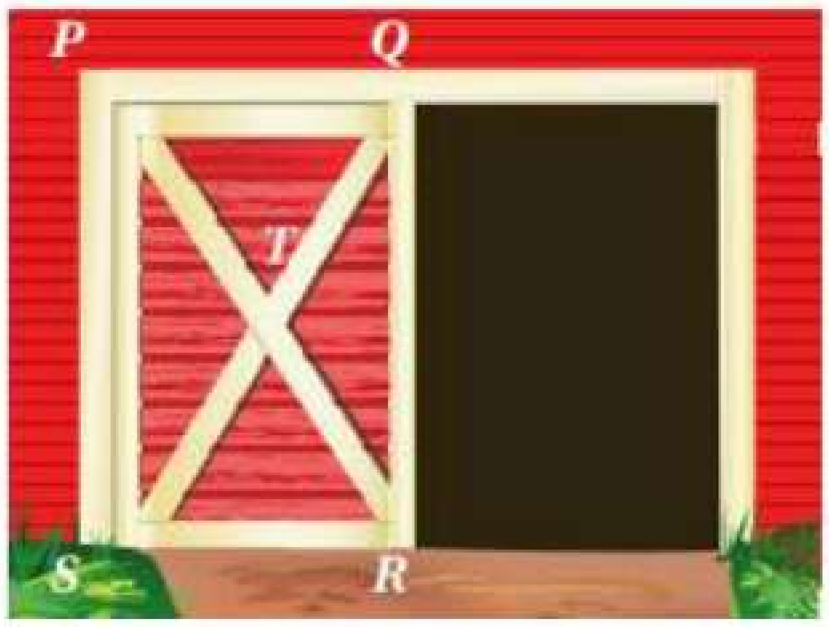
4) إذا كانت إحداثيات رؤوس الشكل الرباعي $JKLM$ هي $K(-8, -6), L(5, -3), M(2, 5)$ ، $J(-10, 2)$. فهل $JKLM$ مستطيل؟ استعمل صيغة الميل.

ميل $\overline{JK}$: $\frac{-10+8}{2+6} = \frac{-2}{8} = \frac{-1}{4}$

ميل $\overline{ML}$: $\frac{5-2}{-3-5} = \frac{3}{-8}$

بما أن ميل $\overline{JK}$ لا يساوي ميل $\overline{ML}$، أي أنهما غير متوازيان إذن JKLM ليس مستطيل.

تأكد:



زراعة: الشكل المجاور يبيّن بوّابة مخزن حبوب مستطيلة الشكل، فيها الدعامتان المتقاطعتان تقويان دقة البوّابة، وتحفظانها من الالتواء مع مرور الزمن.

إذا كان $PS = 7$ ft, $ST = 3\frac{13}{16}$ ft, $m\angle PTQ = 67°$،

1) QR

(الضلعان المتقابلان في المستطيل متطابقان)

$$PS = QR = 7ft$$

2) SQ

$$SQ = (ST + TQ)$$
$$ST = TQ$$
$$SQ = 2ST$$
$$SQ = 2 \times 3\frac{13}{16}$$
$$SQ = 2 \times \frac{61}{16}$$
$$SQ = 7\frac{5}{8}ft$$

3) $m\angle TQR$

$\because \angle PTQ = 67$

$\because TQ = PT$

$\therefore \angle TPQ = \angle TQP = \dfrac{180-67}{2} = 56.5^\circ$

$\therefore \angle TQR = 90^\circ - 56.5^\circ$

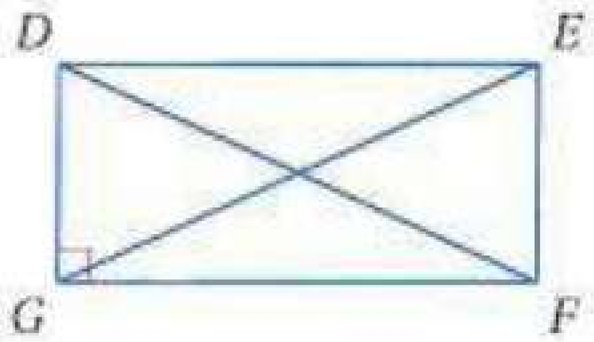
$\therefore \angle TQR = 33.5^\circ$

4) $m\angle TSR$

$\therefore \angle STR = \angle PTQ = 67^\circ$

$\therefore \angle TSR = \dfrac{180^\circ - 67^\circ}{2}$

$\therefore \angle TSR = 56.5^\circ$



جبر: استعن بالمستطيل $DEFG$ المبين جانبًا.

5) إذا كان $EG = x + 5$, $FD = 3x - 7$، فأوجد EG .

قطرا المستطيل متطابقان

$EG = FD$

$x + 5 = 3x - 7$

$3x - x = 5 + 7$

$2x = 12$

$x = 6$

$EG = x + 5 = 6 + 5 = 11$

6) إذا كان $m\angle DFG = (x + 12)^\circ$, $m\angle EFD = (2x - 3)^\circ$، فأوجد $m\angle EFD$.

$\angle DFG + \angle DFE = 90^\circ$

$(x + 12) + (2x - 3) = 90^\circ$

$3x + 9 = 90$

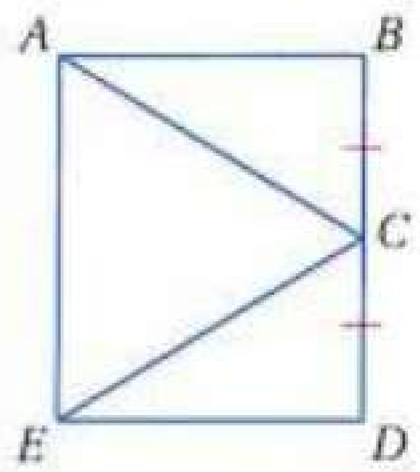
$3x = 81$

$x = 27$

$m\angle EFD = 2x - 3 = 2 \times 27 - 3$

$m\angle EFD = 51^\circ$

7) **برهان:** إذا كان $ABDE$ مستطيلًا، و $\overline{BC} \cong \overline{DC}$، فأثبت أنّ $\overline{AC} \cong \overline{EC}$.



المعطيات: $ABDE$ مستطيل، $\overline{BC} \cong \overline{DC}$.

المطلوب: $\overline{AC} \cong \overline{EC}$

البرهان: العبارات (المبررات):

1) $ABDE$ مستطيل، $\overline{BC} \cong \overline{DC}$. (معطيات)

2) $ABDE$ متوازي أضلاع. (تعريف المستطيل)

3) $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ (الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة)

4) $\angle B$ و $\angle D$ قائمتان. (تعريف المستطيل)

5) $\angle B \cong \angle D$ (جميع الزوايا القائمة متطابقة)

6) $\Delta ABC \cong \Delta EDC$ (SAS)

7) $\overline{AC} \cong \overline{EC}$ (العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة)

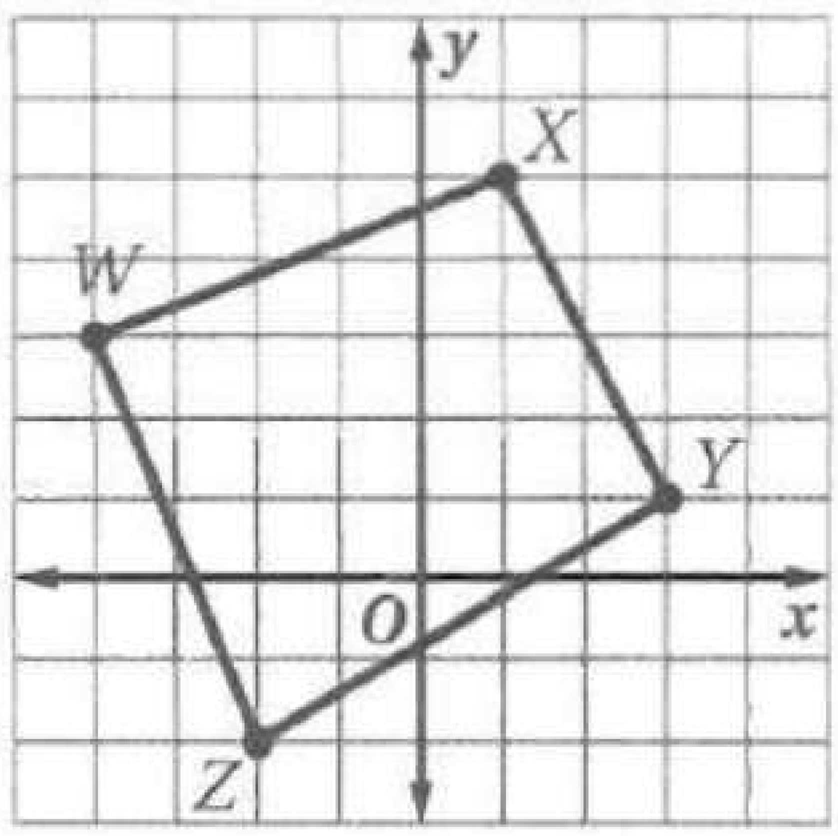
هندسة إحداثيّة: مثّل في المستوى الإحداثي الشكل الرباعي المعطاة إحداثيات رؤوسه في كل من السؤالين الآتيين، وحدد ما إذا كان مستطيلًا أم لا. برّر إجابتك باستعمال الطريقة المحددة في السؤال.

8) $W(-4, 3), X(1, 5), Y(3, 1), Z(-2, -2)$ ، صيغة الميل.

ميل $\overline{WX}$: $\dfrac{-4-1}{3-5} = \dfrac{-5}{-2} = \dfrac{5}{2}$

ميل $\overline{YZ}$: $\dfrac{3+2}{1+2} = \dfrac{5}{3}$

بما أن ميل $\overline{WX}$ لا يساوي ميل $\overline{YZ}$، أي أنهما غير متوازيان إذن WXYZ ليس متوازي أضلاع لذلك WXYZ ليس مستطيل.



9) $A(4, 3), B(4, -2), C(-4, -2), D(-4, 3)$ ، صيغة المسافة.

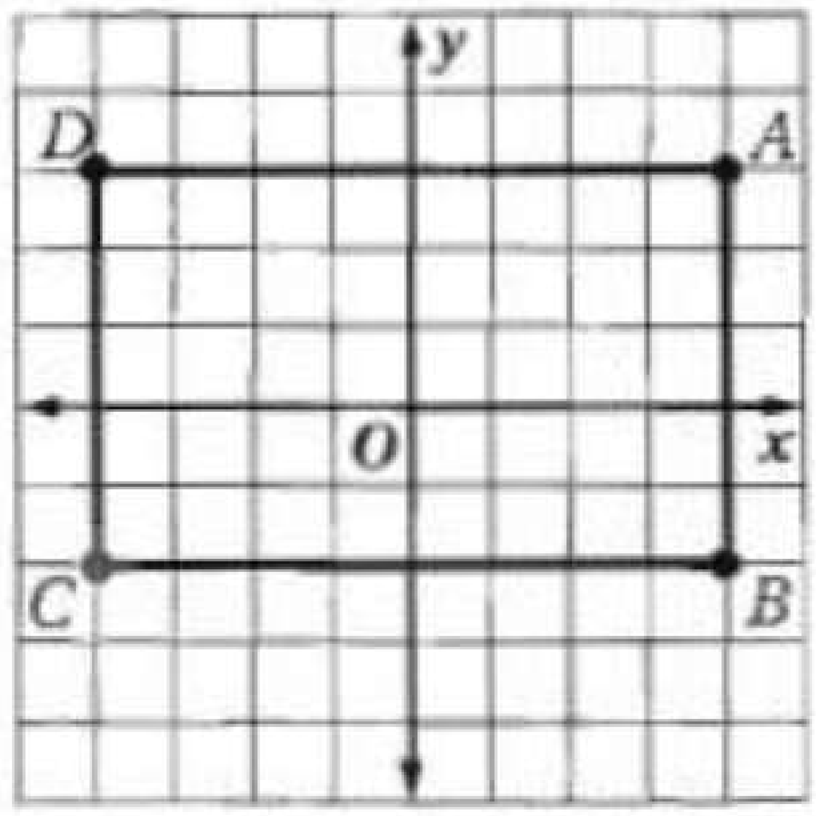
$$AB = \sqrt{(4-4)^2 (3+2)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$BC = \sqrt{(4+4)^2 (-2+2)^2} = \sqrt{64} = 8$$

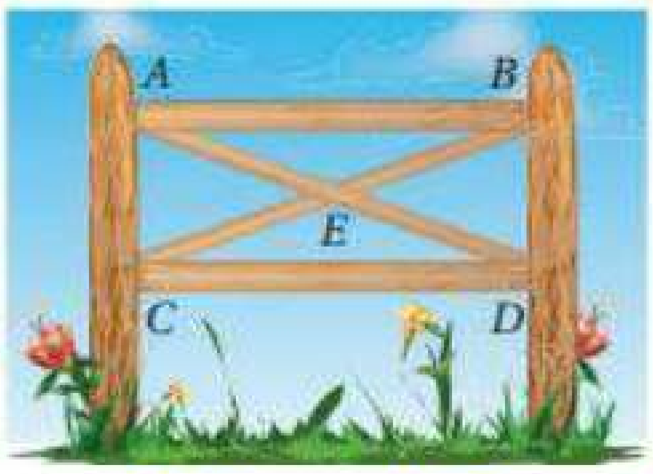
$$CD = \sqrt{(-4+4)^2 (-2-3)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$AD = \sqrt{(4+4)^2 (3-3)^2} = \sqrt{64} = 8$$

بما أن $AB = 5 = CD, BC = 8 = AD$، فإن ABCD متوازي أضلاع. وبما أن $AC = \sqrt{89} = BD$، فإن القطرين متطابقان. لذلك فالشكل ABCD مستطيل.



تدرب وحل المسائل:



سياج: سياج مستطيل الشكل تُستعمل فيه دعائم متقاطعة لتقوية السياج.
إذا كان $AB = 6\,ft, AC = 2\,ft, m\angle CAE = 65^\circ$،

$$BD = AC = 2ft$$

11) CB

$$(CB)^2 = (AB)^2 + (AC)^2$$
$$(CB)^2 = (6)^2 + (2)^2$$
$$(CB)^2 = 36 + 4$$
$$CB \approx 6.3ft$$

12) $m\angle DEB$

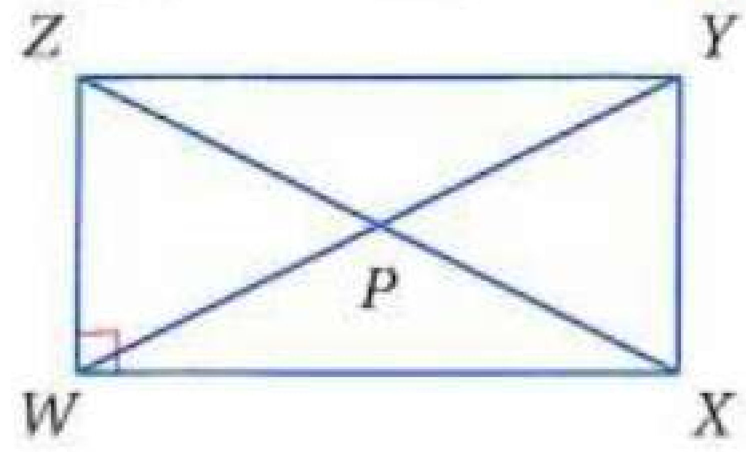
قطرا المستطيل متطابقان وينصف كل منهما الأخر

$$AE = CE$$
$$m\angle CAE = m\angle ACE = 65^\circ$$
$$m\angle AEC = 180^\circ - (65^\circ + 65^\circ)$$
$$m\angle AEC = 50^\circ$$
$$m\angle AEC = m\angle DEB = 50^\circ$$

13) $m\angle ECD$

$$m\angle ACE = 65^\circ$$
$$m\angle ECD = 90^\circ - 65^\circ = 25^\circ$$

جبر: استعن بالمستطيل $WXYZ$ المبين جانبًا.



14) إذا كان $WX = x + 4$, $ZY = 2x + 3$، فأوجد WX.

$$ZY = WX$$
$$2x + 3 = x + 4$$
$$2x - x = 4 - 3$$
$$x = 1$$
$$WX = x + 4$$
$$WX = 5$$

15) إذا كان $WP = 2x + 11$, $PY = 3x - 5$، فأوجد ZP.

$$PY = WP$$
$$3x - 5 = 2x + 11$$
$$x = 11 + 5$$
$$x = 16$$
$$WY = WP + PY$$
$$WY = 3x - 5 + 2x + 11$$
$$WY = 5x + 6$$
$$WY = 5 \times 16 + 6 = 86$$
$$ZX = WY = 86$$
$$ZX = ZP + PX$$
$$ZP = PX$$
$$ZX = 2ZP$$
$$86 = 2ZP$$
$$ZP = 43$$

16) إذا كان $m\angle WYX = (2x+5)^\circ$, $m\angle ZYW = (2x-7)^\circ$، فاوجد $m\angle ZYW$.

$$m\angle ZYW + m\angle WYX = 90^\circ$$
$$2x + 5 + 2x - 7 = 90$$
$$4x - 2 = 90$$
$$4x = 92$$
$$x = 23$$
$$m\angle ZYW = 2x - 7 = 2\times 23 - 7$$
$$m\angle ZYW = 39^\circ$$

17) إذا كان $PY = 2x + 5$, $ZP = 4x - 9$، فأوجد ZX.

$$ZP = PY$$
$$4x - 9 = 2x + 5$$
$$4x - 2x = 5 + 9$$
$$2x = 14$$
$$x = 7$$
$$ZP = PX$$
$$ZX = ZP + PX$$
$$ZX = 2ZP$$
$$ZX = 2(4x - 9)$$
$$ZX = 2(28 - 9)$$
$$ZX = 38$$

18) إذا كان $m\angle XZW = 5x - 12$, $m\angle XZY = 3x + 6$، فأوجد $m\angle YXZ$.

$$m\angle XZY + m\angle XZW = 90$$
$$5x - 12 = 3x + 6$$
$$2x = 18$$
$$x = 9$$

$m\angle XZY = 3x + 6$

$m\angle XZY = 3 \times 9 + 6 = 33^\circ$

$m\angle ZXW = 33$

$m\angle ZXY = 90 - 33 = 57^\circ$

19) إذا كان $m\angle WZX = x - 9$, $m\angle ZXW = x - 11$، فأوجد $m\angle ZXY$.

$m\angle WZX + m\angle ZXW = 90^\circ$

$x - 9 + x - 11 = 90$

$2x - 20 = 90$

$2x = 110$

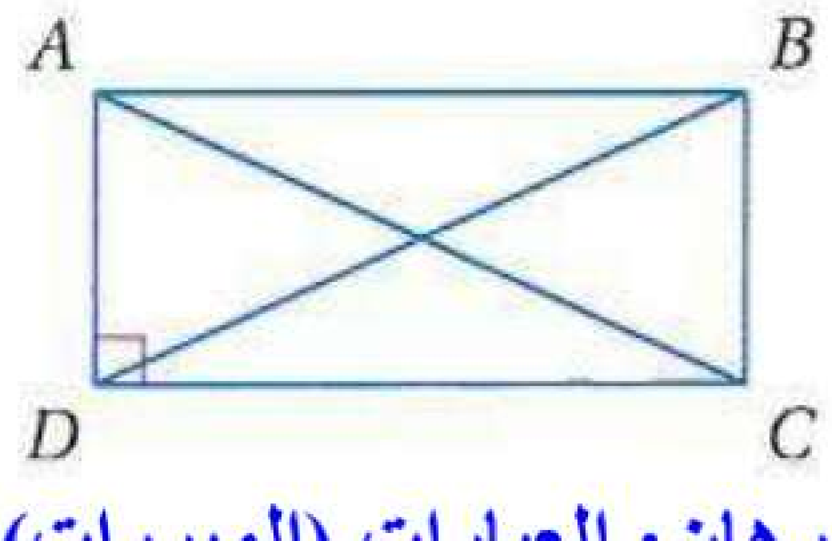
$x = 55$

$m\angle ZXW = x - 11 = 55 - 11 = 44$

$m\angle ZXY = 90 - 44^\circ = 46^\circ$

المثال 3 **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين في كل مما يأتي:

20) **المعطيات:** $ABCD$ مستطيل.
المطلوب: $\triangle ADC \cong \triangle BCD$



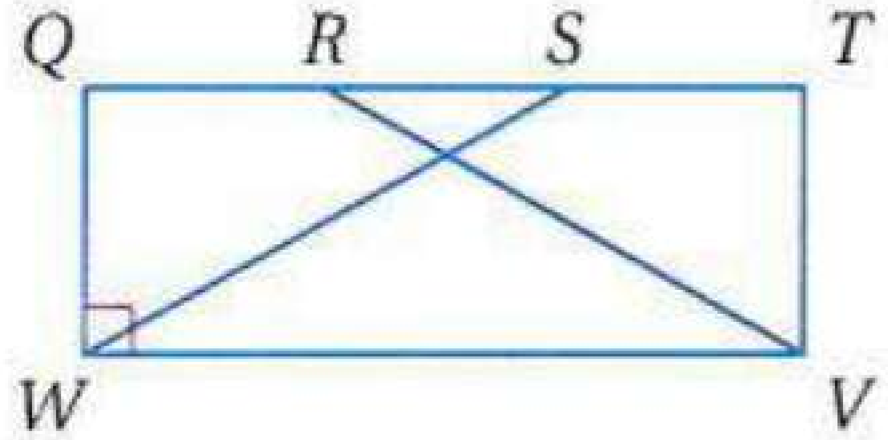
البرهان: العبارات (المبررات):

1) $ABCD$ مستطيل. (معطى)
2) $ABCD$ متوازي أضلاع. (تعريف المستطيل)
3) $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ (الأضلاع المتقابلة لمتوازي الأضلاع متطابقة)
4) $\overline{DC} \cong \overline{CD}$ (خاصية الانعكاس)
5) $\overline{AC} \cong \overline{BD}$ (قطرا المستطيل متطابقان)
6) $\Delta ADC \cong \Delta BCD$ (SSS)

21) المعطيات: $QTVW$ مستطيل.

$\overline{QR} \cong \overline{ST}$

المطلوب: $\triangle SWQ \cong \triangle RVT$



البرهان: العبارات (المبررات):

1) $QTVW$ مستطيل؛ $\overline{QR} \cong \overline{ST}$. (معطيات)

2) $QTVW$ متوازي أضلاع. (تعريف المستطيل)

3) $\overline{WQ} \cong \overline{VT}$ (الأضلاع المتقابلة لمتوازي الأضلاع متطابقة)

4) $\angle Q$ و $\angle T$ قائمتان. (تعريف المستطيل)

5) $\angle Q \cong \angle T$ (جميع الزوايا القائمة متطابقة)

6) $QR = ST$ (تعريف تطابق القطع المستقيمة)

7) $\overline{RS} \cong \overline{RS}$ (خاصية الانعكاس)

8) $RS = RS$ (تعريف تطابق القطع المستقيمة)

9) $QR + RS = RS + ST$ (خاصية الإضافة)

10) $QS = QR + RS$, $RT = RS + ST$ (مسلمة جمع القطع المستقيمة)

11) $QS = RT$ (بالتعويض)

12) $\overline{QS} \cong \overline{RT}$ (تعريف تطابق القطع المستقيمة)

13) $\Delta SWQ \cong \Delta RVT$ (SAS)

هندسة إحداثيَة: مثِّل في المستوى الإحداثي الشكل الرباعي المعطاة إحداثيات رؤوسه في كل مما يأتي، وحدد ما إذا كان مستطيلًا أم لا. برِّر إجابتك باستعمال الطريقة المحددة في السؤال.

22) $W(-2, 4), X(5, 5), Y(6, -2), Z(-1, -3)$ ، صيغة الميل.

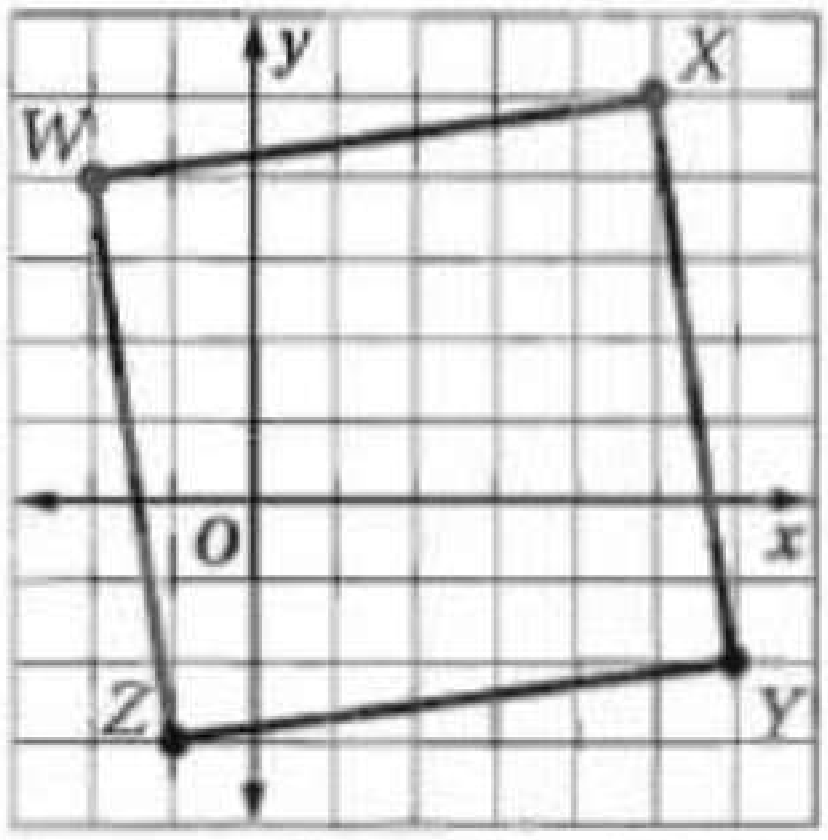
ميل $\overline{WX} = \dfrac{-2-5}{4-5} = 7$

ميل $\overline{YZ} = \dfrac{6+1}{-2+3} = 7$

ميل $\overline{XY} = \frac{5-6}{5+2} = \frac{-1}{7}$

ميل $\overline{ZW} = \frac{-2+1}{4+3} = \frac{-1}{7}$

نعم؛ بما أن ميل $\overline{WX}$ يساوي ميل $\overline{YZ}$ ويساوي 7، وميل $\overline{XY}$ يساوي ميل $\overline{ZW}$ ويساوي $\frac{-1}{7}$. فإن WXYZ متوازي أضلاع. وبما أن حاصل ضرب ميلي كل ضلعين متجاورين يساوي 1-، فإن الأضلاع المتجاورة متعامدة وتشكل زوايا قائمة. لذلك فالشكل WXYZ مستطيل.



23) $J(3, 3), K(-5, 2), L(-4, -4), M(4, -3)$ ، صيغة المسافة بين نقطتين.

$$MJ = \sqrt{(4-3)^2 + (-3-3)^2} = \sqrt{37}$$

$$KL = \sqrt{(-5+4)^2 + (2+4)^2} = \sqrt{37}$$

$$LM = \sqrt{(-4-4)^2 + (-4+3)^2} = \sqrt{65}$$

$$JK = \sqrt{(3+5)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{65}$$

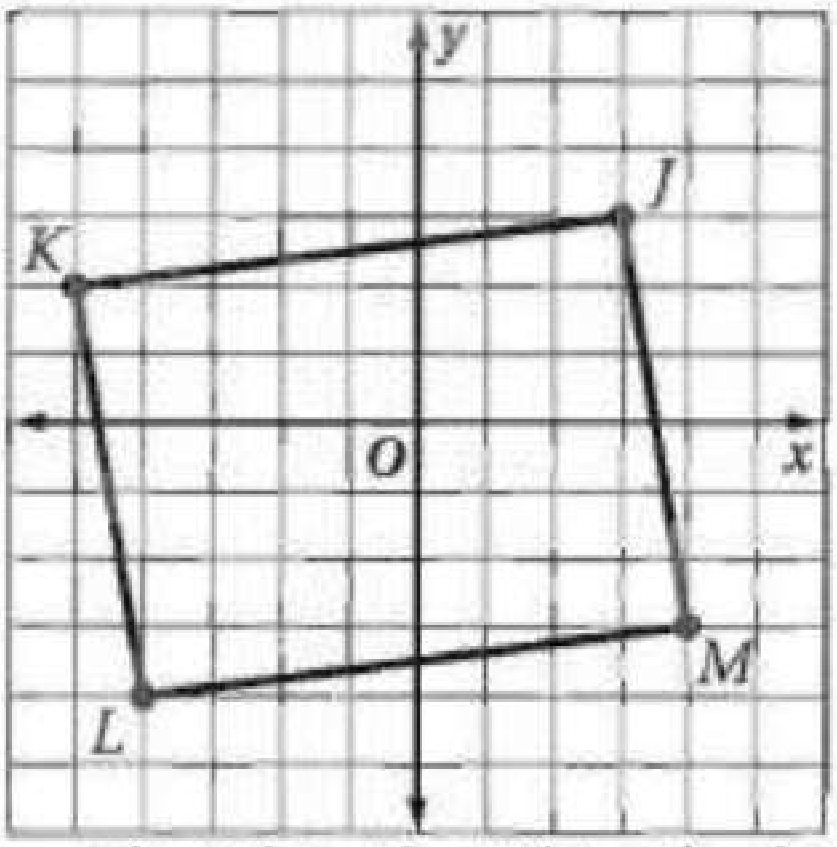
بما أن $KL = MJ$, $JK = LM$ فإن JKLM متوازي أضلاع.

$$JL = \sqrt{(3+4)^2 + (3+4)^2} = \sqrt{98}$$

$$KM = \sqrt{(-5-4)^2 + (2+3)^2} = \sqrt{106}$$

وبما أن $JL = \sqrt{98}$, $KM = \sqrt{106}$.

فإن $KL \neq KM$ ، إذن فالقطران غير متطابقين. لذلك فالشكل JKLM ليس مستطيلاً.



24) $Q(-2, 2), R(0, -2), S(6, 1), T(4, 5)$ ، صيغة المسافة بين نقطتين.

$$TQ = \sqrt{(-2-4)^2 + (2-5)^2} = \sqrt{45}$$

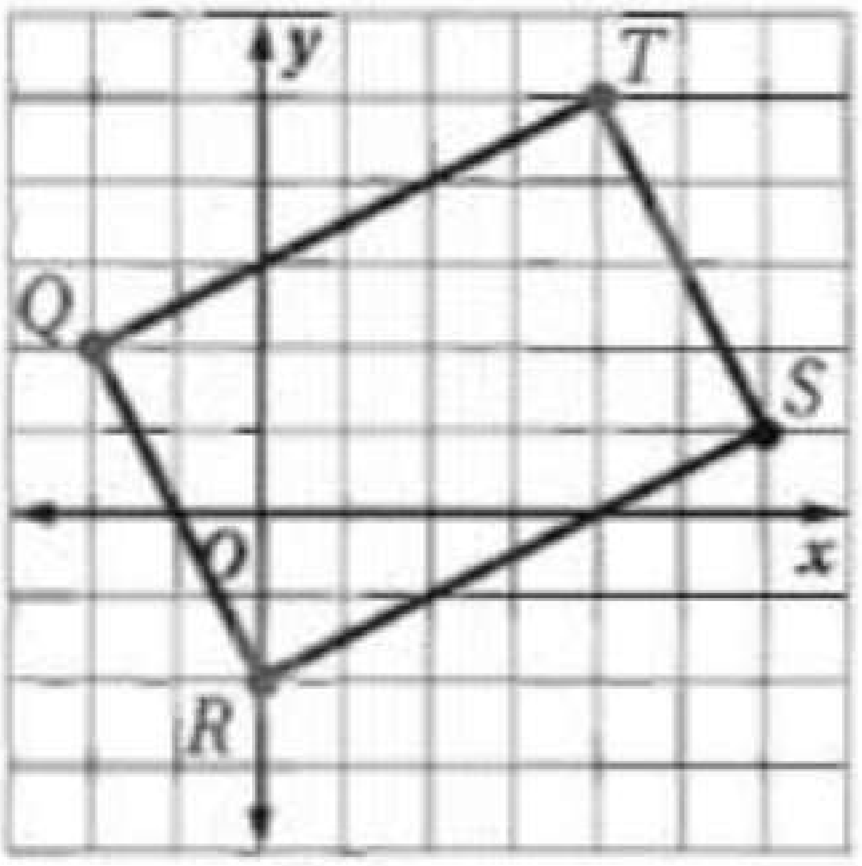
$$RS = \sqrt{(0-6)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{45}$$

$$QR = \sqrt{(-2-0)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{20}$$

$$ST = \sqrt{(6-4)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{20}$$

بما أن $QR = ST, RS = TQ$ فإن QRST متوازي أضلاع.

وبما أن $RT = QS = \sqrt{65}$، فإن القطرين متطابقان. إذن فالشكل QRST مستطيل.



25) $G(1, 8), H(-7, 7), J(-6, 1), K(2, 2)$ ، صيغة الميل.

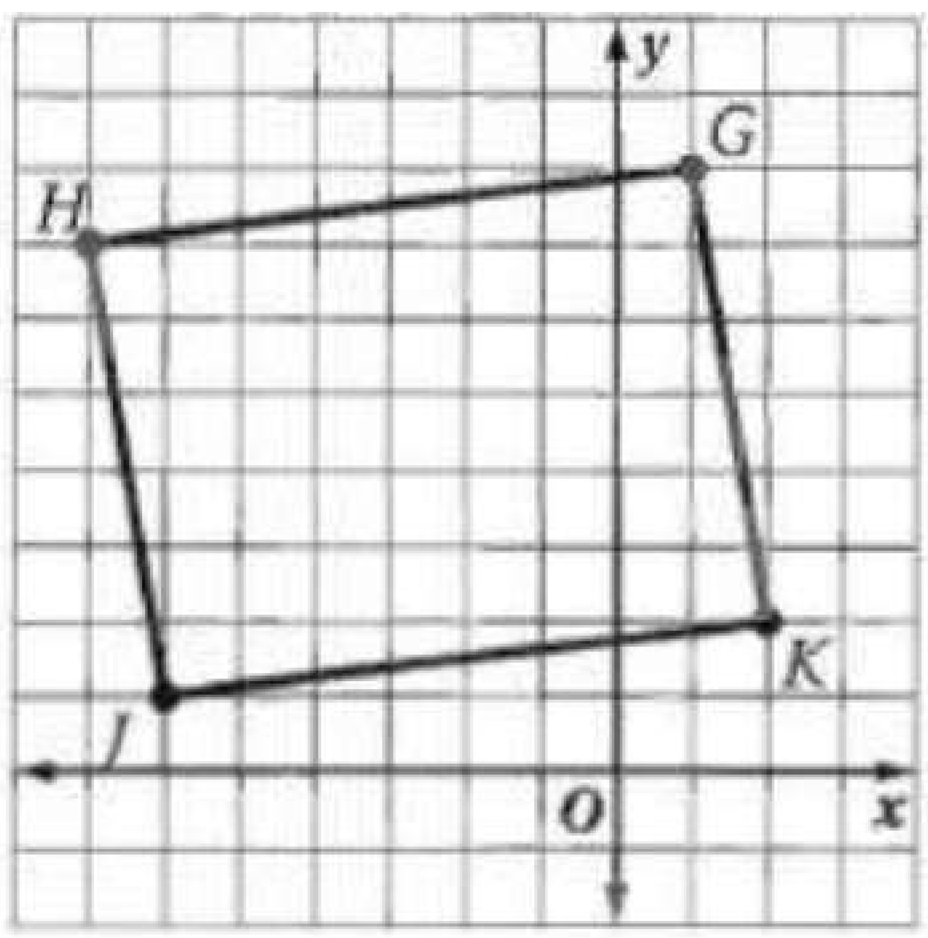
ميل $\overline{KG} = \frac{1-2}{8-2} = \frac{-1}{6}$

ميل $\overline{HJ} = \frac{-7+6}{7-1} = \frac{-1}{6}$

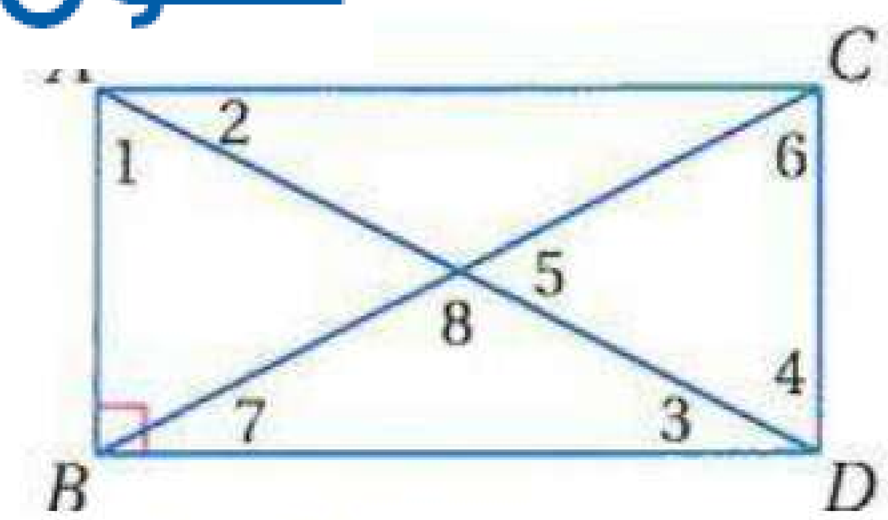
ميل $\overline{JK} = \frac{-6-2}{1-2} = \frac{-8}{-1} = 8$

ميل $\overline{GH} = \frac{1+7}{8-7} = \frac{8}{1} = 8$

نعم؛ بما أن ميل $\overline{KG}$ يساوي ميل $\overline{HJ}$ ويساوي $\frac{-1}{6}$ ، وميل $\overline{JK}$ يساوي ميل $\overline{GH}$ ويساوي 8. فإن GHJK متوازي أضلاع. وبما أن حاصل ضرب ميلي كل ضلعين متجاورين لا يساوي -1 ، فإن الأضلاع المتجاورة ليست متعامدة ولا تشكل زاويا قائمة. لذلك فالشكل WXYZ ليس مستطيل.



في المستطيل $ABCD$ ، إذا كان $m\angle 2 = 40$ ، فأوجد كلًا مما يأتي :



26) $m\angle 1$

$$\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$$

$$\angle 1 + 40^\circ = 90^\circ$$

$$\angle 1 = 90^\circ - 40^\circ$$

$$\angle 1 = 50^\circ$$

27) $m\angle 7$

$\angle 7 = \angle ACB = 40^\circ$ بالتبادل داخليا

28) $m\angle 3$

$\angle 3 = \angle 2 = 40^\circ$ بالتبادل داخليا

29) $m\angle 5$

$$\angle 4 = 90^\circ - \angle 3$$

$$\angle 4 = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$$

$$\angle 6 = \angle 4 = 50^\circ$$

$$\angle 5 = 180 - (50 + 50) = 80^\circ$$

30) $m\angle 6$

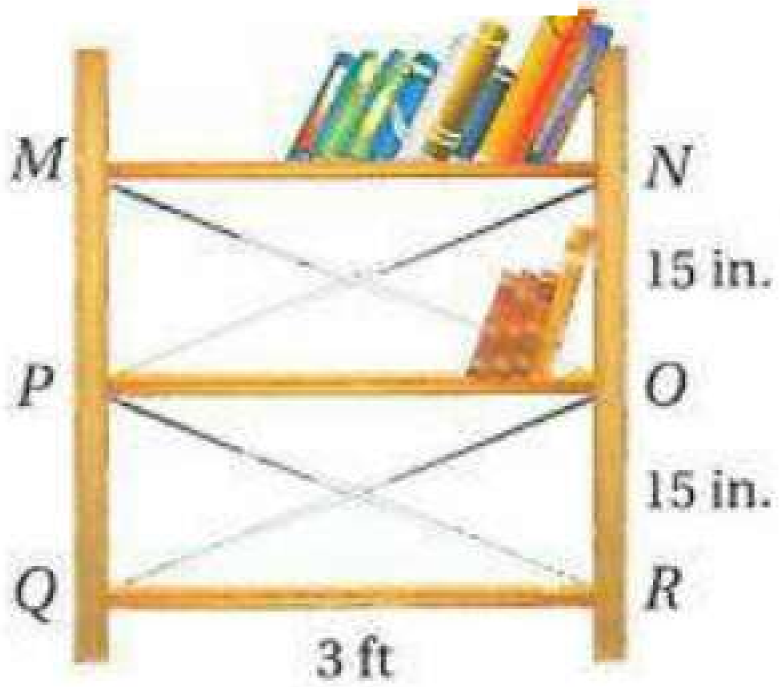
$\angle 6 = \angle 4 = 50^\circ$ مثلث متطابق الضلعين

31) $m\angle 8$

$\angle 8$ مكملة $\angle 5$

$$\angle 8 = 180 - 80 = 100^\circ$$

32) **مكتبات:** أضاف زيد رفا جديدا لمكتبته ودعائم معدنية متقاطعة كما في الشكل المجاور. كم يجب أن يكون طول كل من الدعائم المعدنية بحيث تكون الرفوف عمودية على الجانبين؟ وضّح إجابتك.
(إرشاد: $12\text{ in} = 1\text{ ft}$)



حتى تكون الزوايا قوائم يجب أن تكون أطوال الدعائم الحديدية متساوية. وبما أن طول الرف معلوم والمسافة بين الرفوف معلومة، فيمكن استعمال نظرية فيثاغورث لإيجاد طول الدعامة الحديدية، وقد وجد أن طول الدعامة 3 أقدام و3 بوصات.

$$(NP)^2 = 15^2 + (3 \times 12)^2$$

$$(NP)^2 = 15^2 + (3 \times 12)^2$$

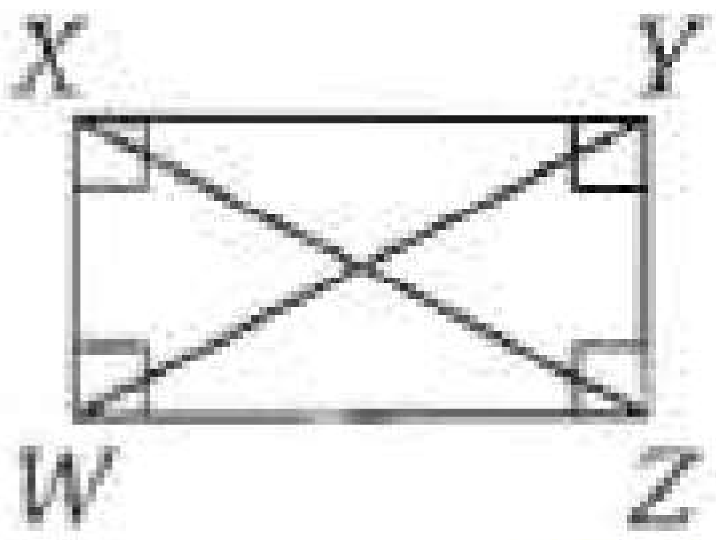
$$(NP)^2 = 225 + 1296 = 1521$$

$$NP = 39in = \frac{39}{12} \approx 3ft$$

33) النظرية 1.13

المعطيات: $WXYZ$ **مستطيل قطراه** $\overline{WY}$ **و** $\overline{XZ}$.

المطلوب: $\overline{WY} \cong \overline{XZ}$



البرهان:

1) $WXYZ$ مستطيل قطراه WY وXZ. (معطيات)

2) $\overline{WY} \cong \overline{XZ}$ (الأضلاع المتقابلة للمستطيل متطابقة)

3) $\overline{WZ} \cong \overline{WZ}$ (خاصية الانعكاس)

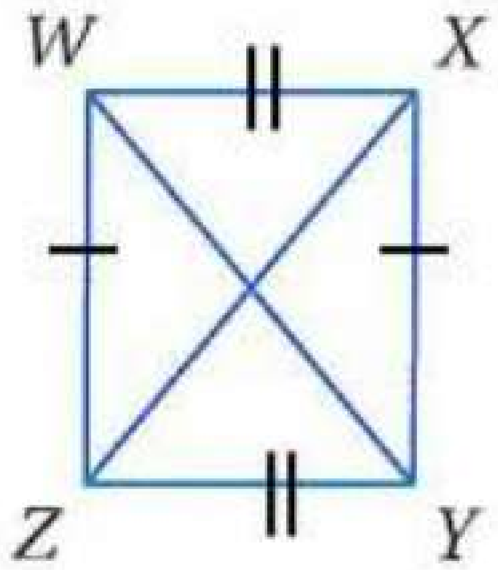
4) $\angle YZW$, $\angle XWZ$ قائمتان. (تعريف المستطيل)

5) $\angle YZW \cong \angle XWZ$ (جميع الزوايا القائمة متطابقة)

6) $\Delta XWZ \cong \Delta YZW$ (SAS)

7) $\overline{WY} \cong \overline{XZ}$ (العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة)

34) النظريّة 1.14



المعطيات: WXYZ متوازي أضلاع و $\overline{XZ} \cong \overline{WY}$

المطلوب: WXYZ مستطيل.

البرهان:

1) WXYZ متوازي أضلاع و $\overline{XZ} \cong \overline{WY}$ (معطيات)

2) $\overline{WX} \cong \overline{YZ}, \overline{XY} \cong \overline{WZ}$ (كل ضلعين متقابلين في متوازي الأضلاع متطابقان)

3) $\Delta WZX \cong \Delta XYW$ (SSS)

4) $\Delta WZX \cong \Delta XYW$ (العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين متطابقة)

5) $\angle WZX = \angle XYW$ (تعريف الزوايا المتطابقة)

6) $\angle ZWX$ و $\angle YXW$ متكاملتان. (الزوايا المتحالفة في متوازي الأضلاع متكاملة)

7) $m\overline{AD} ZWX +$

$$m\sqrt{(0+1)^2+(6+4)^2} = \sqrt{1+100} = \sqrt{101}\ YXW = 180^{\circ}$$

(تعريف الزاويتين المتكاملتين)

8) $\angle WZY , \angle XYZ$ قائمتان. (إذا كانت زاويتان متطابقتين ومتكاملتين فإن كلاً منهما قائمة)

9) $\angle WZY , \angle XYZ$ قائمتان. (إذا كانت إحدى زوايا متوازي أضلاع قائمة فإن زواياه الأربع قائمة)

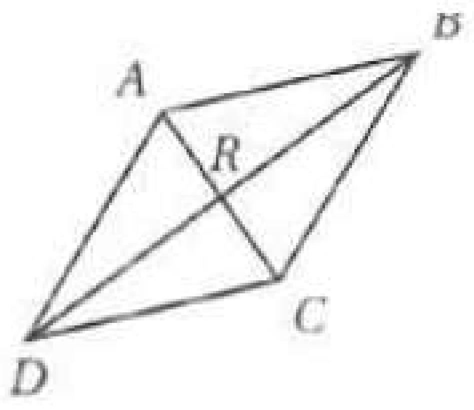
10) WXYZ مستطيل. (تعريف المستطيل)

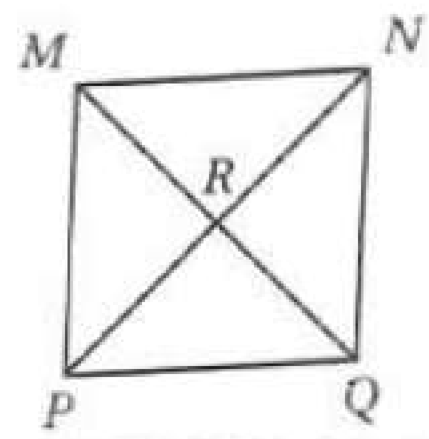
35) **رياضة:** قام سلمان بعمل التخطيط الخارجي لملعب كرة قدم. وضح كيف يمكنه التحقق من أن الملعب مستطيل الشكل باستعمال شريط القياس فقط.

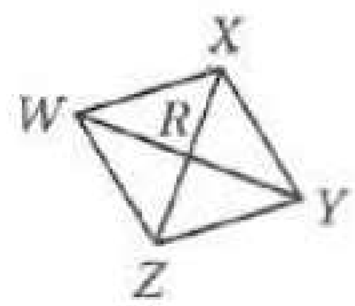
يجب أن يقيس قطري الملعب والأضلاع. فإذا كان القطران متطابقين وكل ضلعين متقابلين متطابقين فإن الملعب مستطيل الشكل

36) **تمثيلات متعددة:** سوف تستقصي في هذه المسألة خصائص متوازيات أضلاع خاصّة.

a) هندسيًا: ارسم ثلاثة متوازيات أضلاع كل منها أضلاعه الأربعة متطابقة وسمِّها $ABCD$، $MNOP$، $WXYZ$. ثم ارسم قطري كل منها وسمِّ نقطة تقاطعهما R.







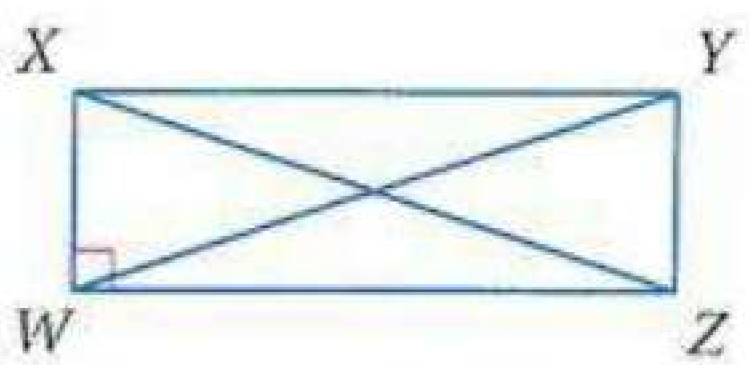
b) جدوليًا: استعمل المنقلة لقياس الزوايا وأكمل الجدول الآتي.

متوازي الأضلاع	ABCD		MNOP		WXYZ	
الزاوية	$\angle ARB$	$\angle BRC$	$\angle MRN$	$\angle NRO$	$\angle WRX$	$\angle XRY$
قياس الزاوية	90°	90°	90°	90°	90°	90°

c) لفظيًا: اكتب تخمينًا حول قطري متوازي الأضلاع المتطابق الأضلاع.

إذا كانت الأضلاع الأربعة في متوازي الأضلاع متطابقة فإن قطريه متعامدان.

جبر: استعن بالمستطيل $WXYZ$ المبين جانبًا.



37) إذا كان $XW = 3,\ WZ = 4,\ XZ = b$، فأوجد YW.

$$(XZ)^2 = (WX)^2 + (WZ)^2$$

$$(XZ)^2 = (3)^2 + (4)^2$$

$$XZ = WY = 5$$

38) إذا كان $XY = 8$ ، $ZY = 6$ ، $XZ = 2c$، فأوجد WY.

$$WY = XZ$$

$$(XZ)^2 = (XY)^2 + (YZ)^2$$

$$(XZ)^2 = (8)^2 + (6)^2$$

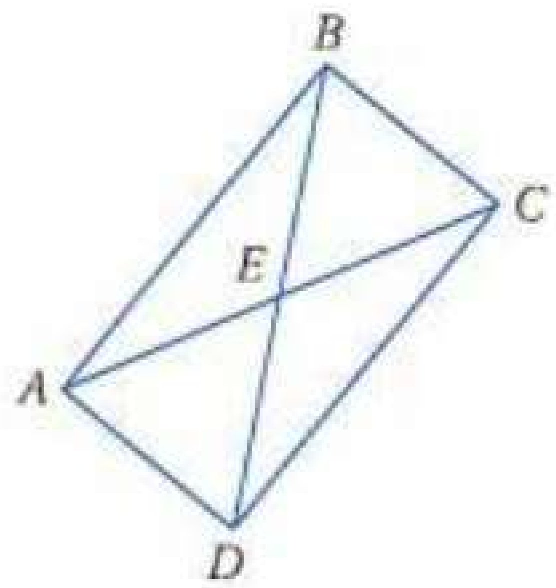
$$(XZ)^2 = 100$$

$$XZ = 10$$

$$XZ = WY = 10$$

مسائل مهارات التفكير العليا:

39) **تحدٍّ:** في المستطيل $ABCD$، إذا كان $m\angle EAB = (4x+6)^\circ$، $m\angle EBC = 60^\circ$، $m\angle DEC = (10-11y)^\circ$، فاوجد قيمة كل من x ، y.



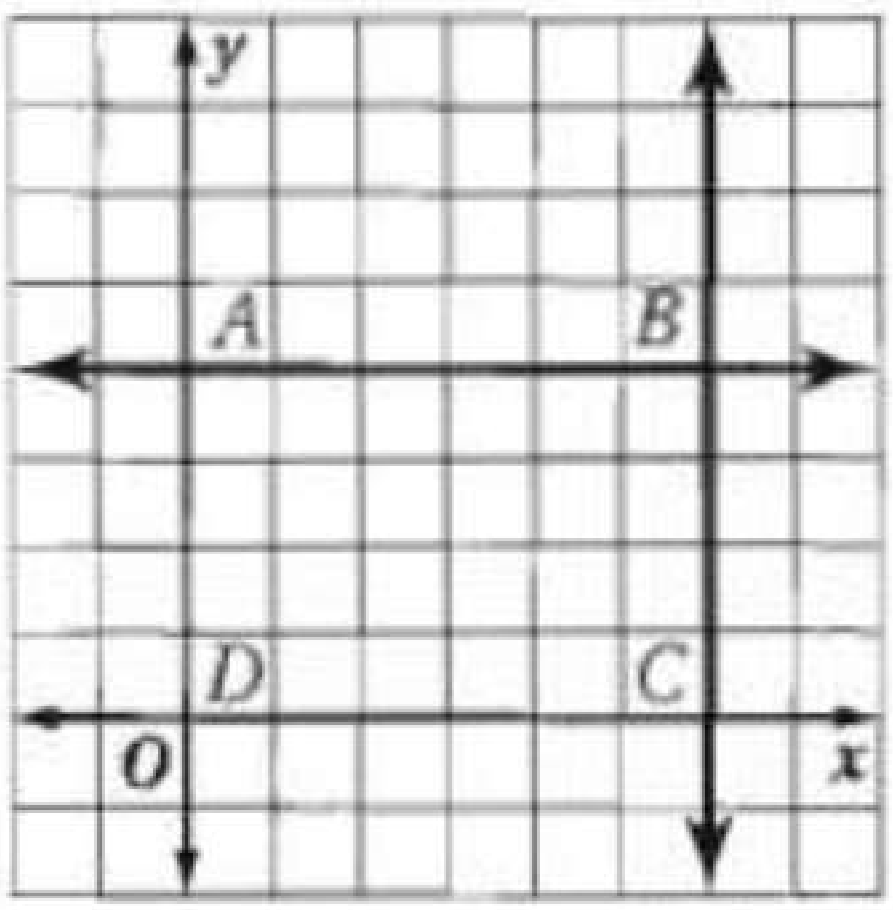
$$\angle ABE + \angle EBC = 90$$
$$\angle ABE + 60 = 90$$
$$\angle ABE = 30$$
$$4x + 6 = 30$$
$$4x = 30 - 6$$
$$4x = 24$$
$$x = 6$$
$$\angle AEB = 180 - 2(30)$$
$$\angle AEB = \angle EDC = 120$$
$$10 - 11y = 120$$
$$-11y = 120 - 10$$
$$y = \frac{-110}{11} = -10$$

40) **اكتشف الخطأ:** قالت بسمة: إنّ أيّ مثلثين حادّي الزوايا ومتطابقين يمكن ترتيبهما ليشكّلا مستطيلًا. وقالت شيماء: إنّ المثلثين القائمي الزاوية المتطابقين هما فقط اللذان يمكن ترتيبهما ليشكلا مستطيلا. هل اي منهما على صواب؟ وضّح تبريرك.

شيماء؛ عندما يرتب مثلثان متطابقان ليشكلا شكلاً رباعياً فإن زاويتين من زوايا الشكل الرباعي ناتجان من رأس منفرد لمثلث.
ولكي يكون الشكل الرباعي مستطيلاً يجب أن تكون إحدى الزوايا في المثلثين المتطابقين قائمة.

41) **مسألة مفتوحة:** اكتب معادلات أربعة مستقيمات بحيث تكون نقاط تقاطعها رؤوس مستطيل. تحقق من إجابتك باستعمال الهندسة الإحداثيّة.

$x = 0, x = 6, y = 0, y = 4$
طول $\overline{AB}$ يساوي $6 - 0$ أو 6 وحدات.
وطول $\overline{DC}$ يساوي $0 - 6$ أو 6 وحدات، ميل $\overline{AB}$ يساوي صفراً، وميل $\overline{DC}$ يساوي صفراً.
وبما أن ضلعين للشكل الرباعي متوازيان ومتطابقان، فإنه وبحسب النظرية 1.12، يكون متوازي أضلاع.
لأن $\overline{AB}$ أفقي و $\overline{BC}$ رأسي فإن المستقيمين متعامدان وقياس الزاوية التي يشكلانها 90°.
وحسب النظرية 1.6، إذا كان لمتوازي أضلاع زاوية قائمة فإن زواياه الأربع قوائم.
لذلك وحسب التعريف يكون متوازي الأضلاع مستطيلاً.

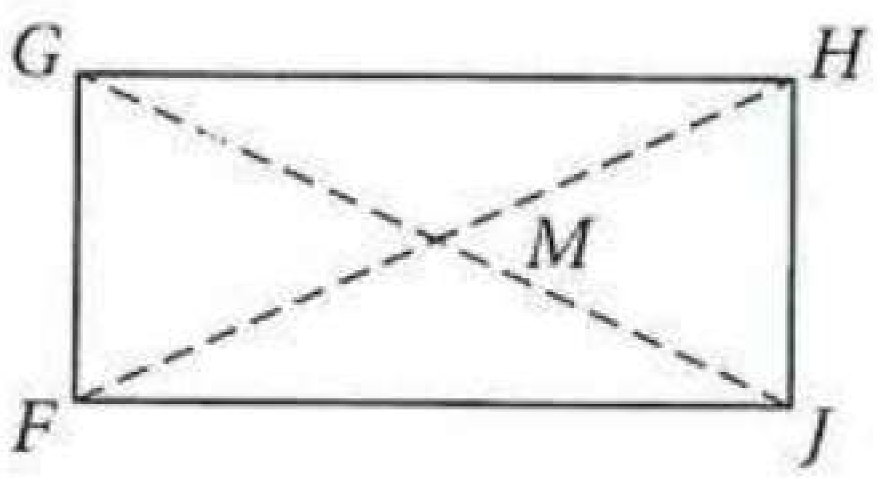


42) **اكتب:** وضح لِمَ تُعدّ جميع المستطيلات متوازيات أضلاع، بينما لا تُعد جميع متوازيات الأضلاع مستطيلات.

كل المستطيلات تكون متوازيات أضلاع لأنه بناءً على تعريف المستطيل يكون كل ضلعين متقابلين فيه متوازيين. ومتوازي الأضلاع الذي تكون زواياه قوائم يكون مستطيلاً. لذا تكون بعض متوازيات الأضلاع مستطيلات، وأما بعضها الآخر الذي زواياه ليست قوائم فلا تكون مستطيلات.

تدريب على الاختبار المعياري

43) في الشكل الرباعي $FGHJ$، إذا كان $FJ = -3x + 5y$، $FM = 3x + y, GH = 11, GM = 13$، فما قيمة كل من x, y اللتين تجعلان $FGHJ$ مستطيلاً؟



A $x = 3, y = 4$

B $x = 4, y = 3$

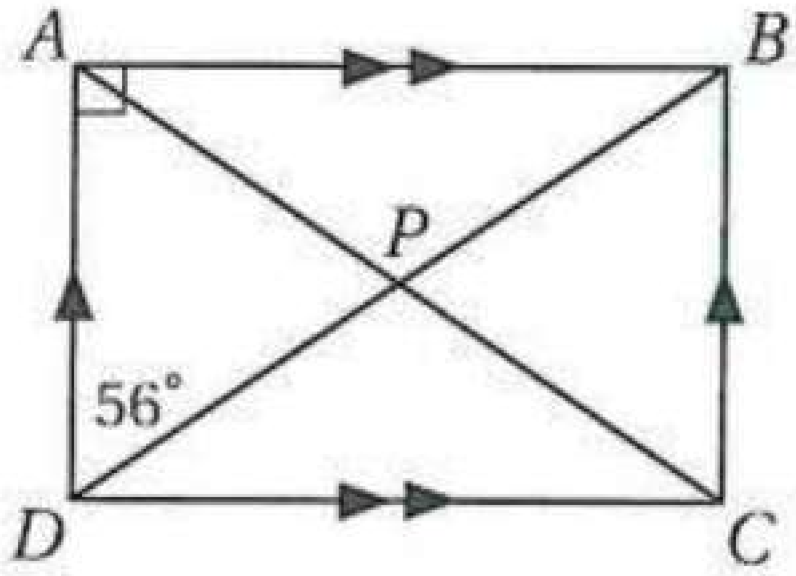
C $x = 7, y = 8$

D $x = 8, y = 7$

$\mathbf{x = 3, y = 4: A}$

$$FJ = GH$$
$$-3x + 5y = 11 \rightarrow 1$$
$$GM = 13$$
$$3x + y = 13 \rightarrow 2$$
$$6y = 24$$
$$y = 4$$
$$3x + y = 13$$
$$3x + 4 = 13$$
$$3x = 13 - 4$$
$$3x = 9$$
$$x = 3$$

44) **إجابة قصيرة:** ما قياس $\angle APB$؟



$\angle DBC = 56^\circ$ بالتبادل داخليا

$\angle ABD = 90^\circ - 56^\circ = 34$ زوايا المستطيل قائمة

$PB = AP$ (قطرا المستطيل متطابقان وينصف كل منهما الأخر)

$\therefore \angle BAP = 34$

$\angle APB = 180^\circ - (34 + 34)$

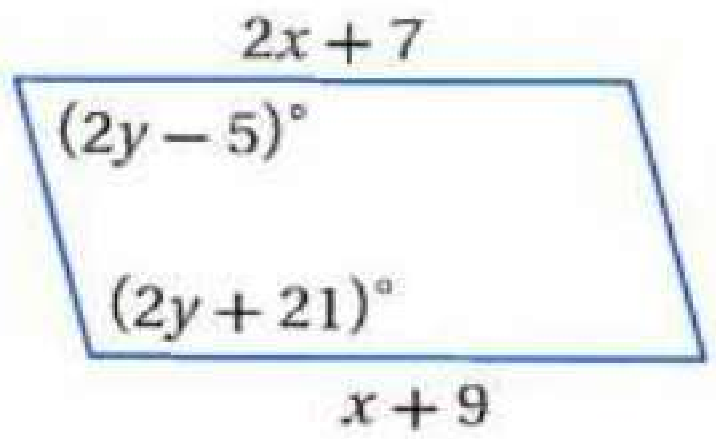
$\angle APB = 180^\circ - 68^\circ$

$\angle APB = 112^\circ$

مراجعة تراكمية

جبر: أوجد قيمتي x , y في كل مما يأتي بحيث يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع :

(45



$2x + 7 = x + 9$

$2x - x = 9 - 7$

$x = 2$

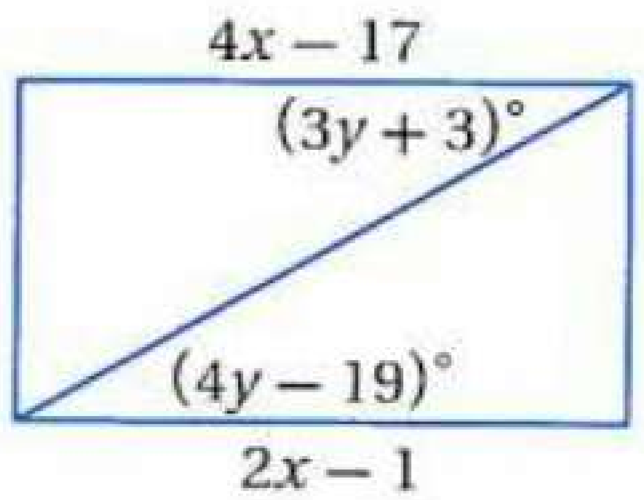
$2y - 5 + 2y + 21 = 180$

$4y + 16 = 180$

$4y = 180 - 16$

$y = 41$

(46



$4x - 17 = 2x - 1$

$4x - 2x = -1 + 17$

$2x = 16$

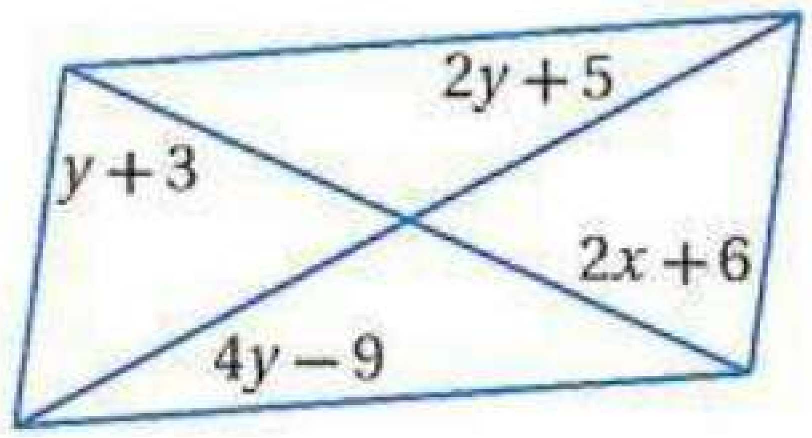
$x = 8$

$3y + 3 = 4y - 19$

$3y - 4y = -19 - 3$

$y = 22$

(47



$2y + 5 = 4y - 9$

$2y - 4y = -9 - 5$

$-2y = -14$

$y = 7$

$y + 3 = 2x + 6$

$7 + 3 = 2x + 6$

$10 = 2x + 6$

$2x = 10 - 6$

$2x = 4$

$x = 2$

هندسة إحداثية: أوجد إحداثيي نقطة تقاطع قطري $\square ABCD$ الذي إحداثيات رؤوسه هي: $A(1, 3), B(6, 2), C(4, -2), D(-1, -1)$

بما أن قطري متوازي الأضلاع ينصف كلا منهما الآخر، فإن نقطة تقاطعهما هي نقطة منتصف كل من $\overline{BD}$, $\overline{AC}$. أوجد نقطة منتصف $\overline{AC}$ التي طرفاها $(1,3), (4,-2)$

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = \frac{1+4}{2}, \frac{3-2}{2}$$ (صيغة نقطة المنتصف)

$(2.5, 0.5)$ (بالتبسيط)

إذن إحداثيا نقطة تقاطع قطري ABCD هما $(2.5, 0.5)$

استعد للدرس اللاحق

49) $(4, 2), (2, -5)$

$$\sqrt{(4-2)^2+(2+5)^2}=\sqrt{4+49}=\sqrt{53}$$

50) $(0, 6), (-1, -4)$

$$\sqrt{(0+1)^2+(6+4)^2}=\sqrt{1+100}=\sqrt{101}$$

51) $(-4, 3), (3, -4)$

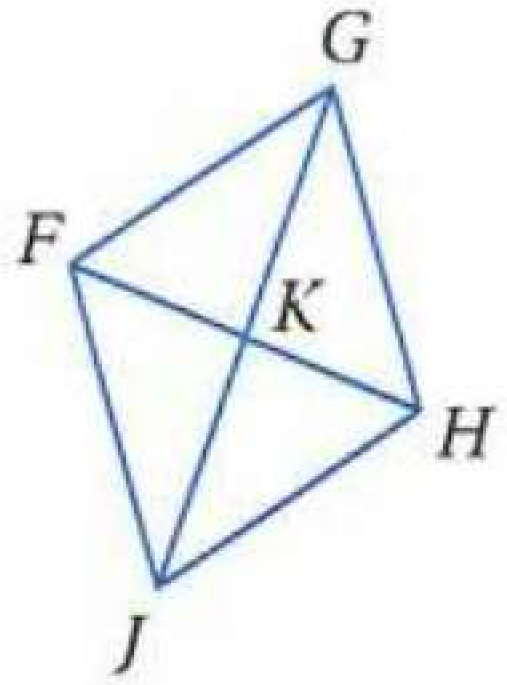
$$\sqrt{(-4-3)^2+(3+4)^2}=\sqrt{49+49}=\sqrt{98}$$

5-5 المعين والمربع

تحقق

استعن بالمعيّن *FGHJ* أعلاه.

1A) إذا كان $FK = 5, FG = 13$، فأوجد *KJ*.



من خصائص المعين قطراة متعامدان وينصف كلا منهما الأخر
إذن ΔFGK قائم الزاوية
وباستخدام نظرية فيثاغورث:

$$(FG)^2 = (GK)^2 + (FK)^2$$

$$(13)^2 = (GK)^2 + (5)^2$$

$$(GK)^2 = (13)^2 - (5)^2 = 144$$

$$GK = 12$$

$$JK = GK = 12$$

1B) **جبر:** إذا كان $m\angle KFG = (9y-5)^\circ$, $m\angle JFK = (6y+7)^\circ$، فأوجد قيمة y.

من خصائص المعين أن الاقطار تنصف الزوايا

$\angle KFG = \angle JFK$

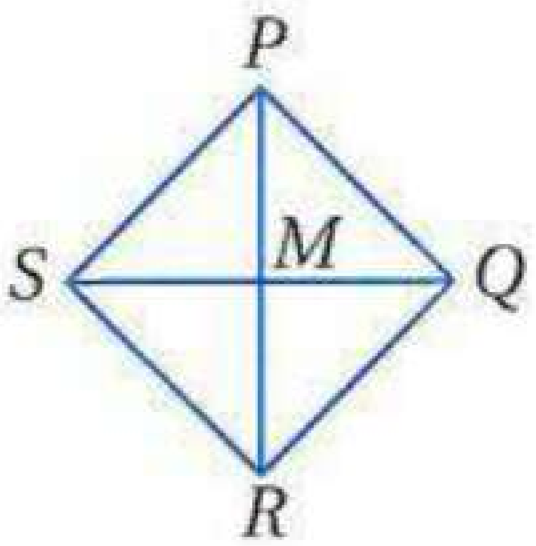
$9y - 5 = 6y + 7$

$9y - 6y = 7 + 5$

$3y = 12$

$y = 4$

2) اكتب برهانًا حرًّا.



المعطيات: $\overline{SQ}$ عمود منصّف لـِ $\overline{PR}$.

$\overline{PR}$ عمود منصّف لـِ $\overline{SQ}$.

$\triangle RMS$ متطابق الضلعين.

المطلوب: $PQRS$ مربّع.

المعطيات: $\overline{SQ}$ عمود منصف لـ $\overline{PR}$، $\overline{PR}$ عمود منصف لـ $\overline{SQ}$.

ΔRMS متطابق الضلعين.

المطلوب: PQRS مربع.

برهان حر:

بما أن $\overline{SQ}$ عمود منصف لـ $\overline{PR}$ فإن $\overline{PR} \perp \overline{SQ}$ و $\overline{MR} \cong \overline{MP}$ حسب التعريف.

وبما أن $\overline{PR}$ عمود منصف لـ $\overline{SQ}$، فإن $\overline{QM} \cong \overline{MS}$

وبما أن ΔRMS متطابق الضلعين فإن $\overline{MR} \cong \overline{MS}$ حسب التعريف.

وبالتعويض تكون $\overline{MP} \cong \overline{MS}$ ، إذن وبحسب تعريف التطابق وخاصية التعدي يكون $MR = QM = MP = MS$، ومن مسلمة جمع القطع المستقيمة ينتج أن: $SQ = MQ + MS$ و $PR = MR + MP$

وبالتعويض يكون $SQ = MS + MS$ و $PR = MS + MS$،

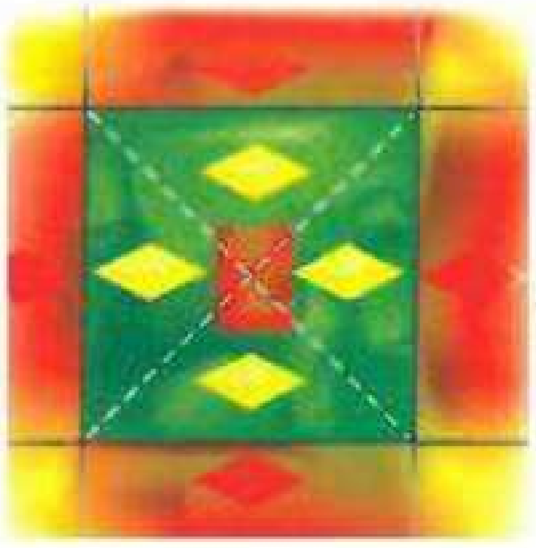
إذن $SQ = PR$

لذلك وحسب تعريف التطابق يكون $\overline{PR} = \overline{SQ}$

ولأن قطري PQRS ينصف كل منهما الآخر، فإن PQRS مستطيل.

ولأن القطرين متعامدان فإن PQRS معين. ولأن PQRS مستطيل ومعين فإنه مربع.

3) **خياطة:** خاطت كوثر غطاء طاولة باستعمال قطع ملونة من القماش كما في الرسم المجاور.



A) رسمت كوثر قطري كل من القطع الصفراء فوجدت أنهما متعامدان، هل يمكنها استنتاج أن كل قطعة صفراء معيّن؟ وضح إجابتك.

لا؛ لا يمكن التوصل لهذا الاستنتاج إلا إذا علمت أن الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

B) إذا كانت الزوايا الأربع للقطعة الخضراء متساوية القياس، والضلعان الأيسر والسفلي متساويي الطول، فهل يمكنها استنتاج ان القطعة الخضراء مربّع؟ وضح إجابتك.

نعم؛ إذا كانت الزوايا الأربع متطابقة فسيكون قياس كل واحدة منها $360 \div 4$ أو 90 وعليه تكون الزوايا المتقابلة متطابقة وتكون القطعة متوازي أضلاع. وإذا كانت كل زاوية 90° فإن للشكل الرباعي أربع زوايا قوائم، وعليه تكون القطعة مستطيلاً، وإذا كان الضلعان المتتاليان متطابقين فستكون أيضاً مربعاً.

4) حدد ما إذا كان $\square JKLM$ الذي إحداثيات رؤوسه $J(5, 0), K(8, -11), L(-3, -14), M(-6, -3)$، معيّنًا أو مستطيلًا أو مربّعًا ؟ اكتب جميع التسميات التي تنطبق عليه. وضح إجابتك.

أولاً: استعمل صيغة المسافة بين نقطتين للمقارنة بين طولي القطرين.

$$KM = \sqrt{(8+6)^2 + (-11+3)^2} = 2\sqrt{65}$$

$$JL = \sqrt{(5+3)^2 + (0+14)^2} = 2\sqrt{65}$$

بما أن القطران JL, KM متساويان إذن هما متطابقان إذن الشكل مستطيل

ثانيا: استعمل صيغة الميل لتحديد ما إذا كان القطران متعامدان

ميل: $\overline{KM} = \dfrac{8+6}{-11+3} = \dfrac{14}{-8} = \dfrac{-7}{4}$

ميل: $\overline{JL} = \dfrac{3+5}{0+14} = \dfrac{8}{14} = \dfrac{4}{7}$

بما أن حاصل ضرب الميلين = -1 فإن القطرين متعامدان لذا فأن JKLM معين.

تحقق:

$$JK=\sqrt{(5-8)^2+(0+11)^2}=\sqrt{130}$$

$$KL=\sqrt{(8+3)^2+(-11+14)^2}=\sqrt{130}$$

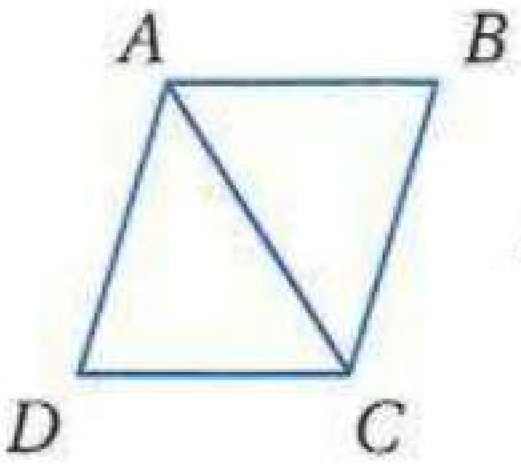
لذا فأن JKLM معين.

ميل: $\overline{JK}=\frac{8-5}{11+0}=\frac{-3}{11}$

ميل: $\overline{KL}=\frac{3+8}{-11+14}=\frac{11}{3}$

بما أن حاصل ضرب الميلين $=-1$ فإن الضلعين المتتالين $\overline{JK}$ و $\overline{KL}$ متعامدان لذا فأن JKLM مربع.

تأكد:



جبر: استعن بالمعين $ABCD$ المبين جانبًا.

1) إذا كان $m\angle BCD = 114°$، فأوجد $m\angle BAC$.

$\angle BCD = \angle BAD = 114°$ الزاويا المتناظرة متطابقة

AC ينصف $\angle BAD$

$$\angle BAC = \frac{114}{2} = 57°$$

2) إذا كان $AB = 2x + 3 , BC = x + 7$، فأوجد CD.

بما أن الشكل معين إذن جميع أضلاعه متطابقة

$$BC = AB = CD = AD$$

$$x + 7 = 2x + 3$$

$$2x - x = 7 - 3$$

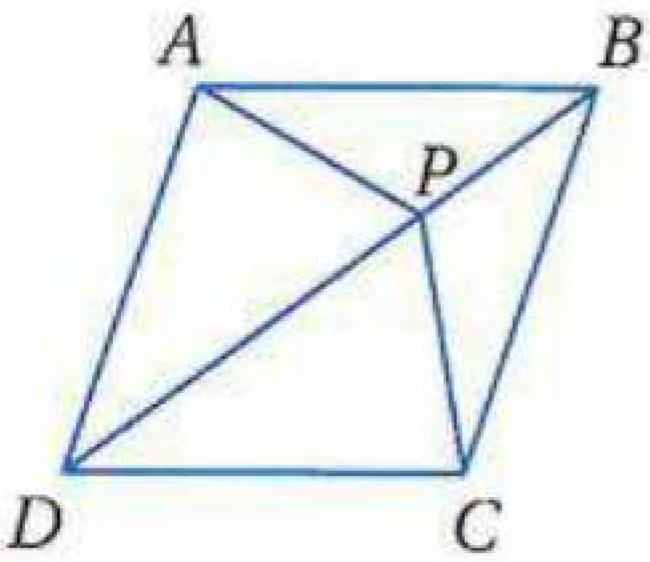
$$x = 4$$

$$AD = x + 7$$

$$AD = 4 + 7$$

$$AD = 11$$

3) **برهان:** اكتب برهانا ذا عمودين لإثبات أنه إذا كان $ABCD$ معينًا وكان $\overline{DB}$ قطرًا فيه، فإنّ $\overline{AP} \cong \overline{CP}$.



المعطيات: $ABCD$ معين فيه $\overline{BD}$ قطر.

المطلوب: $\overline{AP} \cong \overline{CP}$

البرهان: العبارات (المبررات)

1) $ABCD$ معين فيه $\overline{BD}$ قطر (معطى)

2) $\angle ABP \cong \angle CBP$ (قطرا المعين ينصفان زواياه)

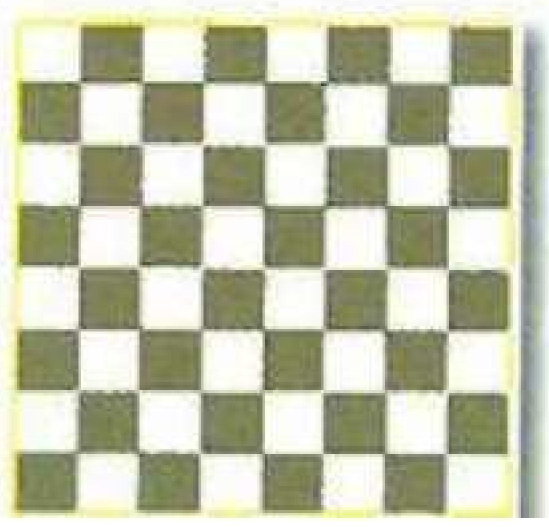
3) $\overline{PB} \cong \overline{PB}$ (خاصية الانعكاس)

4) $\overline{AB} \cong \overline{CB}$ (تعريف المعين)

5) $\Delta APB \cong \Delta CPB$ (SAS)

6) $\overline{AP} \cong \overline{CP}$ (العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة)

4) **بلاط:** تتكون الأرضية أدناه من 64 بلاطة متطابقة. استعمل هذه المعطيات لإثبات أن الأرضية نفسها مربعة.



بما أن جميع بلاط الأرضية متطابق إذن الشكل متوازي أضلاع وبما أن الأضلاع المتتالية متطابقة إذن الشكل معين وبحسب الظرية 5.20 فإن الشكل مربع

هندسة إحداثيّة: حدد ما إذا كان $\square QRST$ المعطاة إحداثيات رؤوسه في كل مما يأتي معينًا أو مستطيلًا أو مربعًا. اكتب جميع التسميات التي تنطبق عليه. وضح إجابتك.

5) $Q(1, 2), R(-2, -1), S(1, -4), T(4, -1)$

أولاً: استعمل صيغة المسافة بين نقطتين للمقارنة بين طولي القطرين.

$$QS = \sqrt{(1-1)^2 + (2+4)^2} = \sqrt{36} = 6$$

$$RT = \sqrt{(-2-4)^2 + (-1+1)^2} = \sqrt{36} = 6$$

بما أن القطران RT,QS متساويان إذن هما متطابقان إذن الشكل مستطيل

ثانيا: استعمل صيغة الميل لتحديد ما إذا كان القطران متعامدان

ميل: $\overline{QS} = \frac{8+6}{-11+3} = \frac{1-1}{4+2} = \frac{0}{6}$

ميل: $\overline{RT} = \frac{-2-4}{-1+1} = \frac{-6}{0}$

بما أن حاصل ضرب الميلين $= -1$ فإن القطرين متعامدان لذا فأن QRST معين.

إذن الشكل مستطيل ومعين ومربع؛ لأن الضلعين المتتاليين متطابقان ومتعامدان.

6) $Q(-2, -1), R(-1, 2), S(4, 1), T(3, -2)$

6) لا شيء؛ لأن قطريه غير متعامدين وعير متطابقين.

أولاً: استعمل صيغة المسافة بين نقطتين للمقارنة بين طولي القطرين.

$$QS = \sqrt{(-2-4)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{40}$$

$$RT = \sqrt{(-1-3)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{32}$$

بما أن القطران RT,QS ليس متساويان إذن هما غير متطابقان إذن الشكل ليس مستطيل وبما أنه ليس مستطيل إذن الشكل ليس مربع

ثانيا: استعمل صيغة الميل لتحديد ما إذا كان القطران متعامدان

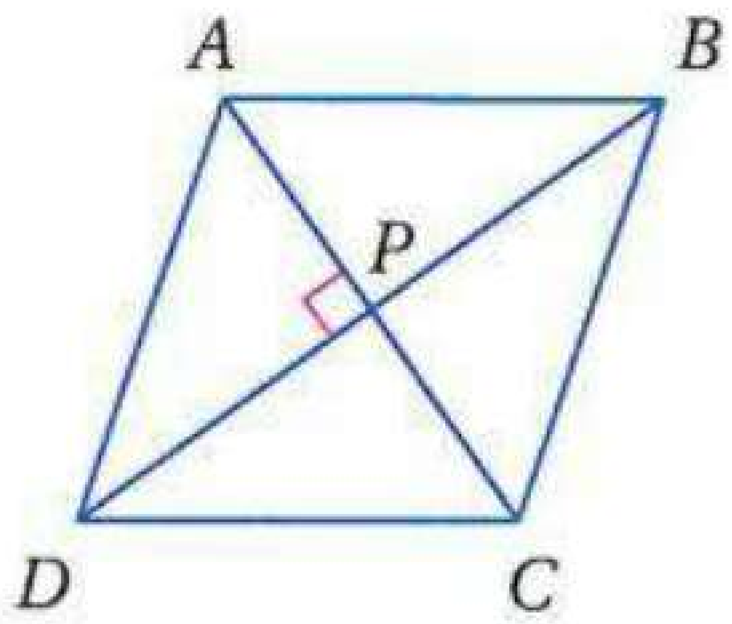
ميل: $\overline{QS} = \frac{8+6}{-11+3} = \frac{-2-4}{-1-1} = \frac{-6}{-2} = 3$

ميل: $\overline{RT} = \frac{-1-3}{2+2} = \frac{-4}{4} = -1$

بما أن حاصل ضرب الميلين $\neq -1$ فإن القطرين غير متعامدان لذا فأن QRST ليس معين.

إذن الشكل ليس مستطيل ولا معين ولا مربع

تدرب وحل المسائل:



جبر: استعن بالمعين $ABCD$ المبين جانبًا.

7) إذا كان $AB = 14$، فأوجد BC.

خصائص المعين الأضلاع المتتالية متطابقة

$$BC = AB = 14$$

8) إذا كان $m\angle BCD = 118^\circ$، فأوجد $m\angle BAC$.

الزاويتان المتقابلتان متطابقان و قطرا المعين ينصف الزاوية

$$\angle BCD = \angle BAD = 118$$

$$\angle BCD = \frac{118}{2} = 59^\circ$$

9) إذا كان $AP = 3x - 1$ و $PC = x + 9$، فأوجد AC.

$$AP = PC$$
$$3x - 1 = x + 9$$
$$2x = 9 + 1$$
$$2x = 10$$
$$x = 5$$
$$AC = AP + PC$$
$$AC = 3x - 1 + x + 9$$
$$AC = 15 - 1 + 5 + 9$$
$$AC = 28$$

10) إذا كان $m\angle ABC = (2x-7)^\circ$ و $m\angle BCD = (2x+3)^\circ$، فأوجد $m\angle DAB$.

$m\angle ABC + m\angle BCD = 180^\circ$ الزاويتان المتحالفتان متكاملتان

$2x - 7 + 2x + 3 = 180^\circ$

$4x - 4 = 180^\circ$

$4x = 184$

$x = 46$

$m\angle BCD = 2x + 3$

$m\angle BCD = 95$

$m\angle DAB = m\angle BCD = 95^\circ$ الزوايا المتناظرة متطابقة

11) إذا كان $m\angle DPC = (3x-15)^\circ$، فأوجد قيمة x.

$m\angle DPC = 3x - 15 = 90$

$3x = 15 + 90$

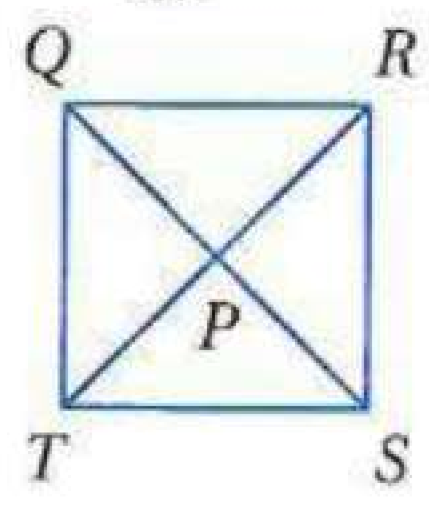
$3x = 105$

$x = 35$

برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين في كل مما يأتي :

12) **المعطيات:** $QRST$ متوازي أضلاع.
$\overline{TR} \cong \overline{QS}$, $m\angle QPR = 90^\circ$

المطلوب: $QRST$ مربع.



المعطيات: QRST متوازي أضلاع، $\overline{TR} \cong \overline{QS}$؛ $m\angle QPR = 90^\circ$

المطلوب: QRST مربع.

العبارات (المبررات):

1) QRST متوازي أضلاع؛ $m\angle QPR = 90^\circ$، $\overline{TR} \cong \overline{QS}$. (معطيات)

2) QRST مستطيل. (إذا كان قطرا متوازي أضلاع متطابقين فإنه مستطيل)

3) $\angle QPR$ قائمة. (تعريف الزاوية القائمة)

4) $\overline{QS} \perp \overline{TR}$ (تعريف التعامد)

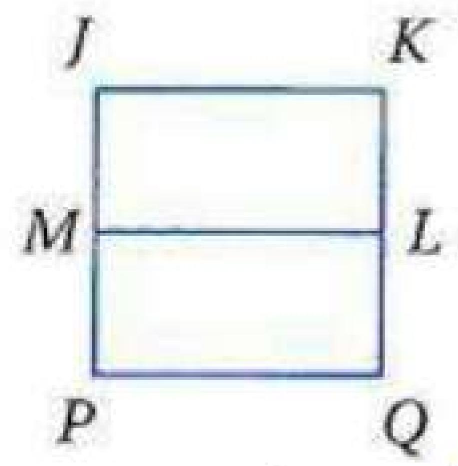
5) QRST معين. (إذا كان قطرا متوازي أضلاع متعامدين فإنه معين)

6) QRST مربع. (النظرية 1.2؛ إذا كان الشكل الرباعي مستطيلاً ومعيناً فإنه مربع)

13) المعطيات: $JKQP$ مربّع.

$\overline{ML}$ تنصّف كلًّا من $\overline{JP}$ و $\overline{KQ}$.

المطلوب: $JKLM$ متوازي أضلاع.



البرهان: العبارات (المبررات):

1) JKQP مربع. $\overline{ML}$ تنصف كلاً من $\overline{JP}$ و $\overline{KQ}$. (معطيات)

2) JKQP متوازي أضلاع. (جميع المربعات متوازيات أضلاع)

3) $\overline{JK} \parallel \overline{ML}$ (تعريف متوازي الأضلاع)

4) $\overline{JP} \cong \overline{KQ}$ (الأضلاع المتقابلة لمتوازي الأضلاع متطابقة)

5) $JP = KQ$ (تعريف تطابق القطع المستقيمة)

6) $JM = MP, KL = LQ$ (تعريف المنصف)

7) $JP = JM + MP, KQ = KL + LQ$ (مسلمة جمع القطع المستقيمة)

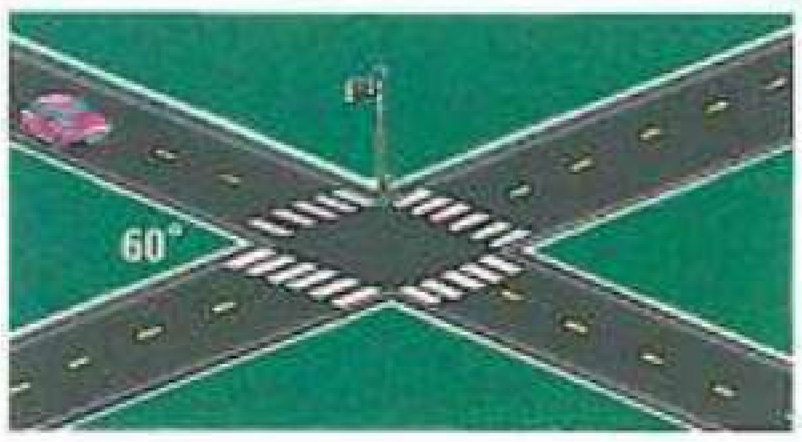
8) $JP = 2JM , KQ = 2KL$ (بالتعويض)

9) $2JM = 2KL$ (بالتعويض)

10) $JM = KL$ (خاصية القسمة)

11) $KL = JM$ (تعريف تطابق القطع المستقيمة)

12) JKLM متوازي أضلاع. (إذا وجد ضلعان متقابلان في شكل رباعي متطابقين ومتوازيين فإنه متوازي أضلاع)



14) **طرق:** يتقاطع طريقان كما في الشكل. إذا كانت ممرّات المشاة لها الطول نفسه، فصنّف الشكل الرباعيّ المكوّن من هذه الممرات. ووضّح تبريرك.

معين؛ قياس الزاوية المتكونة بين الشارعين 60°، والزاويتان المتقابلتان بالرأس متطابقتان، لذلك فقياس إحدى زوايا الشكل الرباعي 29° وبما أن لممري المشاة الطول نفسه فإن أضلاع الشكل الرباعي متطابقة، لذلك فإنها تشكل معيناً.

15) **زراعة:** حدّد مزارع حقلًا بأوتاد وحبال كما في الشكل المجاور. إذا كانت أضلاع الشكل الرباعي المتشكل متساوية الطول، وقطراه متعامدين، فهل هذه المعلومات كافية كي تتحقق من أنّ الحقل مربع؟ وضح تبريرك.

لا؛ إجابة ممكنة: بما أن الأضلاع الأربعة للشكل الرباعي متطابقة وقطريه متعامدان، فإن الشكل مربع أو معين. وللتحقق من أن الحقل مربع يحتاج المزارع إلى إثبات أن القطرين متطابقان.

هندسة إحداثيّة: حدد ما إذا كان $\square JKLM$ المعطاة إحداثيات رؤوسه في كل مما يأتي معينًا أو مستطيلًا أو مربعًا. اكتب جميع التسميات التي تنطبق عليه. ووضح إجابتك.

16) $J(-4, -1), K(1, -1), L(4, 3), M(-1, 3)$

أولاً: استعمل صيغة المسافة بين نقطتين للمقارنة بين طولي القطرين.

$$JL = \sqrt{(-4-4)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{80}$$

$$KM = \sqrt{(1+1)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{20}$$

بما أن القطران JL, KM ليس متساويان إذن هما غير متطابقان إذن الشكل ليس مستطيل وليس مربع

ثانيا: استعمل صيغة الميل لتحديد ما إذا كان القطران متعامدان

ميل: $\overline{JL} = \frac{-4-4}{-1-3} = \frac{-8}{-4} = 2$

ميل: $\overline{KM} = \frac{1+1}{-1-3} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$

بما أن حاصل ضرب الميلين = -1 فإن القطرين متعامدان لذا فأن JKLM معين.

إذن الشكل معين ، لأن قطريه متعامدان وغير متطابقين.

17) $J(-3, -2), K(2, -2), L(5, 2), M(0, 2)$

أولاً: استعمل صيغة المسافة بين نقطتين للمقارنة بين طولي القطرين.

$$JL = \sqrt{(-3-5)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{80}$$

$$KM = \sqrt{(2-0)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{20}$$

بما أن القطران JL , KM ليس متساويان إذن هما غير متطابقان إذن الشكل JKLM ليس مستطيل وليس مربع

ثانيا: استعمل صيغة الميل لتحديد ما إذا كان القطران متعامدان

ميل: $\overline{JL} = \frac{-3-5}{-2-2} = \frac{-8}{-4} = 2$

ميل: $\overline{KM} = \frac{2-0}{-2-2} = \frac{2}{-4} = \frac{-1}{2}$

بما أن حاصل ضرب الميلين = -1 فإن القطرين متعامدان لذا فأن JKLM معين.

إذن الشكل معين ، لأن قطريه متعامدان وغير متطابقين.

18) $J(-2, -1), K(-4, 3), L(1, 5), M(3, 1)$

أولاً: استعمل صيغة المسافة بين نقطتين للمقارنة بين طولي القطرين.

$$JL = \sqrt{(-2-1)^2 + (-1-5)^2} = \sqrt{45}$$

$$KM = \sqrt{(-4-3)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{53}$$

بما أن القطران JL , KM ليس متساويان إذن هما غير متطابقان إذن الشكل JKLM ليس مستطيل وليس مربع

ثانيا: استعمل صيغة الميل لتحديد ما إذا كان القطران متعامدان

ميل: $\overline{JL} = \frac{-2-1}{-1-5} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

ميل: $\overline{KM} = \frac{-4-3}{3-1} = \frac{-7}{2}$

بما أن حاصل ضرب الميلين $\neq -1$ فإن القطرين غير متعامدان لذا فأن JKLM ليس معين.

إذن الشكل لاشئ ، لأن قطريه غير متعامدان وغير متطابقين.

19) $J(-1, 1), K(4, 1), L(4, 6), M(-1, 6)$

أولاً: استعمل صيغة المسافة بين نقطتين للمقارنة بين طولي القطرين.

$$\overline{JL} = \sqrt{(-1-4)^2 + (1-6)^2} = \sqrt{50}$$

$$\overline{KM} = \sqrt{(4+1)^2 + (1-6)^2} = \sqrt{50}$$

بما أن القطران $\overline{JL}$, $\overline{KM}$ متساويان إذن هما متطابقان إذن الشكل مستطيل

ثانيا: استعمل صيغة الميل لتحديد ما إذا كان القطران متعامدان

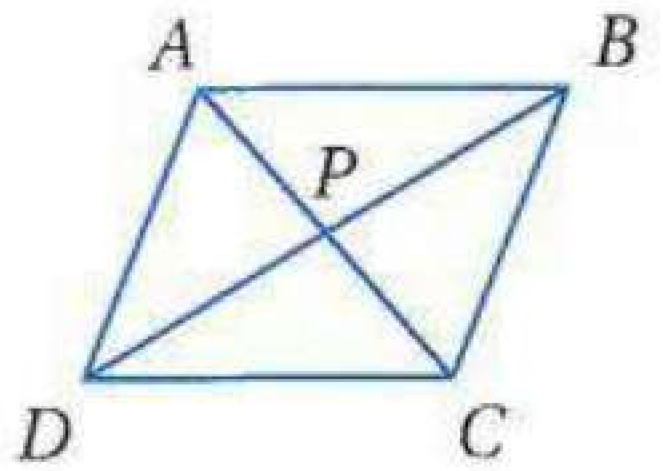
ميل: $\overline{JL} = \frac{-1-4}{1-6} = \frac{-5}{-5} = 1$

ميل: $\overline{KM} = \frac{4+1}{1-6} = \frac{-5}{-5} = \frac{5}{-5} = -1$

بما أن حاصل ضرب الميلين $= -1$ فإن القطرين متعامدان لذا فأن JKLM معين.

إذن الشكل مستطيل ومعين ومربع؛ لأن جميع أضلاعه متطابقة وجميع زواياه قوائم.

في المعين $ABCD$ ، إذا كان $m\angle ABD = 24^\circ$ ،$PB = 12, AB = 15$، فأوجد كلًا مما يأتي :



AP (20

بما أن الشكل معين إذن القطران متعامدان إذن ΔAPB قائم الزاوية وباستخدام فيثاغورث ينتج أن:

$$(AB)^2 = (AP)^2 + (PB)^2$$

$$(15)^2 = (AP)^2 + (12)^2$$

$$225 = (AP)^2 + 144$$

$$(AP)^2 = 81$$

$$AP = 9$$

CP (21

$$AP = CP = 9$$

$m\angle BDA$ (22

من خصائص المعين أن الأضلاع المتجاورة متطابقة وبالتالي يكون ΔADB متطابق الضلعين وبالتالي يكون زوايا القاعدة متساوية

$$\because AB = AD$$

$$\angle ABD = \angle BDA = 24^\circ$$

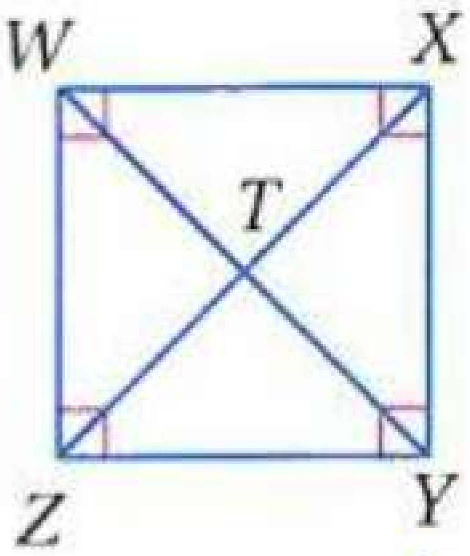
$m\angle ACB$ (23

$$\angle DCB = 180 - (\angle DBC + \angle BDC)$$

$$\angle DCB = 180 - (24 + 24)$$

$$\angle DCB = 132$$

$$\angle ACB = \frac{132}{2} = 66^\circ$$



في المربع $WXYZ$، إذا كان $WT = 3$، فأوجد كلًّا مما يأتي :

ZX (24

من خصائص المربع القطران متطابقان وينصف كل منهما الأخر

$$WT = TY = 3$$
$$WY = 2 \times 3 = 6$$
$$WY = ZX = 6$$

XY (25

$$(XY)^2 = (XT)^2 + (TY)^2$$
$$(XY)^2 = (3)^2 + (3)^2$$
$$(XY)^2 = 18$$
$$XY = 3\sqrt{2}$$

$m\angle WTZ$ (26

من خصائص المربع أن قطراه متعامدان

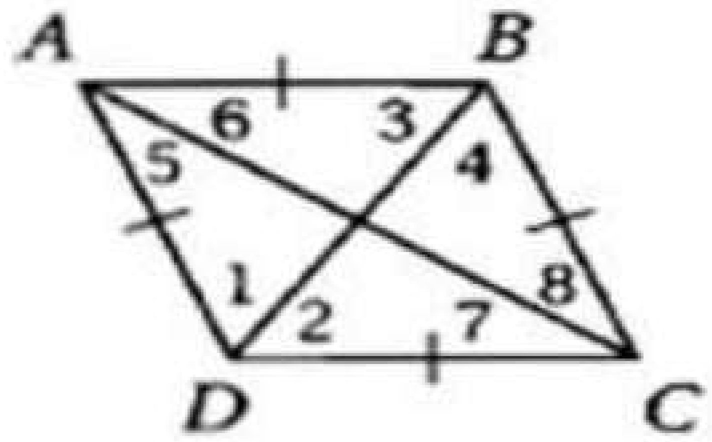
$$\angle WTZ = 90^\circ$$

$m\angle WYX$ (27

$$\angle WYX = \frac{90}{2} = 45^\circ$$

برهان: اكتب برهانًا حرًّا لكل مما يأتي :

28) النظريّة 5.16



المعطيات: ABCD معين

المطلوب: إثبات أن كل قطر ينصف زاويتين متقابلتين

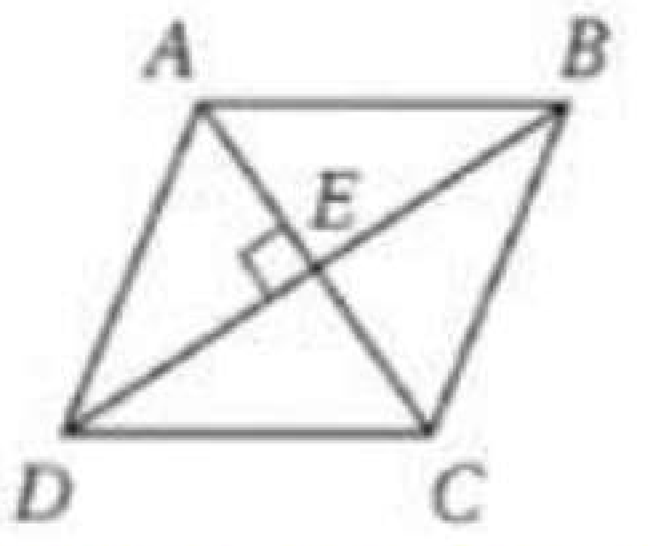
البرهان:

نعلم أن ABCD معين. وحسب تعريف المعين يكون ABCD متوازي أضلاع. وبما أن الزوايا المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة، فإن $\angle ADC \cong \angle ABC$ و $\angle BCD \cong \angle BAD$. ولأن جميع أضلاع المعين متطابقة فإن $\overline{DA} = \overline{CD} \cong \overline{BC} \cong \overline{AB}$ وحسب SAS يكون $\Delta ADC \cong \Delta ABC$ إذن $\angle 6 \cong \angle 5$ و $\angle 8 \cong \angle 7$ لأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة. وكذلك $\Delta BCD \cong \Delta BAD$ حسب SAS. ولذا $\angle 4 \cong \angle 3$ و $\angle 2 \cong \angle 1$ لأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة. ومن تعريف منصف الزاوية، فإن كل قطر ينصف زاويتين متقابلتين.

29) النظريّة 5.17

المعطيات: ABCD متوازي أضلاع؛ $\overline{BD} \perp \overline{AC}$.

المطلوب: ABCD معين.



البرهان: نعلم أن ABCD متوازي أضلاع، وبما أن قطري متوازي الأضلاع ينصف كل منهما الآخر، فإن $\overline{EC} \cong \overline{AE}$. وكذلك $\overline{BE} \cong \overline{BE}$ لأن تطابق القطع المستقيمة يحقق خاصية الانعكاس.

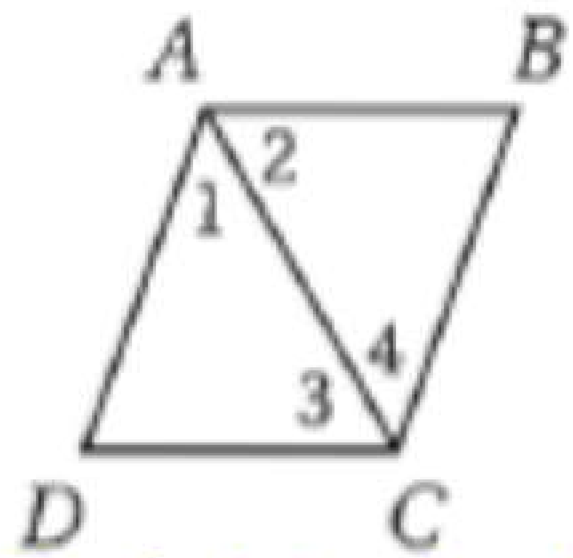
ونعلم أيضاً أن $\overline{BD} \perp \overline{AC}$. إذن $\angle AEB$ و $\angle BEC$ قائمتان حسب تعريف المستقيمين المتعامدين.

إذن $\angle BEC \cong \angle AEB$ لأن جميع الزوايا القائمة متطابقة

لذلك $\Delta AEB \cong \Delta BEC$ بحسب SAS.
إذن $\overline{AB} \cong \overline{CB}$ لأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة.
وبما أن الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة.
فإن $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ و $\overline{AD} \cong \overline{CB}$ إذن $\overline{AD} \cong \overline{CB} \cong \overline{CD} \cong \overline{AB}$ تطابق القطع المستقيمة يحقق خاصية التعدي.
وبما أن جميع أضلاع الشكل ABCD متطابقة، فإنه معين حسب التعريف.

30) النظرية 5.18

30) المعطيات: ABCD متوازي أضلاع، القطر $\overline{AC}$ ينصف كلاً من $\angle DAB$, $\angle BCD$.
المطلوب: ABCD معين.

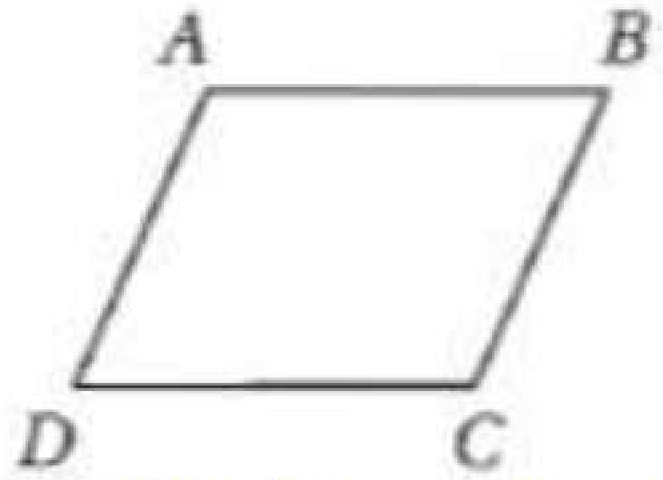


البرهان: نعلم أن ABCD متوازي أضلاع
وبما أن الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع متوازية، فإن $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$.
وحسب التعريف $\angle 2$ و $\angle 3$ متبادلتان داخلياً بالنسبة للضلعين المتوازيين $\overline{AB}$ و $\overline{DC}$.
وبما أن الزاويتين المتبادلتين داخلياً متطابقتان، فإن $\angle 3 \cong \angle 2$
ولأن تطابق الزوايا يحقق خاصية التماثل، فإن $\angle 2 \cong \angle 3$ ونعلم أن $\overline{AC}$ تنصف كل من $\angle DAB$ و $\angle BCD$، إذن $\angle 2 \cong \angle 1$ و $\angle 4 \cong \angle 3$ حسب التعريف.
ومن خاصية التعدي $\angle 3 \cong \angle 1$ و $\angle 4 \cong \angle 2$
ولأن الأضلاع المقابلة للزوايا المتطابقة في مثلث تكون متطابقة، فإن
$\overline{DC} \cong \overline{BC}$ و $\overline{AD} \cong \overline{AB}$
إذن ولأن ضلعين متجاورين في متوازي الأضلاع متطابقان فإن ABCD معين.

31) النظريّة 5.19

المعطيات: ABCD متوازي أضلاع، $\overline{AB} \cong \overline{BC}$

المطلوب: ABCD معين.

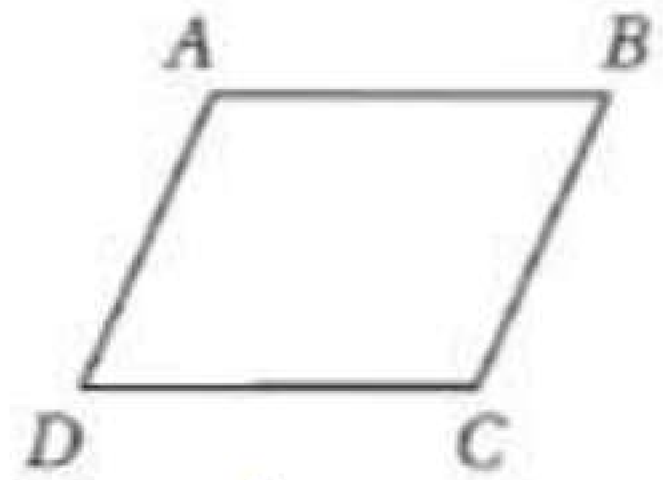


البرهان: بما أن الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة، فإن $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ و $\overline{AB} \cong \overline{CD}$. ونعلم أيضاً أن $\overline{AB} \cong \overline{BC}$
وحسب خاصية التعدي تكون $\overline{CD} \cong \overline{BC}$. إذن $\overline{BC} \cong \overline{CD} \cong \overline{AB} \cong \overline{AD}$
لذلك ABCD معين حسب التعريف.

32) النظريّة 5.20

المعطيات: ABCD مستطيل ومعين.

المطلوب: ABCD مربع.



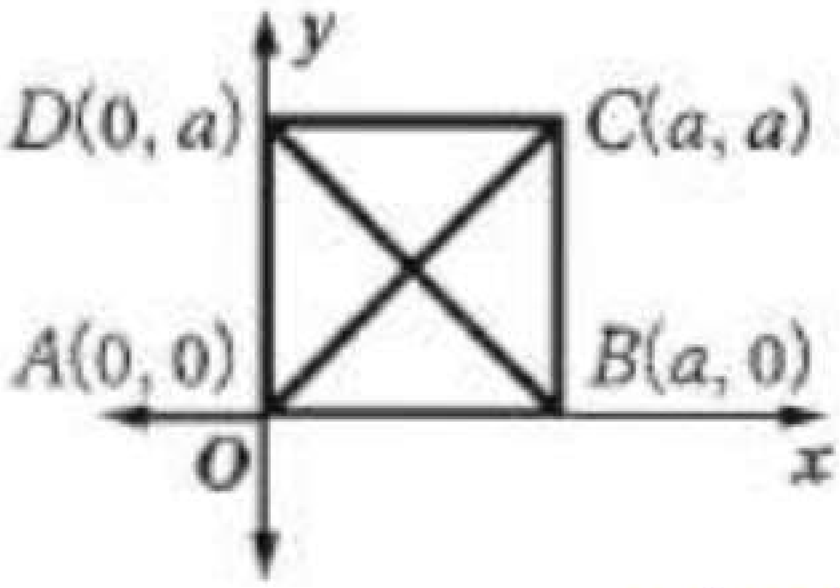
البرهان: نعلم أن ABCD مستطيل ومعين.
إذن ABCD متوازي أضلاع أيضاً لأن جميع المستطيلات والمعينات متوازي أضلاع. وحسب تعريف المستطيل فإن $\angle D$, $\angle C$, $\angle B$, $\angle A$ جميعها قوائم.
وحسب تعريف المعين، جميع الأضلاع متطابقة، لذلك ABCD مربع لأنه متوازي أضلاع أضلاعه الأربعة متطابقة وزواياه الأربع قوائم.

برهان: اكتب برهانًا إحداثيًّا للعبارة في كل من السؤالين الآتيين :

33) قطرا المربّع متعامدان.

المعطيات: ABCD مربع.

المطلوب: $\overline{AC} \perp \overline{DB}$



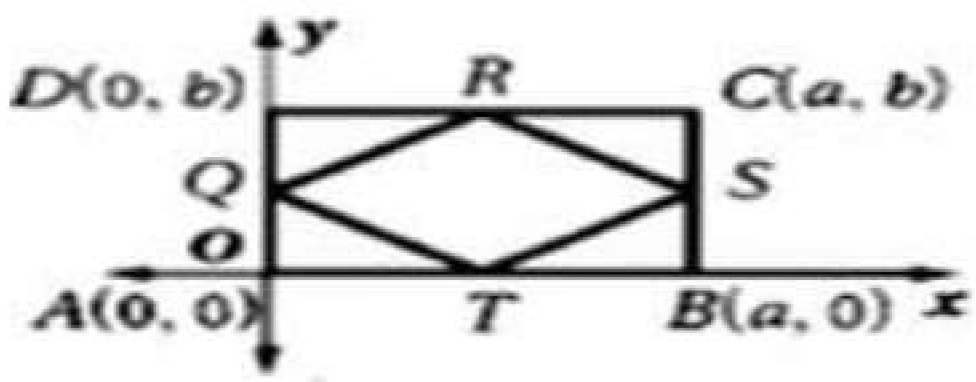
البرهان:

ميل $\overline{DB}$: $m = \frac{0-a}{a-0} = -1$

ميل $\overline{AC}$: $m = \frac{0-a}{0-a} = 1$

بما أن ميل $\overline{AC}$ يساوي سالب مقلوب ميل $\overline{DB}$ ، فإنهما متعامدان.

34) تشكِّل القطع المستقيمة الواصلة بين منتصفات أضلاع مستطيل معيّنًا.



المعطيات: ABCD مستطيل T, S, R, Q منتصفات أضلاع المستطيل.

المطلوب: QRST معين

البرهان: إحداثيات نقطة المنتصف Q هي:

$$\left(\frac{0+0}{2}, \frac{b+0}{2}\right) = \left(0, \frac{b}{2}\right)$$

إحداثيات نقطة المنتصف R هي:

$$\left(\frac{a+0}{2}, \frac{b+b}{2}\right) = \left(\frac{a}{2}, \frac{2b}{2}\right) = \left(\frac{a}{2}, b\right)$$

إحداثيات نقطة المنتصف T هي:

$$\left(\frac{a+0}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = \left(\frac{a}{2}, 0\right)$$

$$QR = \sqrt{\left(\frac{a}{2}-0\right)^2+\left(b-\frac{b}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

$$RS = \sqrt{\left(a-\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}-b\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(-\frac{b}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

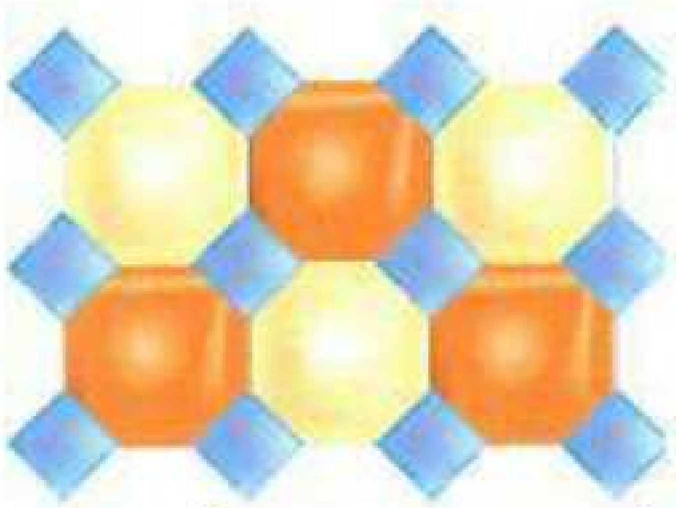
$$ST = \sqrt{\left(a-\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}-0\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

$$QT = \sqrt{\left(\frac{a}{2}-0\right)^2+\left(0-\frac{b}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(-\frac{b}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

بما أن $QR = RS = ST = QT$ فإن $\overline{RQ} \cong \overline{RS} \cong \overline{QT} \cong \overline{ST}$

إذن $QRST$ معين



35) **تصميم:** يتكون نمط الفسيفساء المبين جانبًا من قطع ثمانيّة منتظمة وأخرى رباعيّة. صنِّف الأشكال الرباعيّة في النمط، ووضح تبريرك.

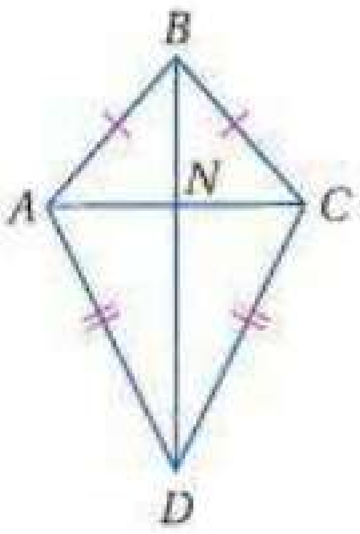
35) مربعات: إجابة ممكنة: بما أن الثمانيات منتظمة فإن الأضلاع متطابقة وتشترك الأشكال الرباعية مع الثمانيات في أضلاع، لذا فإن الأشكال الرباعية معينات أو مربعات.

وزوايا رؤوس الأشكال الرباعية تتكون من الزوايا الخارجية لأضلاع الثمانيات المجاورة للرؤوس.

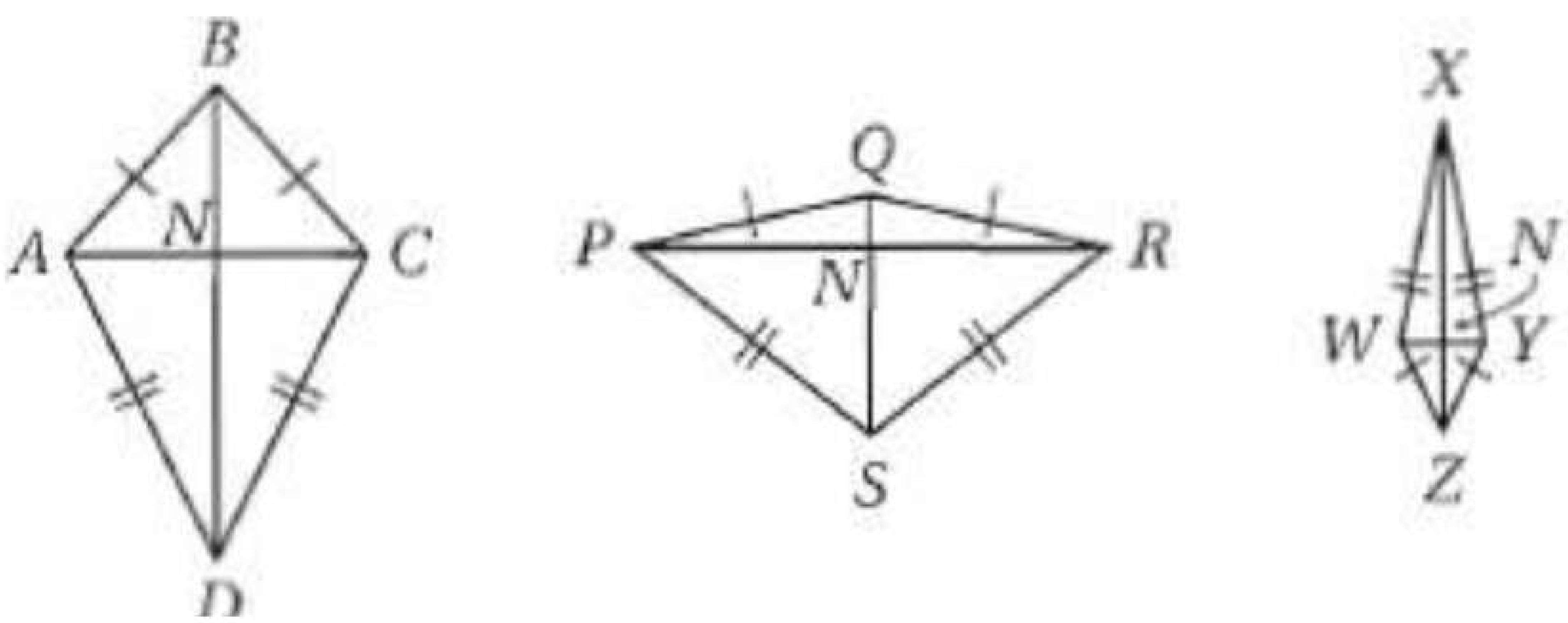
ومجموع قياسات الزوايا الخارجية لأي مضلع يساوي 360° دائماً، ولأن الثماني المنتظم له 8 زوايا خارجية متطابقة

فإن قياس كل منها يساوي 45° وكما هو مبين في الشكل فإن قياس كل زاوية للأشكال الرباعية في النمط يساوي $45^{\circ} + 45^{\circ}$ أو 90° لذلك فالشكل الرباعي يكون مربعاً

(36 **تمثيلات متعددة:** سوف تستقصي في هذه المسألة خصائص شكل الطائرة الورقيّة، وهو شكل رباعي يتكون من زوجين متمايزين من الأضلاع المتجاورة والمتطابقة.



a) **هندسيًّا:** ارسم قطعةً مستقيمةً، ثم افتح الفرجار وثبته عند أحد طرفيها وارسم قوسًا فوقها، ومن دون تغيير فتحة الفرجار، ثبّت رأس الفرجار عند الطرف الآخر للقطعة المستقيمة، وارسم قوسًا يقطع القوس السابق. غيِّر فتحة الفرجار وارسم قوسين أسفل القطعة المستقيمة كما فعلت سابقًا.
استعمل المسطرة وصل بين طرفَي القطعة والأقواس، وسينتج لك شكل طائرة ورقية سمّها $ABCD$. ثم كرِّر ذلك مرتين، وسمِّ شكلي الطائرتين الورقيتين $PQRS$, $WXYZ$، ثم ارسم قطري كل منهما، ولتكن نقطة تقاطع قطري كل منها N.



b) **جدوليًّا:** استعمل مسطرة لقياس المسافة من N إلى كل رأس.
وسجِّل النتائج في جدول على النحو الآتي.

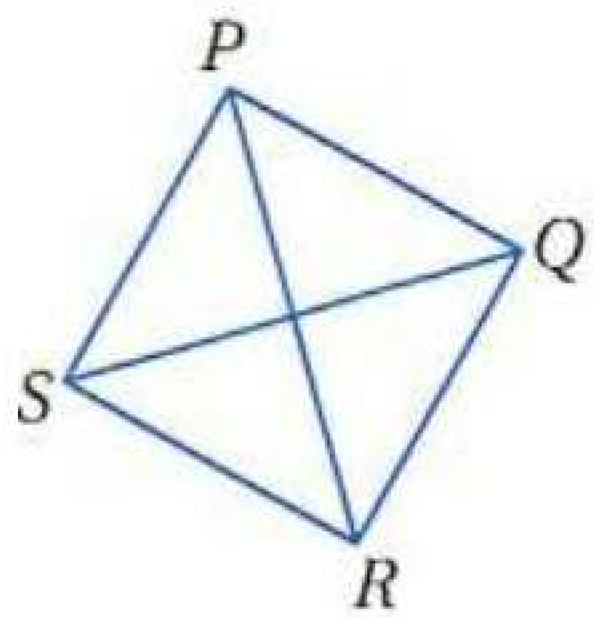
الشكل	المسافة من N إلى كل رأس على القطر الأقصر		المسافة من N إلى كل رأس على القطر الأطول	
$ABCD$	0.8 cm	0.8 cm	0.9 cm	1.5 cm
$PQRS$	1.2 cm	1.2 cm	0.3 cm	0.9 cm
$WXYZ$	0.2 cm	0.2 cm	1.1 cm	0.4 cm

c) **لفظيًّا:** اكتب تخمينًا حول قطري شكل الطائرة الورقيّة.

القطر الأول في شكل الطائرة الورقية ينصف القطر الآخر.

مسائل مهارات التفكير العليا:

37) **اكتشف الخطأ:** في الشكل الرباعي $SRQP$ المبين جانبًا، $\overline{PR} \cong \overline{QS}$.
قال محمد: إن الشكل مربّع. بينما قال إبراهيم: إنه معيّن.
هل أي منهما على صواب؟ وضّح تبريرك.



كلاهما خطأ؛ بما أنهما لا يعلمان أن أضلاع لشكل الرباعي متطابقة، فلا يمكن استنتاج أن الشكل مربع أو معين.

38) **تبرير:** حدد ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أم خطأ؟ ثم اكتب عكسها ومعكوسها ومعاكسها الإيجابي، وحدد قيمة الصواب لكل منها. وضّح تبريرك.

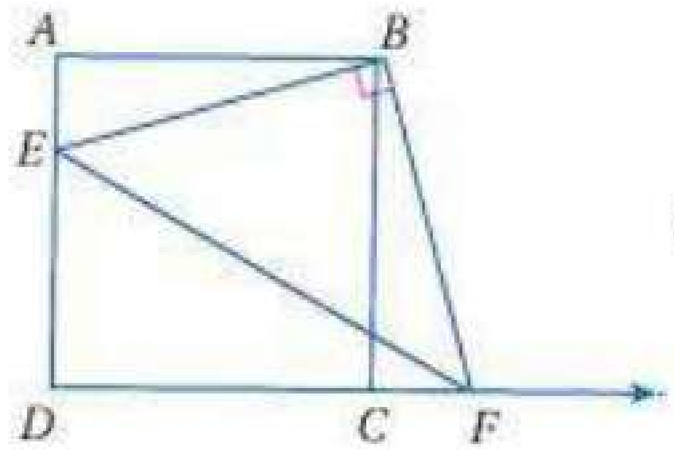
إذا كان الشكل الرباعي مربّعًا فإنّه مستطيل.

صحيحة؛ بما أن المستطيل شكل رباعي زواياه الأربع قائمة، والمربع مستطيل ومعين؛ فإن المربع يكون مستطيلاً دائماً.

العكس: إذا كان شكل رباعي مستطيلاً فإنه مربع. خطأ، المستطيل شكل رباعي زواياه الأربع قوائم. وأضلاعه المتقابلة متطابقة، وليست جميع أضلاعه متطابقة بالضرورة. إذن فهو ليس مربعاً بالضرورة.

المعكوس: إذا كان الشكل الرباعي ليس مربعاً فإنه ليس مستطيلاً. خطأ، الشكل الرباعي الذي زواياه الأربع قائمة وأضلاعه المتقابلة ليس مربعاً ولكنه مستطيل.

المعاكس الإيجابي: إذا كان شكل رباعي ليس مستطيلاً، فإنه ليس مربعاً، صحيحة؛ إذا كان شكل رباعي ليس مستطيلاً فإنه ليس مربعاً حسب التعريف.



39) **تحدّ:** مساحة المربّع $ABCD$ تساوي 36 وحدة مربّعة. ومساحة $\triangle EBF$ تساوي 20 وحدة مربّعة. إذا كانت $\overline{BF} \perp \overline{EB}$، وطول $\overline{AE}$ يساوي وحدتين، فأوجد طول $\overline{CF}$.

مساحة المربع = 36 ← طول ضلع المربع = 6 وحدات
باستخدام فيثاغورث

ΔABE

$$EB = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

مساحة المثلث = 20

$$\frac{1}{2} \times BF \times 2\sqrt{10} = 20$$

$$BF = \frac{20}{\sqrt{10}}$$

$$BF = 2\sqrt{10}$$

باستخدام فيثاغورث

ΔBCF

$$CF^2 = \left(2\sqrt{10}\right)^2 - 6^2 = 4$$

$$CF = \sqrt{4} = 2$$

40) **مسألة مفتوحة:** أوجد إحداثيات رؤوس مربّع قطراه محتويان في المستقيمين $y = -x + 6$, $y = x$. وضّح تبريرك.

(0, 0), (6, 0), (0, 6), (6, 6)؛ القطران متعامدان، لذا فإن أي أربع نقاط تبعد البعد نفسه عن نقطة تقاطع القطرين تشكل رؤوس مربع.

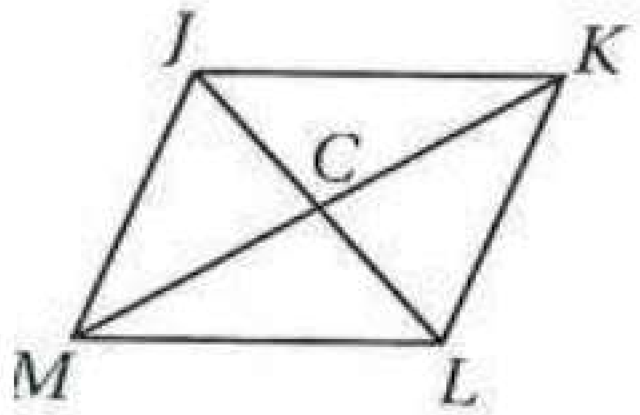
41) **اكتب:** قارن بين جميع خصائص الأشكال الرباعيّة الآتية : متوازي الأضلاع، المستطيل، المعيّن، المربّع.

متوازي الأضلاع: الأضلاع المتقابلة لمتوازي الأضلاع متوازية ومتطابقة. والزوايا المتقابلة متطابقة. وقطراه ينصف كل منهما الآخر وكل قطر يقسم متوازي الأضلاع إلى مثلثين متطابقين.
المستطيل: للمستطيل جميع خصائص متوازي الأضلاع. وزواياه الأربع قائمة، وقطراه متطابقان.

المعين: للمعين جميع خصائص متوازي الأضلاع، وجميع أضلاعه متطابقة، وقطراه متعامدان وينصفان زوايا المعين.
المربع: للمربع جميع خصائص متوازي الأضلاع وخصائص المستطيل وخصائص المعين.

تدريب على الاختبار المعياري

42) في المعين $JKLM$، إذا كان $CK = 8$، $JK = 10$، فأوجد JC.



A 4   **C** 8

B 6   **D** 10

B : 6

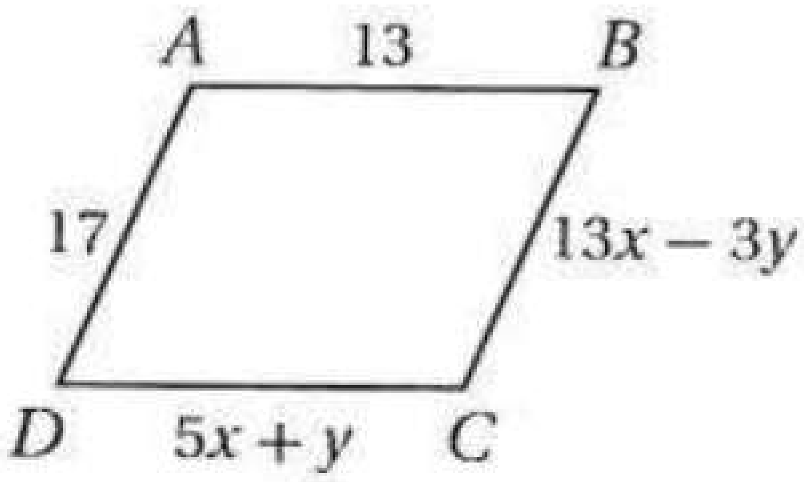
$$(JK)^2 = (CK)^2 + (JC)^2$$

$$(10)^2 = (8)^2 + (JC)^2$$

$$(JC)^2 = 100 - 64 = 36$$

$$JC = 6$$

43) جبر: ما قيمة كل من x, y بحيث يكون $ABCD$ متوازي أضلاع؟



F $x = 3, y = 2$

G $x = \frac{3}{2}, y = -1$

H $x = 2, y = 3$

J $x = 3, y = -1$

$$H : x = 2, y = 3$$

$$13 = 5x + y \rightarrow y = 13 - 5x$$

$$17 = 13x - 3y$$

$$17 = 13x - 3(13 - 5x)$$

$$17 = 13x - 39 + 15x$$

$$17 + 39 = 28x$$

$$28x = 56$$

$$x = 2$$

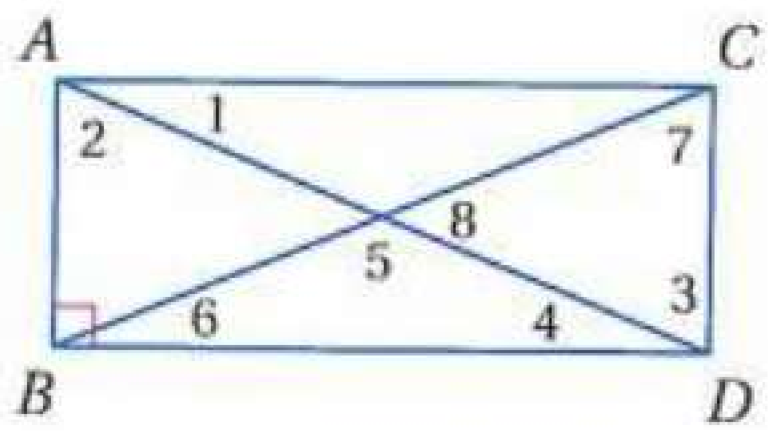
$$y = 13 - 5x$$

$$y = 13 - 10 = 3$$

مراجعة تراكمية

في المستطيل $ABDC$ ، إذا كان $m\angle 1 = 38°$. فأوجد كلًّا من القياسات الآتية :

(44 $m\angle 2$



$\angle 1 + \angle 2 = 90°$

$38° + \angle 2 = 90°$

$\angle 2 = 90 - 38 = 52°$

(45 $m\angle 5$

$\angle 5 = 180 - (\angle 4 + \angle 6)$

$\angle 6 = \angle 4 = \angle 1 = 38°$

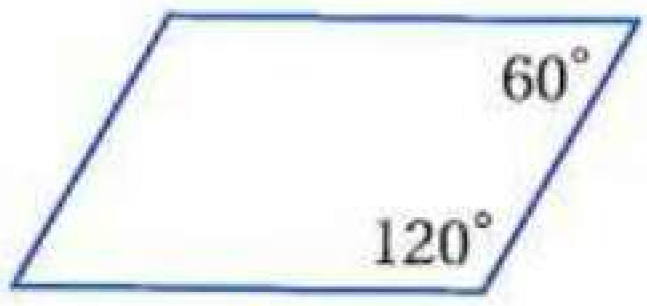
$\angle 5 = 180 - (38 + 38)$

$\angle 5 = 104°$

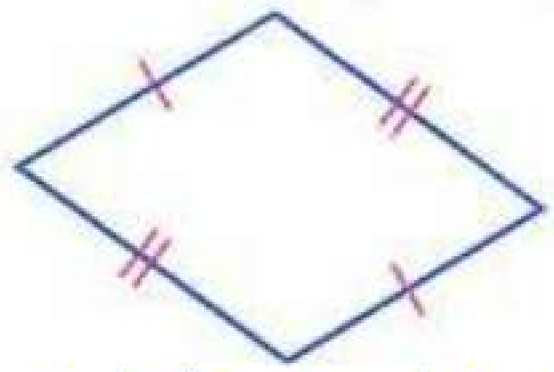
(46 $m\angle 6$

$\angle 6 = \angle ACB = 38°$

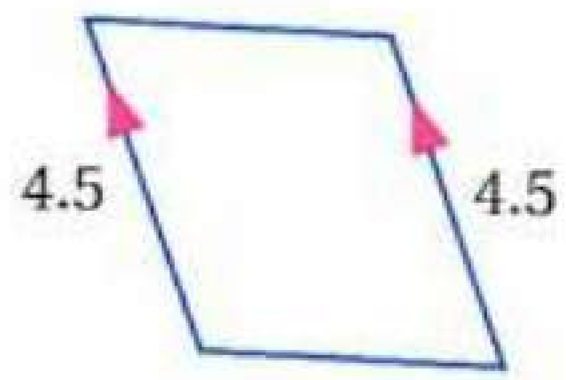
حدد ما إذا كان الشكل الرباعي في كل مما يأتي متوازي أضلاع أم لا؟ برّر إجابتك.

(47


لا؛ الشكل لا يحقق أيا من شروط متوازي الأضلاع.

(48


نعم؛ كل ضلعين متقابلين متطابقان.

(49


نعم؛ يوجد ضلعان متقابلان متوازيان ومتطابقان.

(50 **قياسات:** قال مروان: إنّ الحديقة الخلفيّة لمنزله على شكل مثلث أطوال أضلاعه 22 ft, 23 ft, 45 ft. فهل ترى أنّ هذه القياسات صحيحة؟ وضّح تبريرك.

لا؛ تنص نظرية متباينة المثلث على أن مجموع طولي أي ضلعين لمثلث يجب أن يكون أكبر من طول الضلع الثالث. وبما أن 45 = 23 + 22، فإن أطوال أضلاع حديقة منزل مروان لا يمكن أن تكون 22 ft، 23 ft، و45 ft.

استعد للدرس اللاحق

حل كل معادلة مما يأتي :

(51 $\frac{1}{2}(5x + 7x - 1) = 11.5$

$$\frac{1}{2}(5x + 7x - 1) = 11.5 \qquad \times 2$$

$$5x + 7x - 1 = 23$$

$$12x = 23 + 1$$

$$12x = 24$$

$$x = 2$$

$\frac{1}{2}(10x + 6x + 2) = 7$ (52

$$\frac{1}{2}(10x + 6x + 2) = 7 \qquad \times 2$$

$$10x + 6x + 2 = 14$$

$$16x = 12$$

$$x = \frac{12}{16}$$

$$x = \frac{3}{4}$$

$\frac{1}{2}(12x + 6 - 8x + 7) = 9$ (53

$$\frac{1}{2}(12x + 6 - 8x + 7) = 9 \qquad \times 2$$

$$12x + 13 - 8x = 18$$

$$4x + 13 = 18$$

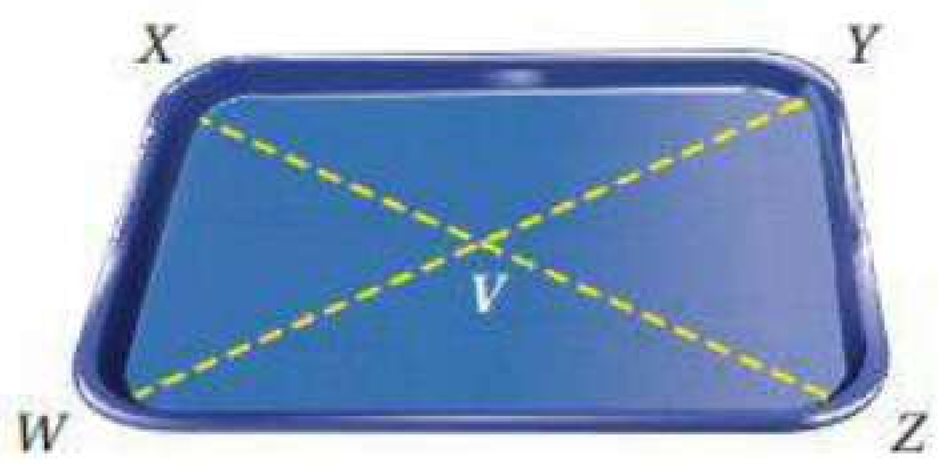
$$4x = 5$$

$$x = \frac{5}{4}$$

5-6 شبه المنحرف وشكل الطائرة الورقية

تحقق

1) **مطاعم:** لاستغلال مساحة الطاولات المربعة، تستعمل في مطعمٍ أطباقٌ على شكل شبه منحرف كما في الشكل المجاور. إذا كان $WXYZ$ شبه منحرف متطابق الساقين، وكان $m\angle YZW = 85°$, $WV = 15$ cm، $VY = 10$ cm، فأوجد كلًّا مما يأتي:



$m\angle XWZ$ (A

بما أن WXYZ شبه منحرف متطابق الساقين إذن زوايا القاعدة متساوية:

$$\angle XWZ + \angle YZW = 85^{\circ}$$

$m\angle WXY$ (B

بما أن WXYZ شبه منحرف متطابق الساقين إذن $\overline{XY}\ \square\ \overline{WZ}$

وباستخدام نظرية الزاويتين المتحالفتين ينتج أن:

$$\angle WXY + \angle XWZ = 180^{\circ}$$

$$\angle WXY + 85 = 180^{\circ}$$

$$\angle WXY = 95^{\circ}$$

XZ (C

بما أن WXYZ شبه منحرف متطابق الساقين إذن قطراه متطابقان:

$$\overline{XZ} = \overline{WY}$$

$$\overline{WY} = \overline{WV} + \overline{VY} = 10 + 15 = 25$$

$$\overline{XZ} = 25\text{cm}$$

XV (D

$\overline{XV} = 10cm$

2) رؤوس الشكل الرباعي $QRST$ هي $Q(-8, -4), R(0, 8), S(6, 8), T(-6, -10)$.

بيّن أن $QRST$ شبه منحرف، وحدد ما إذا كان متطابق الساقين؟

الخطوة1:

ميل $\overline{QR} = \frac{0+8}{8+4} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

ميل $\overline{ST} = \frac{6+6}{8+10} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$

بما أن ميل كل من $\overline{QR}, \overline{ST}$ متساويان إذن $\overline{QR} \parallel \overline{ST}$

ميل $\overline{RS} = \frac{0-6}{8-8} = \frac{-6}{0}$

ميل $\overline{QT} = \frac{-8+6}{-4+10} = \frac{-2}{6} = \frac{-1}{3}$

بما أن ميل كل من $\overline{RS}, \overline{QT}$ ليس متساويان إذن $\overline{RS} \nparallel \overline{QT}$ وبما أن

$QRST$ فيه ضلعان فقط متوازيان فهو شبه منحرف

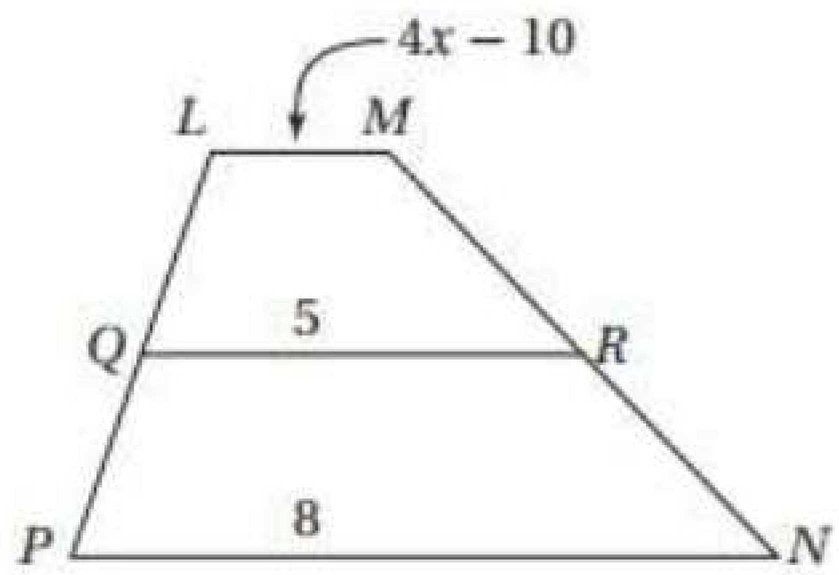
الخطوة2:

$$\overline{RS} = \sqrt{(0-6)^2 + (8-8)^2} = \sqrt{36} = 6$$

$$\overline{QT} = \sqrt{(-8+6)^2 + (-4+10)^2} = \sqrt{40}$$

بما أن $\overline{RS} \neq \overline{QT}$ فإن شبه المنحرف $QRST$ ليس متطابق الساقين

3) في الشكل أدناه، $\overline{QR}$ قطعة متوسطة لشبه المنحرف $LMNP$. ما قيمة x؟



$$QR = \frac{1}{2}(LM + PN)$$

$$5 = \frac{1}{2}(4x - 10 + 8)$$

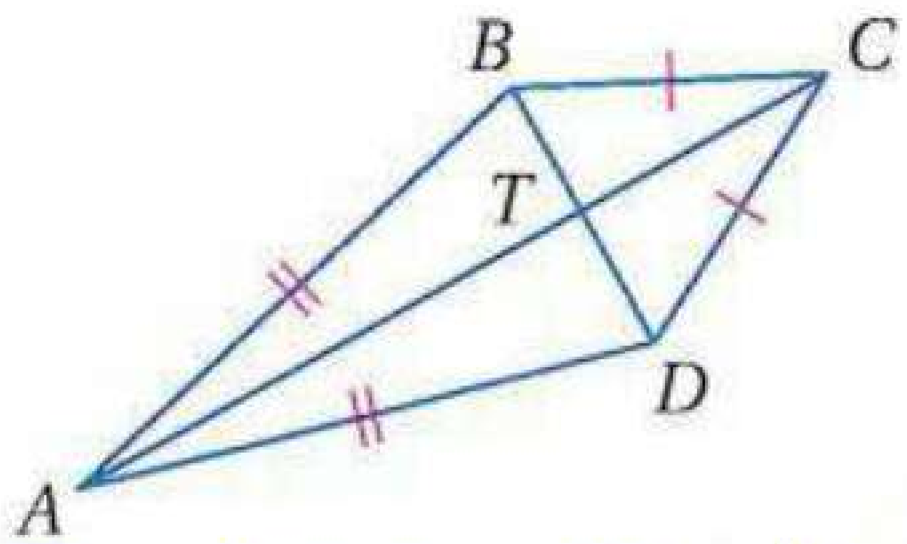
$$5 = 2x - 5 + 4$$

$$5 + 5 - 4 = 2x$$

$$6 = 2x$$

$$x = 3$$

4A) إذا كان $m\angle BCD = 50°$, $m\angle BAD = 38°$ ، فأوجد $m\angle ADC$.



بما أن $BC = CD$ إذن $\triangle BCD$ متطابق الضلعين وزاويا القاعدة متساوية

وبما أن $\angle BCD = 50°$

إذن: $\angle CDB = \dfrac{180 - 50°}{2} = 65°$

بما أن $AB = AD$ إذن $\triangle ABD$ متطابق الضلعين وزاويا القاعدة متساوية

وبما أن $\angle BAD = 38°$

إذن: $\angle BDA = \dfrac{180° - 38°}{2} = 71°$

$$\angle ADC = \angle CDB + \angle BDA$$

$$\angle ADC = 65° + 71° = 136°$$

4B) إذا كان $TC = 8$, $BT = 5$ ، فأوجد CD.

$$(BC)^2 = (BT)^2 + (TC)^2$$

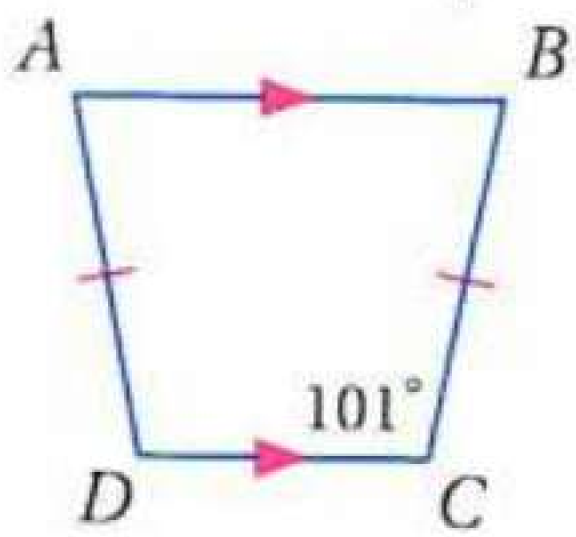
$$(BC)^2 = (5)^2 + (8)^2 = 89$$

$$BC = CD \approx 9.4$$

تأكد:

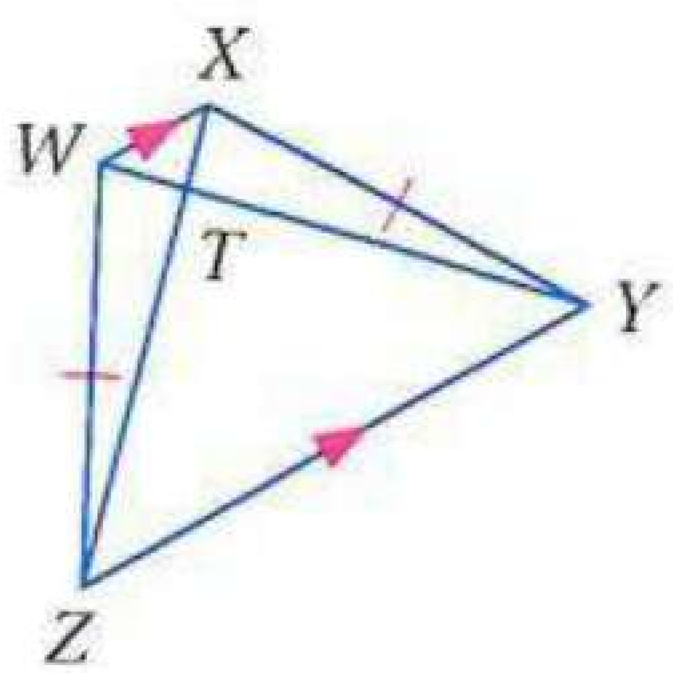
أوجد القياس المطلوب في كل من السؤالين الآتيين:

(1 $m\angle D$



بما أن $AB \parallel DC$ و $AD = BC$ إذن الشكل شبه منحرف متطابق الضلعين
وبالتالي يكون زوايا القاعدة متساوية
إذن $\angle D = \angle C = 101^\circ$

(2 WT، إذا كان:
$ZX = 20,\ TY = 15$



بما أن $WX \parallel ZY$ و $WZ = XY$ إذن الشكل شبه منحرف متطابق
الضلعين وبالتالي يكون قطراه متطابقان
إذن $XZ = WY$

$$20 = WY$$

$$20 = (WT + TY)$$

$$20 = WT + 15$$

$$WT = 20 - 15 = 5$$

هندسة إحداثية : رؤوس الشكل الرباعي $ABCD$ هي $C(3, 3), D(5, -1)$ ، $A(-4, -1), B(-2, 3)$.

3) بيّن أنّ $ABCD$ شبه منحرف.

ميل $\overline{AB} = \frac{-4+2}{-1-3} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$

ميل $\overline{CD} = \frac{3-5}{3+1} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$

بما أن ميل كل من $\overline{AB}, \overline{CD}$ ليس متساويان إذن $\overline{AB} \nparallel \overline{CD}$

ميل $\overline{BC} = \frac{3-3}{-2-3} = \frac{0}{-5}$

ميل $\overline{AD} = \frac{-1+1}{-4-5} = \frac{0}{-9}$

بما أن ميل كل من $\overline{AD}, \overline{BC}$ متساويان إذن $\overline{AD}$ □ $\overline{BC}$ إذن ABCD شبه منحرف

4) حدّد ما إذا كان $ABCD$ شبه منحرف متطابق الساقين ؟ وضح إجابتك.

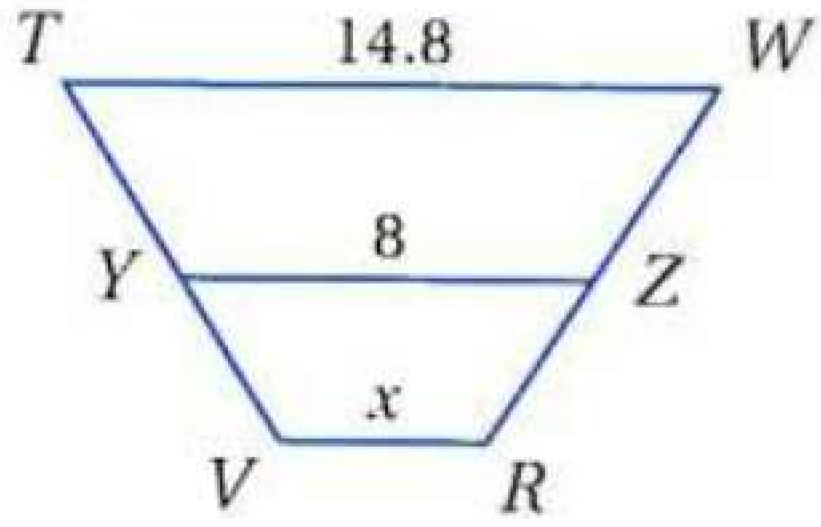
الخطوة2:

$$\overline{AB} = \sqrt{(-4+2)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{20}$$

$$\overline{CD} = \sqrt{(3-5)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{20}$$

بما أن $\overline{AB} = \overline{CD}$ فإن شبه المنحرف ABCD متطابق الساقين

5) **إجابة قصيرة:** في الشكل المجاور: $\overline{YZ}$ قطعة متوسطة لشبه المنحرف $TWRV$. أوجد قيمة x.



$$YZ = \frac{1}{2}(TW + ZR)$$

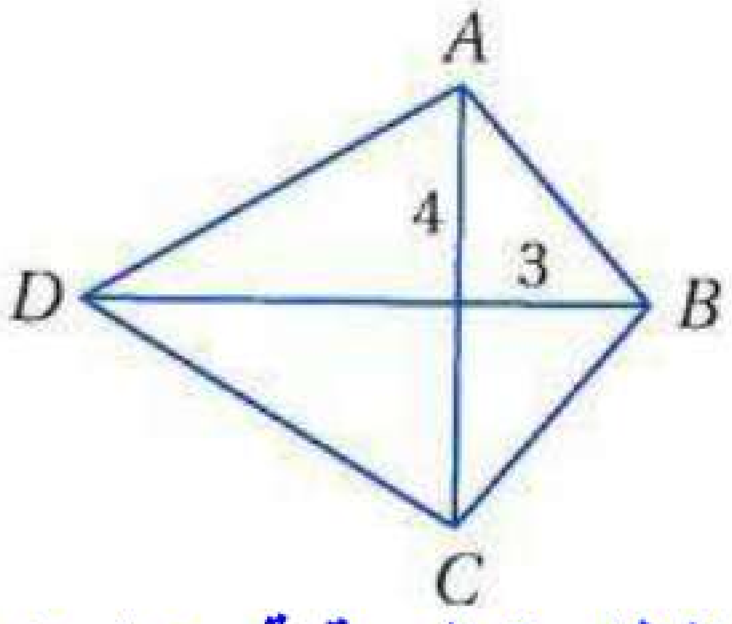
$$8 = \frac{1}{2}(14.8 + x)$$

$$16 = 14.8 + x$$

$$x = 16 - 14.8 = 1.2$$

إذا كان $ABCD$ على شكل طائرة ورقيّة، فأوجد القياس المطلوب في كل من السؤالين الآتيين:

6) AB

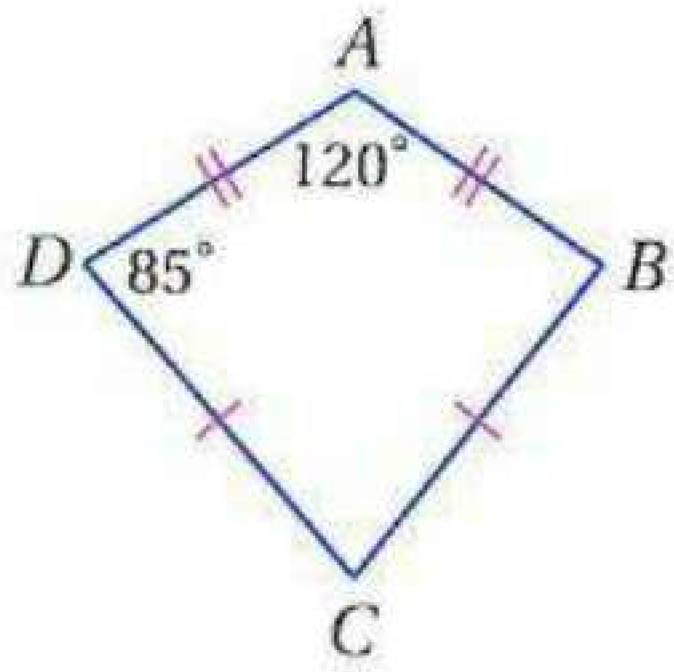


قطرا الطائرة الورقية متعامدان

$$(AB)^2 = (3)^2 + (4)^2 = 25$$

$$AB = 5$$

$m\angle C$ (7



بما أن الشكل رباعي إذن مجموع زواياه الداخلية = 360°

وبما أن الشكل طائرة ورقية إذن $\angle B = \angle D$

$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$$

$$120 + \angle B + \angle C + 85 = 360$$

$$\angle B = \angle D$$

$$120 + 85 + \angle C + 85 = 360$$

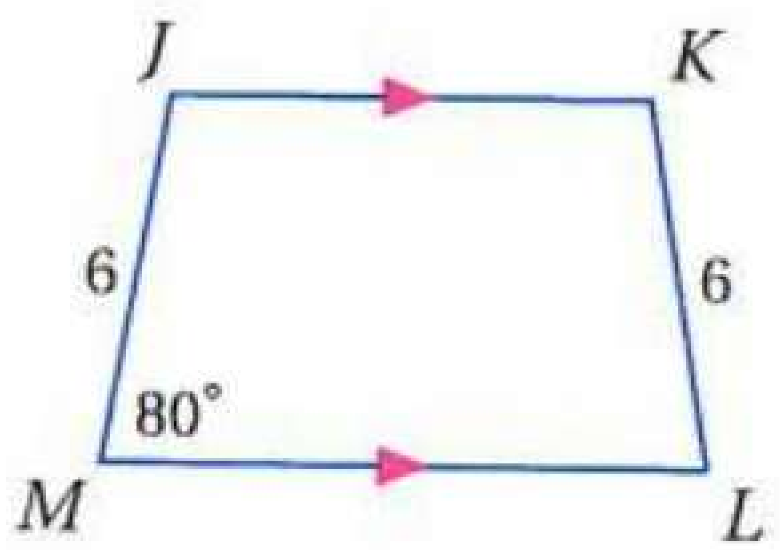
$$\angle C = 360 - 290$$

$$\angle C = 70^\circ$$

تدرب وحل المسائل:

أوجد القياس المطلوب في كل من السؤالين الآتيين:

8) $m\angle K$



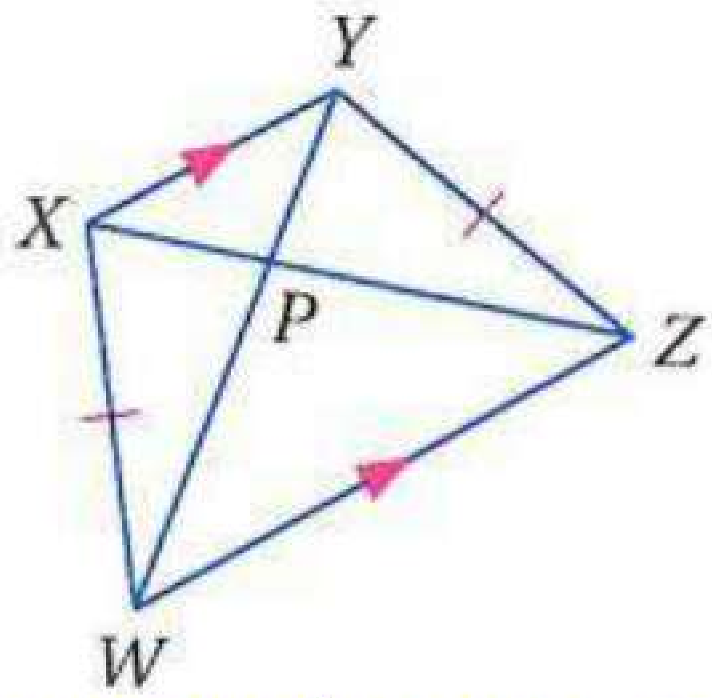
بما أن $JK \parallel ML$ و $KL = JM$ إذن الشكل شبه منحرف متطابق الضلعين
وبالتالي يكون زوايا القاعدة متساوية

$\angle J = 180 - 80 = 100$ نظرية الزوايا المتحالفة

$m\angle J = m\angle K = 100^\circ$

9) PW، إذا كان:

$XZ = 18, PY = 3$



بما أن $XY \parallel WZ$ و $YZ = XW$ إذن الشكل شبه منحرف متطابق الضلعين ويكون قطراه متطابقان

$XZ = WY$

$18 = YP + PW$

$18 = 3 + PW$

$PW = 18 - 3 = 15$

هندسة إحداثيّة: بيّن أن الشكل الرباعي المعطاة إحداثيات رؤوسه في كل مما يأتي شبه منحرف، وحدد ما إذا كان متطابق الساقين؟

(10 $A(-2, 5), B(-3, 1), C(6, 1), D(3, 5)$

الخطوة 1:

ميل $\overline{AB} = \dfrac{-2+3}{5-1} = \dfrac{1}{4}$

ميل $\overline{CD} = \dfrac{6-3}{1-5} = \dfrac{3}{-4}$

بما أن ميل كل من $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ ليس متساويان إذن $\overline{CD} \nparallel \overline{AB}$

ميل $\overline{BC} = \dfrac{1-1}{-3-6} = \dfrac{0}{-9} = 0$

ميل $\overline{AD} = \dfrac{5-5}{3+2} = \dfrac{0}{5} = 0$

بما أن ميل كل من $\overline{BC}$, $\overline{AD}$ متساويان إذن $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ وبما أن $ABCD$ فيه ضلعان فقط متوازيان فهو شبه منحرف

الخطوة 2:

$$\overline{AB} = \sqrt{(-2+3)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{17}$$

$$\overline{CD} = \sqrt{(6-3)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$ABCD$ هو شبه منحرف، ولكن ليس متطابق الساقين؛ لأن $AB = \sqrt{17}$, $CD = 5$.

11) $J(-4,-6), K(6,2), L(1,3), M(-4,-1)$

الخطوة 1:

$$\text{ميل } \overline{JK} = \frac{-4-6}{-6-2} = \frac{-10}{-8} = \frac{5}{4}$$

$$\text{ميل } \overline{ML} = \frac{1+4}{3+1} = \frac{5}{4}$$

بما أن ميل كل من $\overline{JK}, \overline{ML}$ متساويان إذن $\overline{JK} \parallel \overline{ML}$

$$\text{ميل } \overline{KL} = \frac{6-1}{2-3} = \frac{5}{-1} = -5$$

$$\text{ميل } \overline{JM} = \frac{-4+4}{-6+1} = \frac{0}{-5}$$

بما أن ميل كل من $\overline{KL}, \overline{JM}$ ليس متساويان إذن $\overline{KL} \nparallel \overline{JM}$ وبما أن
$JKLM$ فيه ضلعان فقط متوازيان وهما $\overline{JK}, \overline{ML}$ فهو شبه منحرف

الخطوة 2:

$$\overline{KL} = \sqrt{(6-1)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{26}$$

$$\overline{JM} = \sqrt{(-4+4)^2 + (-6+1)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$JKLM$ هو شبه منحرف، ولكن ليس متطابق الساقين؛
لأن $KL = \sqrt{26}, JM = 5$.

12) $Q(2, 5), R(-2, 1), S(-1, -6), T(9, 4)$

الخطوة1:

ميل $\overline{QR} = \dfrac{2+2}{5-1} = \dfrac{4}{4} = 1$

ميل $\overline{ST} = \dfrac{-1-9}{-6-4} = \dfrac{10}{10} = 1$

بما أن ميل كل من $\overline{QR}\,,\overline{ST}$ متساويان إذن $\overline{QR} \parallel \overline{ST}$

ميل $\overline{RS} = \dfrac{-2+1}{1+6} = \dfrac{-1}{7}$

ميل $\overline{QT} = \dfrac{2-9}{5-4} = \dfrac{-7}{1} = -7$

بما أن ميل كل من $\overline{RS}\,,\overline{QT}$ ليس متساويان إذن $\overline{RS} \nparallel \overline{QT}$ وبما أن QRST فيه ضلعان فقط متوازيان فهو شبه منحرف

الخطوة2:

$$\overline{RS} = \sqrt{(-2+1)^2 + (1+6)^2} = \sqrt{50}$$

$$\overline{QT} = \sqrt{(2-9)^2 + (5-4)^2} = \sqrt{50}$$

بما أن $\overline{RS} = \overline{QT}$ فإن شبه المنحرف QRST متطابق الساقين

QRST هو شبه منحرف متطابق الساقين

13) $W(-5,-1), X(-2,2), Y(3,1), Z(5,-3)$

الخطوة1:

ميل $\overline{WX} = \frac{-5+2}{-1-2} = \frac{-3}{-3} = 1$

ميل $\overline{YZ} = \frac{3-5}{1+3} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$

بما أن ميل كل من $\overline{YZ}\,,\overline{WX}$ ليس متساويان إذن $\overline{YZ} \nparallel \overline{WX}$

ميل $\overline{XY} = \frac{-2-3}{2-1} = \frac{-5}{1} = -5$

ميل $\overline{WZ} = \frac{-5-5}{-1+3} = \frac{-10}{2} = -5$

بما أن ميل كل من $\overline{XY}\,,\overline{WZ}$ متساويان إذن $\overline{XY} \parallel \overline{WZ}$ وبما أن
XWYZ فيه ضلعان فقط متوازيان فهو شبه منحرف

الخطوة2:

$$\overline{WX} = \sqrt{(-5+2)^2+(-1-2)^2} = \sqrt{18}$$

$$\overline{YZ} = \sqrt{(3-5)^2+(1+3)^2} = \sqrt{20}$$

بما أن $\overline{YZ} \neq \overline{WX}$ فإن شبه المنحرف WXYZ متطابق الساقين
شبه منحرف لأن $WX = \sqrt{18}\,, YZ = \sqrt{20}$.

في الشكل المجاور، S,V نقطتا منتصفي الساقين لشبه المنحرف $QRTU$.

14) إذا كان $UT = 22$, $QR = 12$ ، فأوجد VS.

القطعة المتوسطة لشبه المنحرف = $\frac{1}{2}$ مجموع طولي القاعدة

$$VS = \frac{1}{2}(12 + 22)$$

$$VS = \frac{1}{2}(12 + 22) = 17$$

15) إذا كان $UT = 12$, $VS = 9$ ، فأوجد QR.

$$VS = \frac{1}{2}(QR + UT)$$

$$9 = \frac{1}{2}(QR + 12)$$

$$18 = QR + 12$$

$$QR = 18 - 12$$

$$QR = 6$$

16) إذا كان $VS = 11$, $RQ = 5$ ، فأوجد UT.

$$VS = \frac{1}{2}(QR + UT)$$

$$11 = \frac{1}{2}(5 + UT)$$

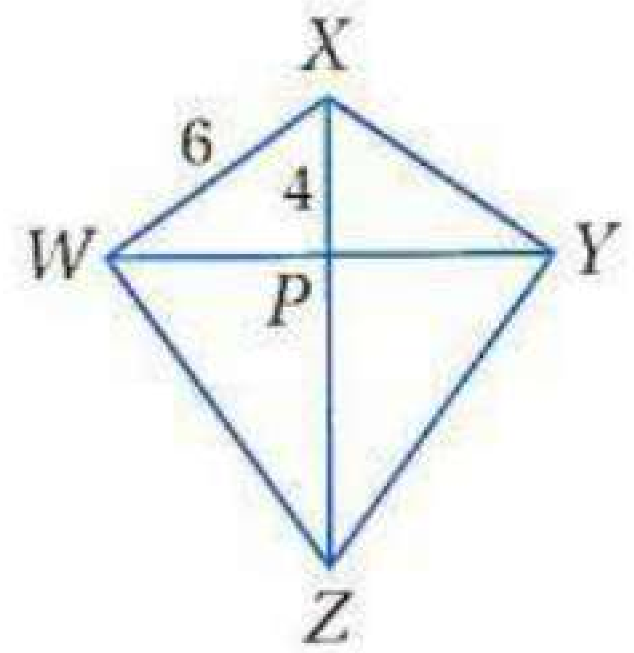
$$22 = 5 + UT$$

$$UT = 22 - 5$$

$$UT = 17$$

إذا كان $WXYZ$ شكل طائرة ورقيّة، فأوجد القياس المطلوب في كل مما يأتي :

17) WP



قطرا شكل الطائرة متعامدان وباستخدام فيثاغورث ينتج أن:

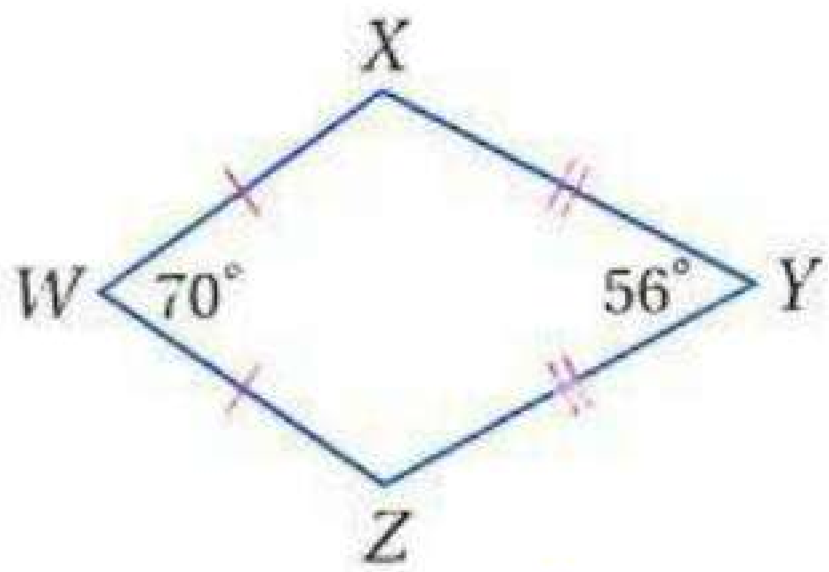
$$(WX)^2 = (XP)^2 + (WP)^2$$

$$(6)^2 = (4)^2 + (WP)^2$$

$$(WP)^2 = 36 - 16$$

$$(WP)^2 = \sqrt{20}$$

18) $m\angle X$



بما أن الشكل رباعي إذن مجموع زواياه الداخلية = 360°

وبما أن الشكل طائرة ورقية إذن $\angle X = \angle Z$

$$\angle X + \angle Y + \angle Z + \angle W = 360^\circ$$

$$\angle X = \angle Z$$

$$2\angle X + 56 + 70 = 360^\circ$$

$$\angle X = 117^\circ$$

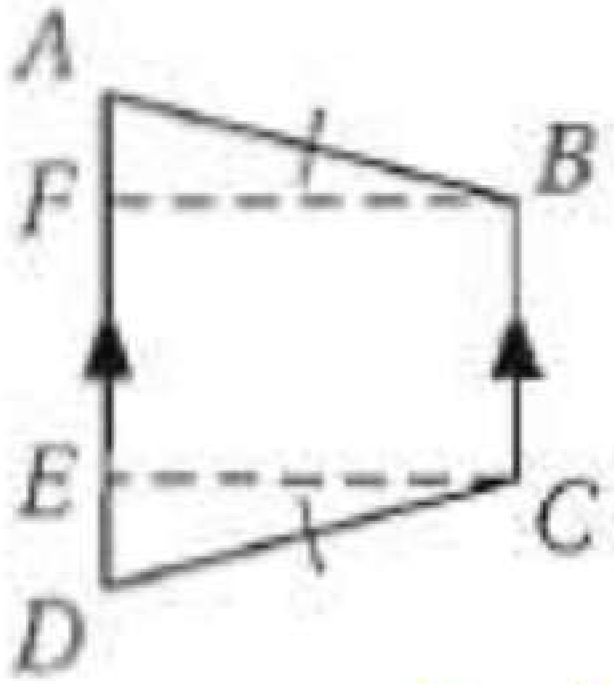
برهان: اكتب برهانًا حرًّا لكلٍّ من النظريات الآتية :

19) النظريّة 1.21

المعطيات: $ABCD$ شبه منحرف متطابق الساقين.

$\overline{BC} \cong \overline{AD}, \overline{AB} \cong \overline{CD}$

المطلوب: $\angle A \cong \angle D, \angle ABC \cong \angle DCB$



البرهان:

ارسم القطعتين المستقيمتين $\overline{BF}$ و $\overline{CE}$ بحيث يكون $\overline{AD} \perp \overline{BF}$ و $\overline{AD} \perp \overline{CE}$

وبما أن $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ، والمسافة بين المستقيمين المتوازيين ثابتة $\overline{CE} \parallel \overline{BF}$

وبما أن المستقيمين المتعامدين يشكلان زوايا قائمة،

فإن $\angle BFA$, $\angle CED$ قائمتان،

إذن $\Delta CED \cong \Delta BFA$ بحسب حالة التطابق (HL)

وبما أن العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين متطابقة فإن $\angle D \cong \angle A$.

وبما أن $\angle CBF \cong \angle BCE$ قائمتان وجميع الزوايا القائمة متطابقة

فإن $\angle BCE \cong \angle CBF$ و $\angle DCE \cong \angle ABF$.

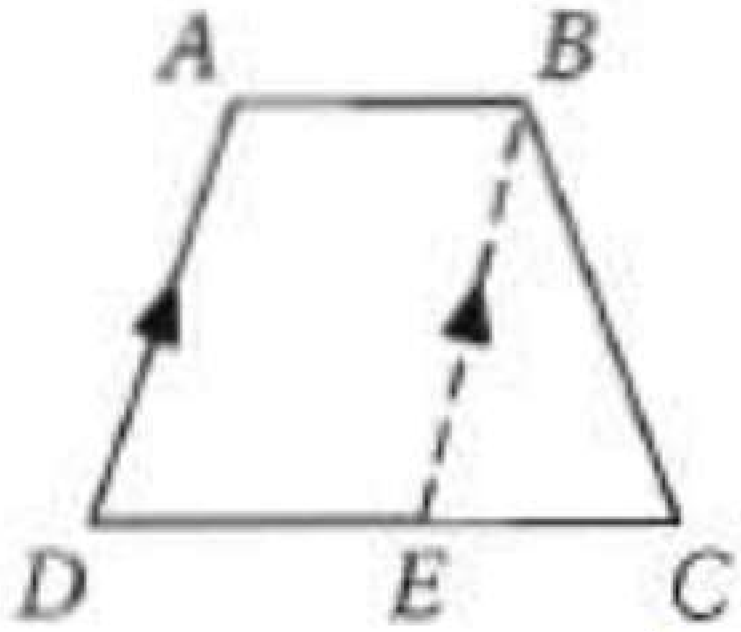
لأن العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين متطابقة.

إذا $\angle DCB \cong \angle ABC$ وفق مسلمة جمع الزوايا.

20) النظريّة 1.22

المعطيات: ABCD شبه منحرف فيه $\angle C \cong \angle D$.

المطلوب: إثبات أن ABCD متطابق الساقين.



البرهان:

ارسم القطعة المستقيمة المساعدة EB بحيث تكون $\overline{AD} \parallel \overline{EB}$

وبذلك تكون $\angle BEC \cong \angle D$ حسب مسلمة الزوايا المتناظرة.

ونعلم أن $\angle C \cong \angle D$ ، إذن وحسب خاصية التعدي تكون $\angle C \cong \angle BEC$

إذن فالمثلث ΔEBC متطابق الضلعين، حيث $\overline{BC} \cong \overline{EB}$

ومن تعريف شبه المنحرف $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$

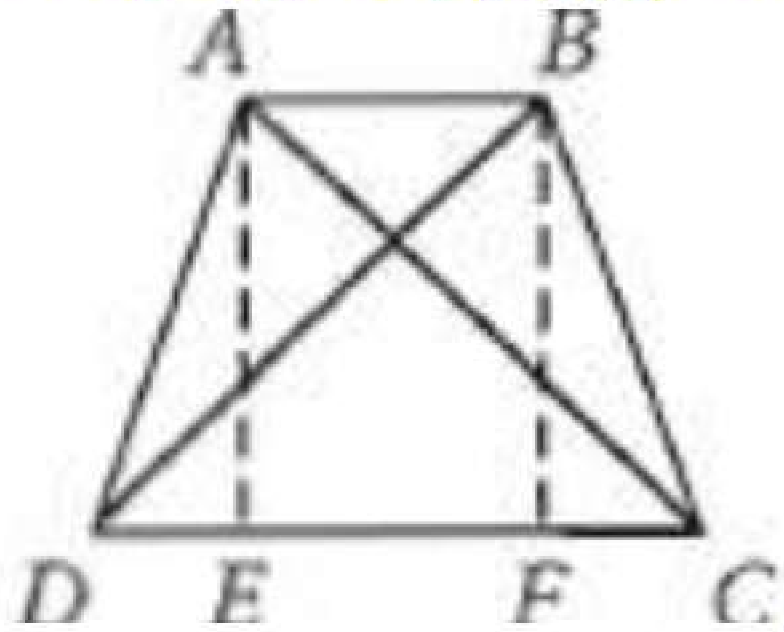
وبما أن كل ضلعين متقابلين للشكل ABED متوازيان فإنه متوازي أضلاع.

$\overline{EB} \cong \overline{AD}$ ، وحسب خاصية التعدي، يكون $\overline{AD} \cong \overline{BC}$. لذلك فشبه المنحرف ABCD متطابق الساقين.

21) النظرية 1.23

المعطيات: ABCD شبه منحرف؛ $\overline{AC} \cong \overline{BD}$

المطلوب: إثبات أن شبه المنحرف ABCD متطابق الساقين.



البرهان:

نعلم أن ABCD شبه منحرف فيه $\overline{AC} \cong \overline{BD}$

ارسم القطعتين المساعدتين $\overline{BF}$ و$\overline{AE}$ بحيث تكون $\overline{AE} \perp \overline{DC}$ و $\overline{BF} \perp \overline{DC}$

وبما أن المستقيمين المتعامدين يشكلان زوايا قائمة،

فإن $\angle AEF$ و $\angle BFE$ قائمتان، لذلك ΔAEC و ΔBFD قائما الزاوية حسب التعريف.

وبما أن $\overline{AE} \cong \overline{BF}$ لأن المستقيمين اللذين يقعان في نفس المستوى والعموديين على مستقيم واحد يكونان متوازيين، فإن $\overline{AE} \cong \overline{BF}$ لأن الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة.

ومن ذلك يكون $\Delta AEC \cong \Delta BFD$ حسب حالة التطابق (HL)

و $\angle ACD \cong \angle BDC$ لأن العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين متطابقة.

كذلك $\overline{DC} \cong \overline{DC}$ حسب خاصية الانعكاس للتطابق

إذن $\Delta ACD \cong \Delta BDC$ حسب حالة التطابق (SAS)

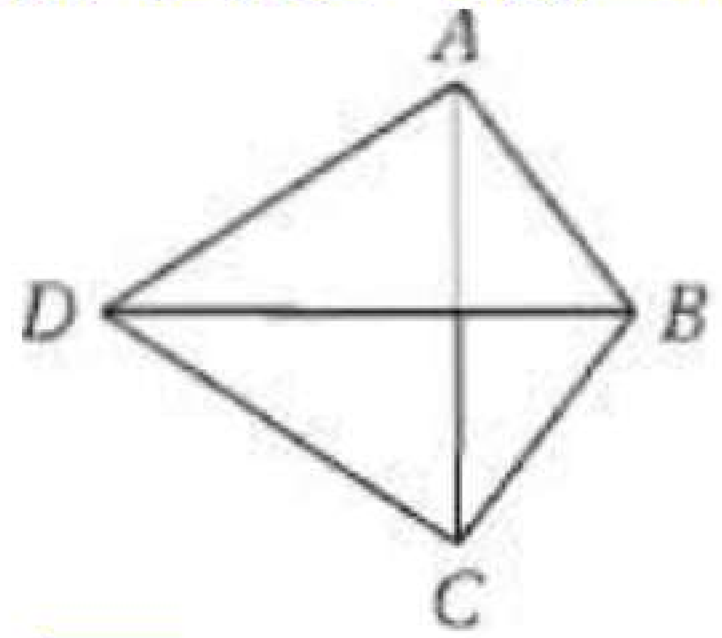
وبما أن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة فإن $\overline{AD} \cong \overline{BC}$

لذلك شبه المنحرف ABCD متطابق الساقين.

22) النظريّة 1.25

المعطيات: $ABCD$ شكل طائرة ورقيه فيه $\overline{BC} \cong \overline{AB}$ و $\overline{DC} \cong \overline{AD}$

المطلوب: $\overline{AC} \perp \overline{BD}$



البرهان: تعلم أن $\overline{BC} \cong \overline{AB}$ و $\overline{AD} \cong \overline{AD}$

إذن B و D كلاهما على بعدين متساويين من A و C.

وإذا كانت نقطة على بعدين متساويين من طرفي قطعة مستقيمة، فإنها تقع على العمود المنصف لتلك القطعة.

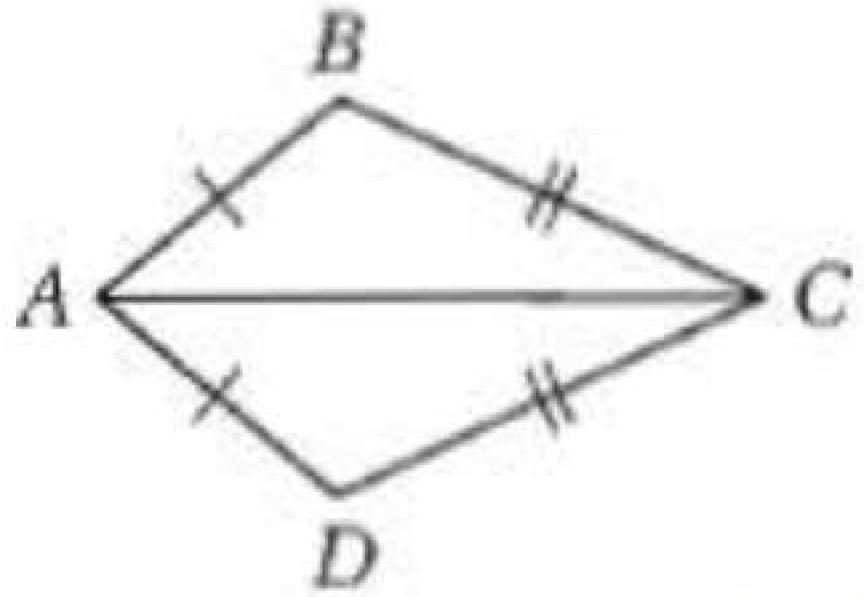
إذن فالمستقيم الذي يحوي النقطتين B وD عمود منصف لـ $\overline{AC}$، لأنه لا يوجد إلا مستقيم واحد فقط يمر في نقطتين مختلفتين

لذلك $\overline{AC} \perp \overline{BD}$

23) النظريّة 1.26

المعطيات: $ABCD$ شكل طائرة ورقية

المطلوب: $\angle D \cong \angle B$



البرهان:

نعلم أن $\overline{AD} \cong \overline{AB}$ و $\overline{CD} \cong \overline{BC}$ حسب تعريف شكل الطائرة الورقية.

$\overline{AC} \cong \overline{AC}$ خاصية الانعكاس

لذلك $\Delta ADC \cong \Delta ABC$ حسب (SSS)

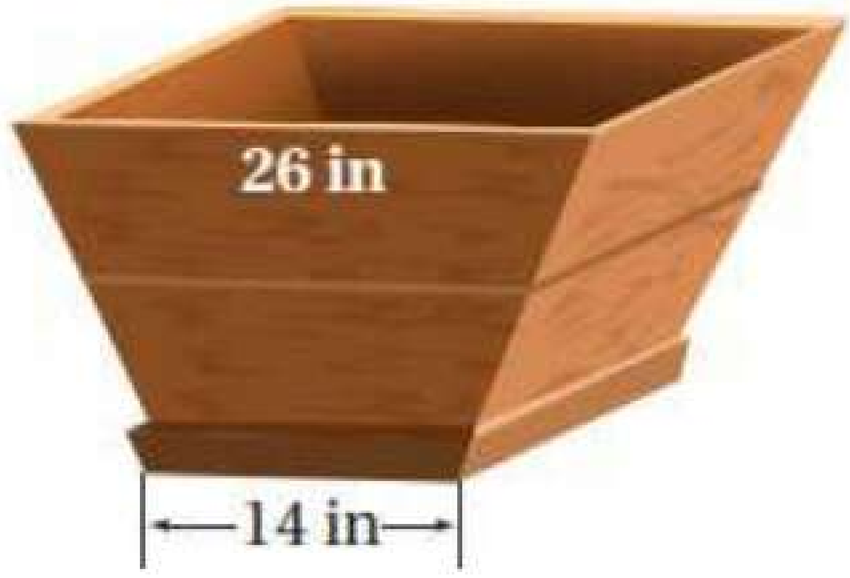
إذن $\angle D \cong \angle B$ لأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة.

وإذا كان $\angle BCD \cong \angle BAD$، فإن $ABCD$ متوازي أضلاع حسب التعريف

وهو ما لا يمكن أن يكون صحيحاً، لأننا نعلم أن $ABCD$ شكل طائرة ورقية.

لذلك $\angle BCD \cong \angle BAD$

24) **نباتات:** اشترى مشاري أصيصًا زراعيًا ليضعه في غرفته، ويريد أن يكون وجهه على شكل شبه منحرف أبعاده كما في الصورة المجاورة. فإذا أراد أن يصنع رفًا في الوسط لتستند إليه النباتات، فكم عرض هذا الرف؟



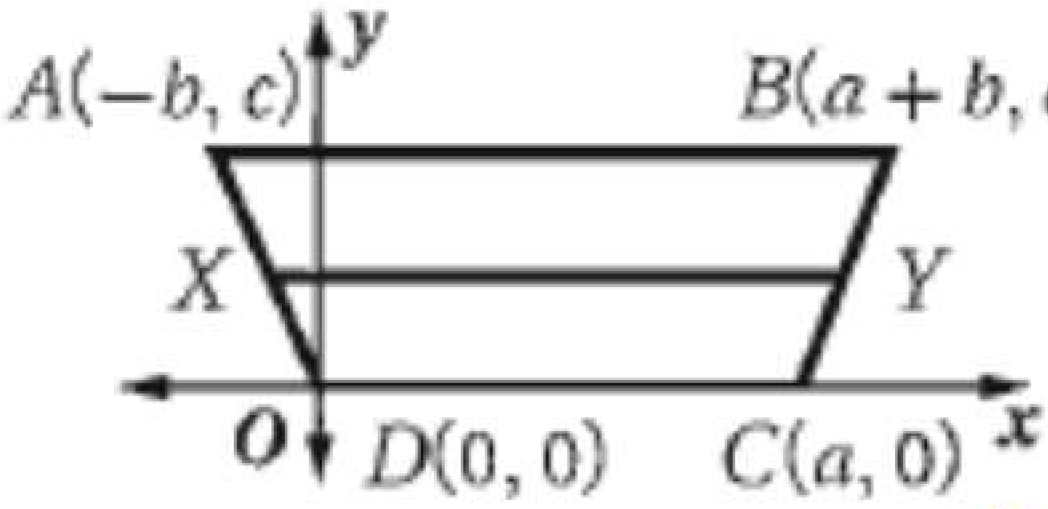
بما أن الشكل شبه منحرف والقطعة المتوسطة لهذا الرف = $\frac{1}{2}$ مجموع القاعدتين

$$\frac{1}{2}(26+14)=\frac{1}{2}(40)=20$$

25) **برهان:** اكتب برهانًا إحداثيًا للنظرية 1.24.

المعطيات: ABCD شبه منحرف فيه $\overline{XY}$ قطعة متوسطة.

المطلوب: $\overline{XY}$ □ $\overline{AB}$, $\overline{XY}$ □ $\overline{DC}$



البرهان:

X نقطة منتصف $\overline{AD}$ ، وإحداثياتها $\left(\frac{-b}{2},\frac{c}{2}\right)$

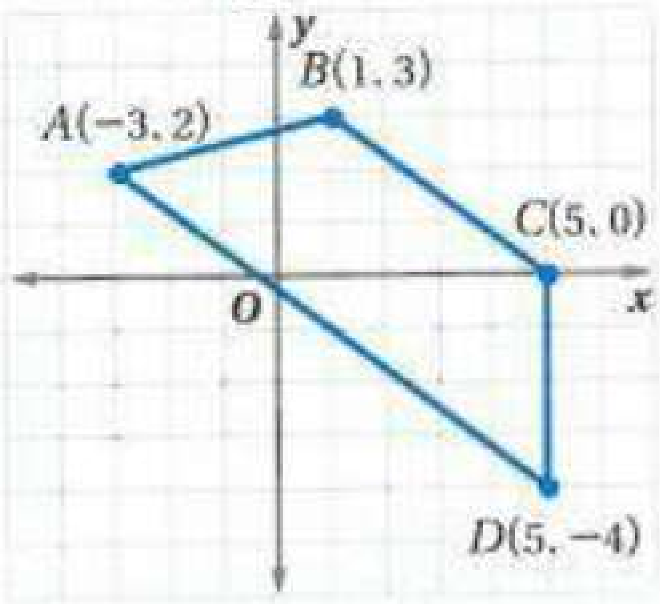
Y نقطة منتصف $\overline{BC}$ ، وإحداثياتها $\left(\frac{2a+b}{2},\frac{c}{2}\right)$

وبما أن ميل $\overline{AB}$ يساوي صفر، وميل $\overline{XY}$ يساوي صفر، وميل $\overline{DC}$ يساوي صفر فإن، $\overline{XY}$ □ $\overline{AB}$, $\overline{XY}$ □ $\overline{DC}$

موقع حلول كتبي

26) **هندسة إحداثية:** استعن بالشكل الرباعي $ABCD$ المجاور.

a) بين أن $ABCD$ شبه منحرف. وحدد ما إذا كان متطابق الساقين. وضّح إجابتك.



الخطوة1:

ميل $\overline{BC} = \frac{1-5}{3-0} = \frac{-4}{3}$

ميل $\overline{AD} = \frac{-3-5}{2+4} = \frac{-8}{6} = \frac{-4}{3}$

ميل $\overline{CD} = \frac{5-5}{0+4} = \frac{0}{4} = 0$

ميل $\overline{AB} = \frac{-3-1}{2-3} = \frac{-4}{-1} = 4$

بما أن ميل كل من $\overline{BC}, \overline{AD}$ متساويان إذن $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$

وميل كلا من $\overline{AB}, \overline{CD}$ غير متساويان إذن $\overline{AB} \nparallel \overline{CD}$

إذن الشكل $ABCD$ شبه منحرف

الخطوة2:

$$\overline{AB} = \sqrt{(-3-1)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{17}$$

$$\overline{CD} = \sqrt{(5-5)^2 + (0+4)^2} = \sqrt{25} = \sqrt{16} = 4$$

إذن $ABCD$ شبه منحرف ولكنه غير متطابق الساقين لأن $AB = \sqrt{17}$ و $CD = 4$.

b) هل القطعة المتوسطة محتواة في المستقيم الذي معادلته $y = -x + 1$؟ برّر إجابتك.

لا، لأن هذا المستقيم لا يوازي قاعدتي شبه المنحرف، حيث إن ميل كل من القاعدتين $\frac{-3}{4}$ ، على حين أن ميل المستقيم $y = -x + 1$ يساوي -1.

c) أوجد طول القطعة المتوسطة.

$$\overline{BC} = \sqrt{(5-1)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\overline{AD} = \sqrt{(-3-5)^2 + (2+4)^2} = \sqrt{100} = 10$$

طول القطعة المتوسطة =

$$\frac{1}{2}(BC + AD)$$

$$\frac{1}{2}(5+10) = 7.5$$

جبر: في الشكل المجاور، $ABCD$ شبه منحرف.

27) إذا كان $BD = 2x + 8$, $AC = 3x - 7$ ، فأوجد قيمة x بحيث يكون $ABCD$ متطابق الساقين.

قطرا شبه المنحرف متطابقة

$$BD = AC$$

$$2x + 8 = 3x - 7$$

$$3x - 2x = 8 + 7$$

$$x = 15$$

28) إذا كان $m\angle DAB = (2x + 33)^\circ$, $m\angle ABC = (4x + 11)^\circ$ فأوجد قيمة x بحيث يكون $ABCD$ متطابق الساقين.

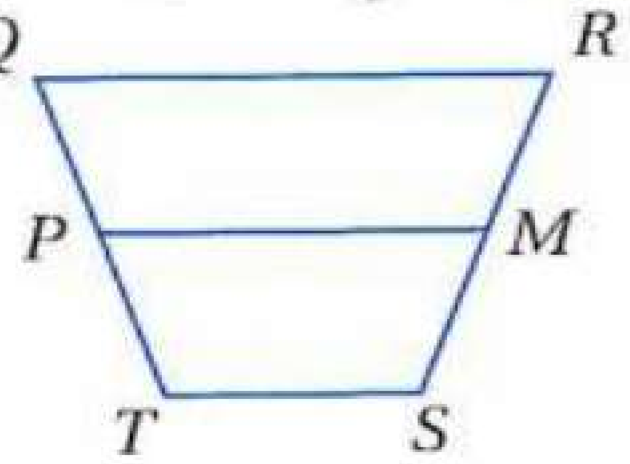
$$4x + 11 = 2x + 33$$

$$4x - 2x = 33 - 11$$

$$2x = 22$$

$$x = 11$$

جبر: في الشكل المجاور، P , M نقطتا منتصفي الساقين لشبه المنحرف $QRST$.



29) إذا كان $QR = 16, PM = 12, TS = 4x$ ، فأوجد قيمة x.

$$PM = \frac{1}{2}(QR + TS)$$

$$12 = \frac{1}{2}(16 + 4x)$$

$$24 = 16 + 4x$$

$$4x = 24 - 16$$

$$4x = 8$$

$$x = 2$$

30) إذا كان $TS = 2x, PM = 20, QR = 6x$ ، فأوجد قيمة x.

$$PM = \frac{1}{2}(QR + TS)$$

$$20 = \frac{1}{2}(6x + 2x)$$

$$40 = 6x + 2x$$

$$40 = 8x$$

$$x = 5$$

31) إذا كان $PM = 2x, QR = 3x, TS = 10$ ، فأوجد PM.

$$PM = \frac{1}{2}(QR + TS)$$

$$2x = \frac{1}{2}(3x + 10)$$

$$4x = 3x + 10$$

$$x = 10 \quad \therefore \quad PM = 2 \times 10 = 20$$

32) إذا كان $PM = 13$ ، $TS = 2x + 2, QR = 5x + 3$ ، فأوجد TS.

$$PM = \frac{1}{2}(QR + TS)$$

$$13 = \frac{1}{2}(5x + 3 + 2x + 2)$$

$$26 = 7x + 5$$

$$7x = 26 - 5$$

$$7x = 21$$

$$x = 3$$

$$TS = 2x + 2$$

$$TS = 6 + 2 = 8$$

تسوّق: الوجه الجانبي لحقيبة التسوّق المبيّنة جانبًا على شكل شبه منحرف متطابق الساقين. إذا كان $EC = 9$ in, $DB = 19$ in ، $m\angle ABE = 40^\circ$, $m\angle EBC = 35^\circ$ ، فأوجد كلًّا مما يأتي:

33) AE

$$DB = AC$$

$$19 = AE + EC$$

$$19 = AE + 9$$

$$AE = 19 - 9$$

$$AE = 10in$$

34) AC

$$AC = EC + AE$$

$$AC = 9 + 10$$

$$AC = 19in$$

$m\angle BCD$ (35

نظرية الزاويتان المتحالفتان

$$m\angle ABC = m\angle ABE + m\angle EBC = 40 + 35 = 75^\circ$$

$$m\angle ABC + m\angle BCD = 180^\circ$$

$$m\angle ABC + m\angle BCD = 180^\circ$$

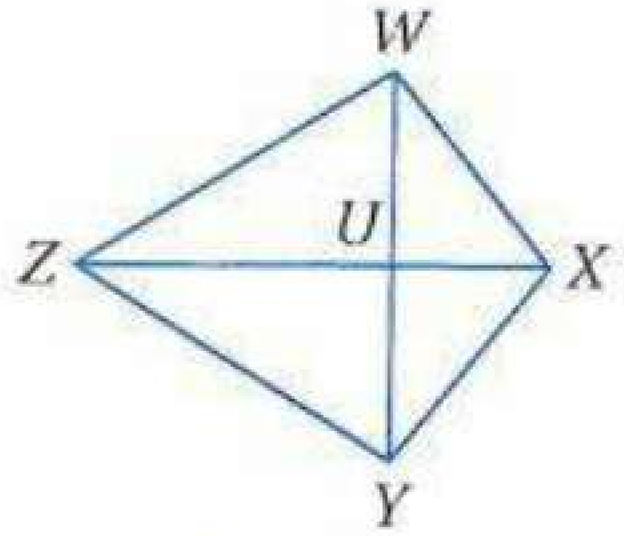
$$75 + m\angle BCD = 180^\circ$$

$$m\angle BCD = 105^\circ$$

$m\angle EDC$ (36

بما أن $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ إذن $m\angle ABE = m\angle EDC = 40^\circ$

حسب نظرية التبادل داخليا



جبر: في الشكل المجاور، $WXYZ$ شكل طائرة ورقيّة.

37) إذا كان $m\angle WZY = (4x)^\circ$ ، $m\angle WXY = 120^\circ$ ، $m\angle ZWX = (10x)^\circ$ ، فأوجد $m\angle ZYX$.

$m\angle ZWX \cong \angle ZYX$ (يوجد زوج واحد فقط من الزوايا المتقابلة المتطابقة، نظرية 1.26)

لذا $m\angle ZYX = m\angle ZWX = 10x$

وعليه فإن

$$m\angle ZWX + m\angle WXY + m\angle ZYX + m\angle WZY = 360$$

(مجموع قياسات الزوايا الداخلية للشكل الرباعي)، وبالتعويض ينتج:

$$10x + 120 + 10x + 4x = 360$$

$$24x + 120 = 360$$

$$x = 10$$

لذا: $m\angle ZYX = 10x = 10(10) = 100^\circ$

38) إذا كان $m\angle WZY = 35°$، $m\angle WXY = (13x + 24)°$، $m\angle ZWX = (13x + 14)°$،
فأوجد $m\angle ZYX$.

$m\angle ZWX \cong \angle ZYX$ (يوجد زوج واحد فقط من الزوايا المتقابلة المتطابقة، نظرية 1.26)

لذا $m\angle ZYX = m\angle ZWX = 13x + 14$

وعليه فإن

$$m\angle ZWX + m\angle WXY + m\angle ZYX + m\angle WZY = 360$$

(مجموع قياسات الزوايا الداخلية للشكل الرباعي)، وبالتعويض ينتج:

$$(13x + 14) + (13x + 24) + (13x + 14) + 35 = 360$$

$$39x + 87 = 360$$

$$39x = 360 - 87$$

$$x = 7$$

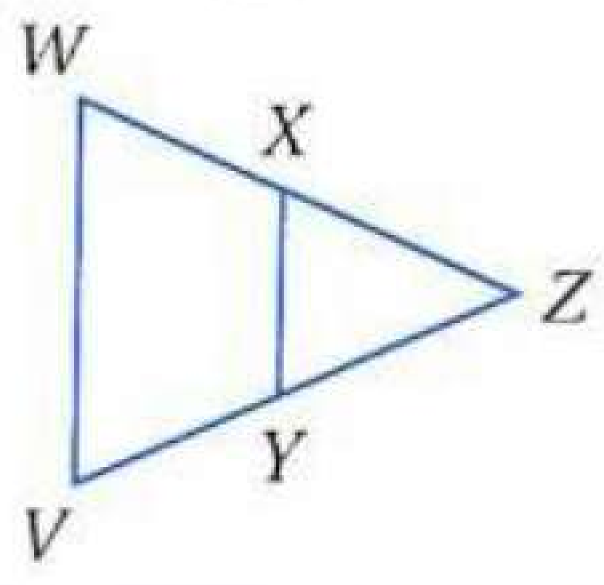
$$\angle ZYX = 13x + 14$$

$$\angle ZYX = 105°$$

برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين.

39) **المعطيات:** $\angle W \cong \angle ZXY$، $\overline{WZ} \cong \overline{ZV}$، $\overline{XY}$ تنصّف كلًّا من $\overline{WZ}$ و $\overline{ZV}$.

المطلوب: $WXYV$ شبه منحرف متطابق الساقين.



المعطيات: $\overline{ZV} \cong \overline{WZ}$، $\overline{XY}$ تنصف كل من $\overline{WZ}$ و $\overline{ZV}$،

$\angle W \cong \angle ZXY$

المطلوب: $WXYV$ شبه منحرف متطابق الساقين.

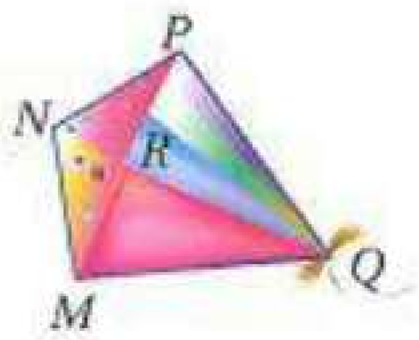
العبارات (المبررات):

1) $\overline{ZV} \cong \overline{WZ}$، $\overline{XY}$ تنصف كلاً من $\overline{WZ}$ و $\overline{ZV}$. (معطيات)

2) $\frac{1}{2}ZV = \frac{1}{2}WZ$ (خاصية الضرب)

موقع حلول كتبي

3) $WX = VY$ (تعريف نقطة المنتصف)
4) $\overline{WX} \cong \overline{VY}$ (تعريف تطابق القطع المستقيمة)
5) $\angle W \cong \angle ZXY$ (معطى)
6) $\overline{XY} \parallel \overline{WZ}$ (إذا كانت الزوايا المتناظرة فإن المستقيمين متوازيان)
7) WXYV شبه منحرف متطابق الساقين. (تعريف شبه المنحرف متطابق الساقين)

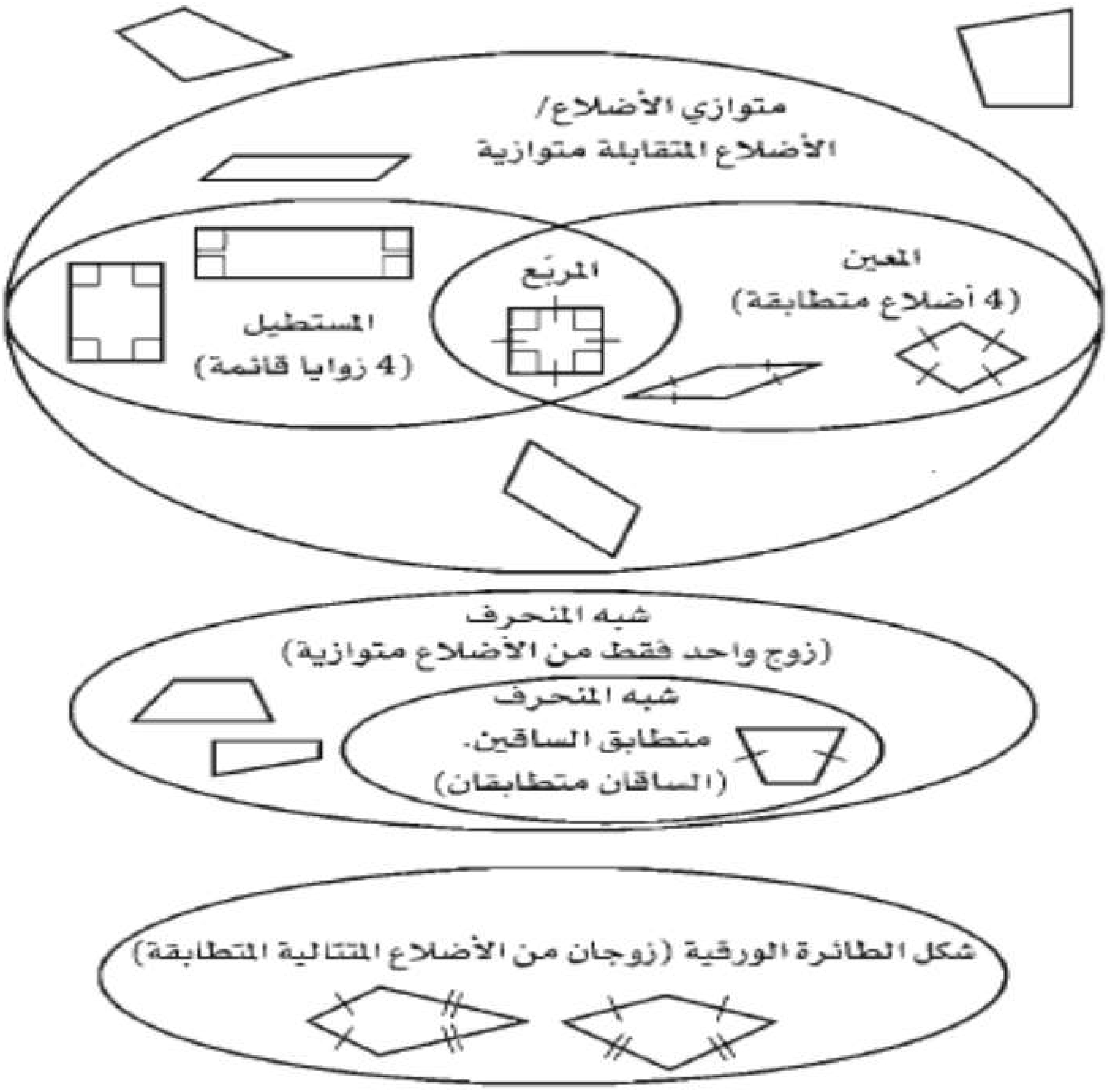


40) طائرة ورقيّة: استعن بالطائرة الورقيّة في الشكل المجاور.
اكتب باستعمال خصائص الطائرة الورقية برهانًا ذا عمودين لبيان أنّ $\triangle MNR$ يطابق $\triangle PNR$.

المعطيات: MNPQ شكل طائرة ورقية
المطلوب: $\Delta MNR \cong \Delta PNR$
البرهان:
العبارات (المبررات)
1) MNPQ شكل طائرة ورقية (معطى)
2) $\overline{NM} \cong \overline{NP}$, $\overline{QM} \cong \overline{PQ}$ (تعريف شكل الطائرة الورقية)
3) $\overline{QN} \cong \overline{QN}$ (خاصية الانعكاس)
4) $\Delta NMQ \cong \Delta NPQ$ (SSS)
5) $\angle MNR \cong \angle PNR$ (العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة)
6) $\overline{NR} \cong \overline{NR}$ (خاصية الانعكاس)
7) $\Delta MNR \cong \Delta PNR$ (SAS)

41) **أشكال فن:** ارسم شكل فن يوضح جميع الأشكال الرباعيّة متضمنًا شبه المنحرف متطابق الساقين، وشكل الطائرة الورقيّة وعموم الأشكال الرباعيّة التي لا أسماء خاصة لها.

41)



هندسة إحداثيّة: حدد ما إذا كان الشكل المعطاة إحداثيات رؤوسه في كل مما يأتي شبه منحرف، أم متوازي أضلاع، أم مربع، أم معين، أم هو شكل رباعي فحسب؟ اختر أكثر المسمّيات تحديدًا، ووضح إجابتك.

42) $A(-1, 4), B(2, 6), C(3, 3), D(0, 1)$

ميل $\overline{AB} = \frac{-1-2}{4-6} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}$

ميل $\overline{CD} = \frac{3-0}{3-1} = \frac{3}{2}$

ميل $\overline{BC} = \frac{2-3}{6-3} = \frac{-1}{3}$

ميل $\overline{AD} = \frac{-1-0}{4-1} = \frac{-1}{3}$

بما أن ميل كل ضلعين متقابلين متساوي إذن الشكل متوازي أضلاع، لأن أضلاعه المتقابلة متطابقة ولا يوجد زوايا قوائم، وأضلاعه المتتالية غير متطابقة.

43) $W(-3, 4), X(3, 4), Y(5, 3), Z(-5, 1)$

ميل $\overline{WX} = \frac{4-4}{-3-3} = \frac{0}{-6}$

ميل $\overline{YZ} = \frac{3-1}{5+5} = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

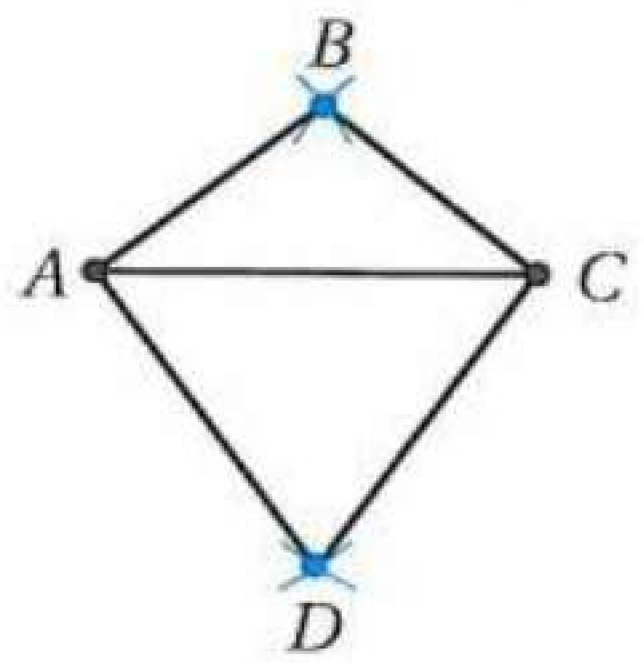
ميل $\overline{XY} = \frac{4-3}{3-5} = \frac{1}{-2}$

ميل $\overline{WZ} = \frac{4-1}{-3+5} = \frac{3}{2}$

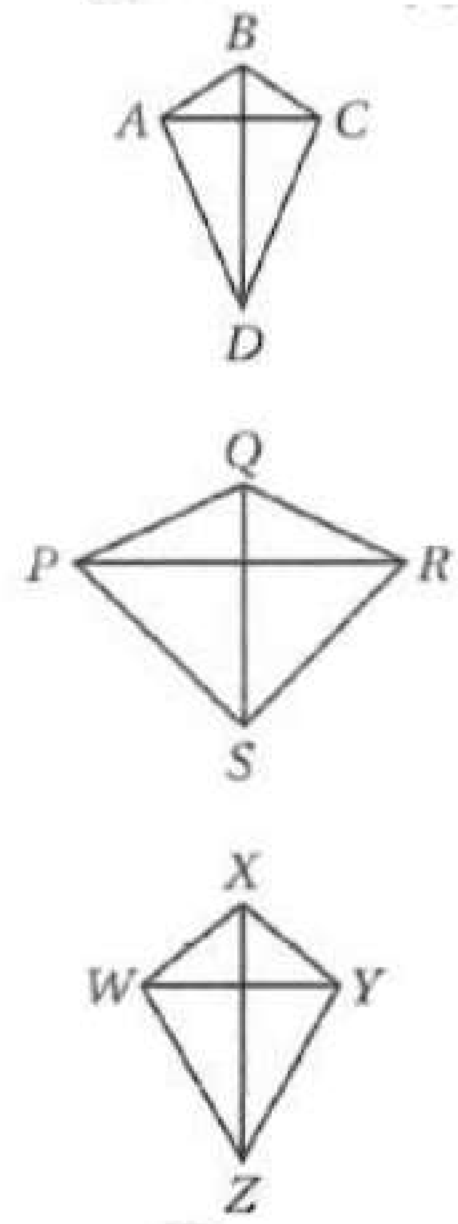
ميل $\overline{WX} \neq \overline{YZ} \neq \overline{XY} \neq \overline{WZ}$

إذن شكل رباعي فقط ليس فيه أضلاع متوازية.

44) **تمثيلات متعددة:** سوف تستقصي في هذه المسألة التناسب في شكل الطائرة الورقيّة.



a) **هندسيًا:** ارسم قطعة مستقيمة. وأنشئ عمودًا منصفًا لها لا تنصفه القطعة المستقيمة ولا تساويه طولًا. ثم صِلْ أطراف القطعتين المستقيمتين لتكوِّن الشكل الرباعي $ABCD$. كرّر هذه العملية مرتين، وسمِّ الشكلين الرباعيين الجديدين $WXYZ$, $PQRS$.



b) **جدوليًا:** انقل الجدول الآتي وأكمله.

الشكل	الضلع	الطول	الضلع	الطول	الضلع	الطول	الضلع	الطول
ABCD	AB	0.8 cm	BC	0.8 cm	CD	1.6 cm	DA	1.6 cm
PQRS	PQ	1.4 cm	QR	1.4 cm	RS	1.8 cm	SP	1.8 cm
WXYZ	WX	0.4 cm	XY	0.4 cm	YZ	1.5 cm	ZW	1.5 cm

c) **لفظيًا:** اكتب تخمينًا حول الشكل الرباعي الذي قطراه متعامدان وغير متطابقين، وأحدهما فقط ينصِّف الآخر.

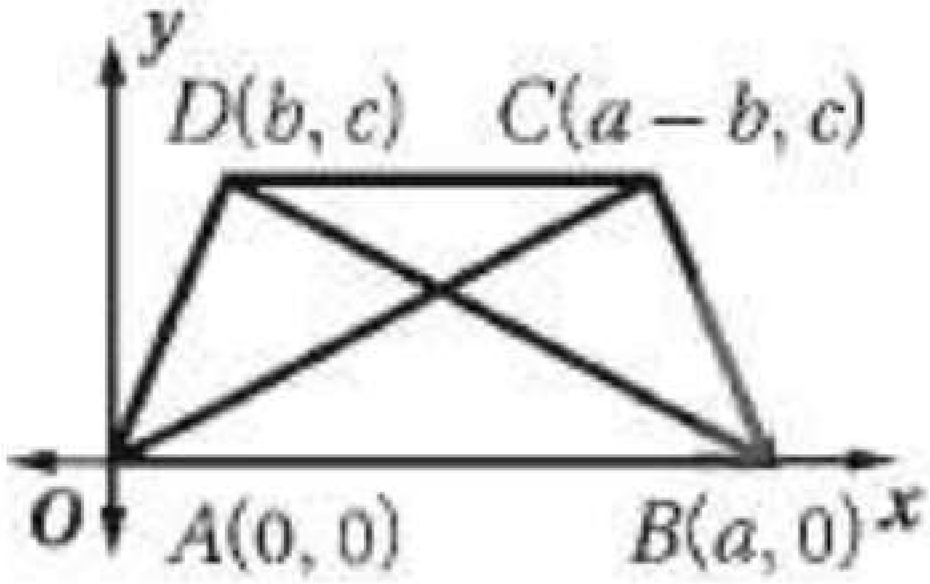
إذا كان قطرا شكل رباعي متعامدين وليسا متطابقين وأحدهما فقط ينصف الآخر، فإن الشكل الرباعي هو شكل طائرة ورقية.

برهان: اكتب برهانًا إحداثيًّا لكل من العبارتين الآتيتين:

45) قطرا شبه المنحرف المتطابق الساقين متطابقان.

المعطيات: $ABCD$ شبه منحرف متطابق الساقين فيه $\overline{AD} \cong \overline{BC}$

المطلوب: $\overline{BD} \cong \overline{AC}$



البرهان:

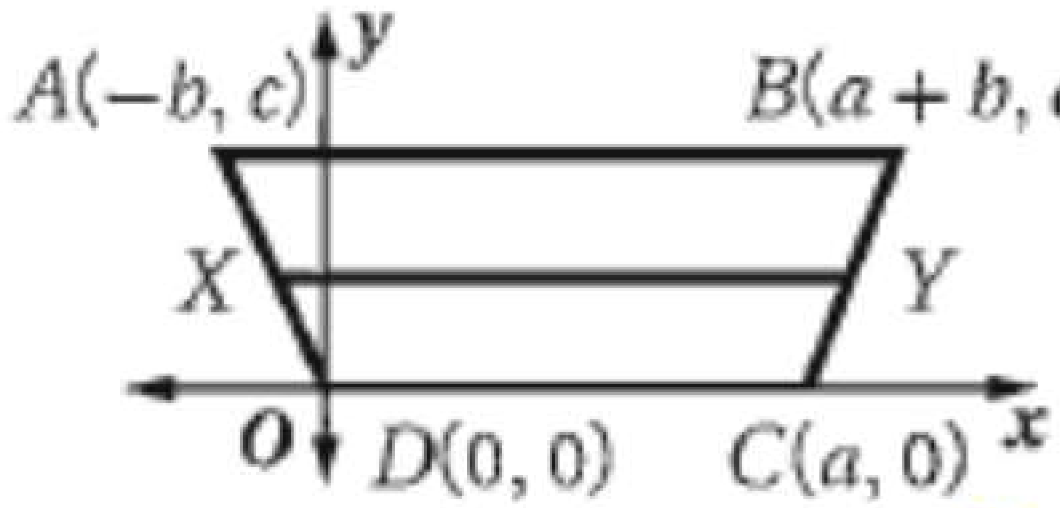
$$DB = \sqrt{(a-b)^2 + (0-c)^2}$$
$$= \sqrt{(a-b)^2 + (c)^2}$$
$$AC = \sqrt{((a-b)-0)^2 + (c-0)^2}$$
$$= \sqrt{(a-b)^2 + (c)^2}$$

إذن $\overline{BD} = \overline{AC}$ ومن ذلك $\overline{BD} \cong \overline{AC}$

46) القطعة المتوسطة لشبه المنحرف المتطابق الساقين توازي كلًّا من القاعدتين.

المعطيات: $ABCD$ شبه منحرف فيه $\overline{XY}$ قطعة متوسطة.

المطلوب: $\overline{XY}$ □ $\overline{AB}$, $\overline{XY}$ □ $\overline{DC}$



البرهان:

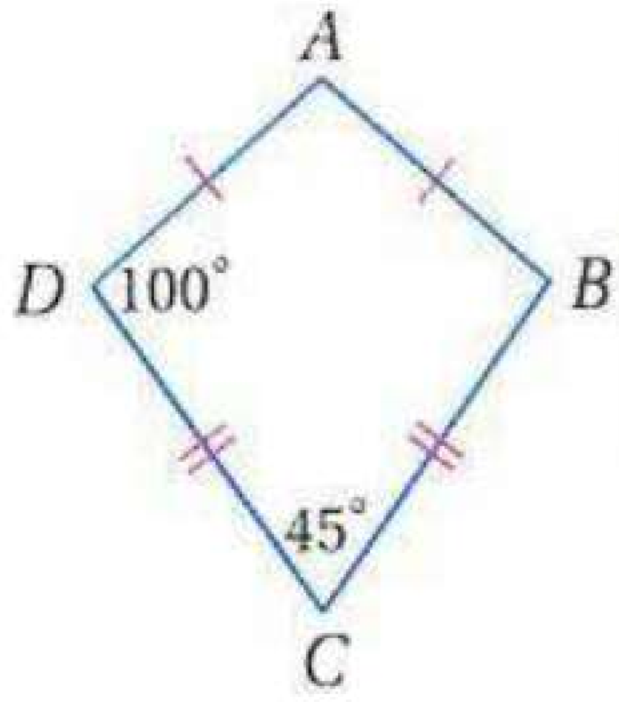
X نقطة منتصف $\overline{AD}$، وإحداثياتها $\left(\frac{-b}{2}, \frac{c}{2}\right)$

Y نقطة منتصف $\overline{BC}$، وإحداثياتها $\left(\frac{2a+b}{2}, \frac{c}{2}\right)$

وبما أن ميل $\overline{AB}$ يساوي صفر، وميل $\overline{XY}$ يساوي صفر، وميل $\overline{DC}$ يساوي صفر فإن، $\overline{XY}$ □ $\overline{AB}$, $\overline{XY}$ □ $\overline{DC}$

مسائل مهارات التفكير العليا:

47) **اكتشف الخطأ:** أوجد كل من عادل وسعيد $m\angle A$ في شكل الطائرة الورقيّة $ABCD$ المجاور . هل إجابة أي منهما صحيحة؟ وضح إجابتك.



سعيد	عادل
$m\angle A = 45^\circ$	$m\angle A = 115^\circ$

عادل؛ $m\angle D = m\angle B$

$$m\angle A + m\angle B + m\angle C + m\angle D = 360^\circ$$

$$m\angle A + 100 + 45 + 100 = 360^\circ$$

$$m\angle A = 115^\circ$$

48) **تحدّ:** إذا كان الضلعان المتوازيان في شبه منحرف محتويين في المستقيمين $y = x - 8$ ، $y = x + 4$ ، فما معادلة المستقيم الذي يحتوي القطعة المتوسطة لشبه المنحرف؟

الفطعة المتوسطة $= \frac{1}{2}$ مجموع طول القاعدتين

$$\frac{1}{2}\left[(y = x - 8) + (y = x + 4)\right]$$

$$\frac{1}{2}\left[(2y = 2x - 4)\right]$$

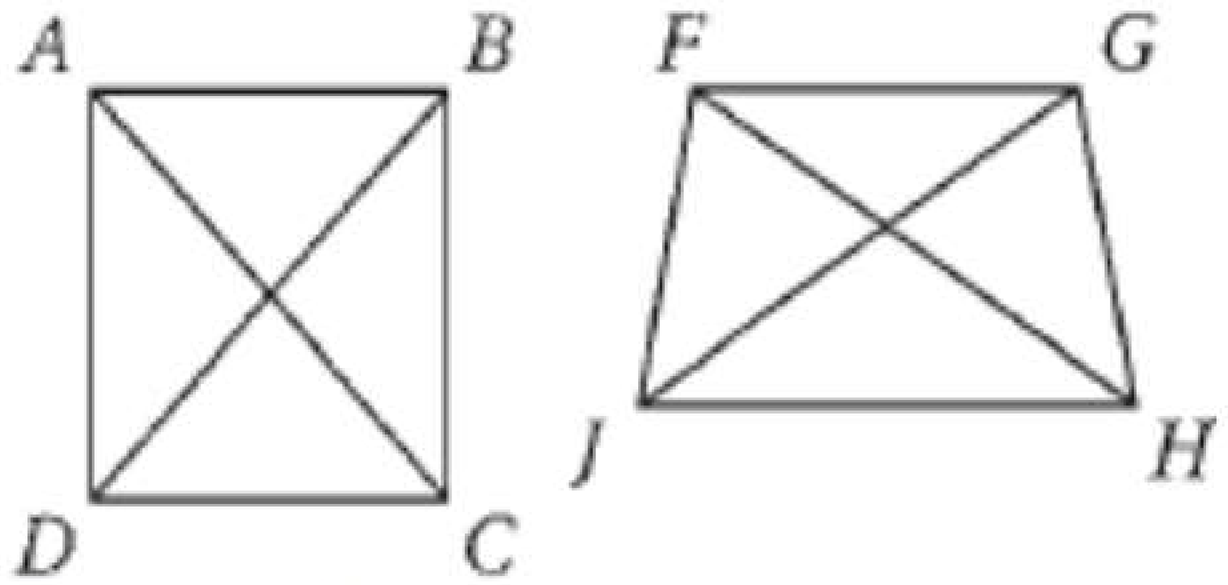
$$\frac{1}{2}\left[2(y = x - 2)\right]$$

$$y = x - 2$$

49) **تبرير:** هل العبارة " المربع هو أيضا طائرة ورقيّة " صحيحة أحيانًا أم دائمًا أم غير صحيحة أبدًا؟ وضّح إجابتك.

غير صحيحة أبداً، أضلاع المربع الأربعة متطابقة بينما لا يوجد ضلعان متقابلان في شكل الطائرة الورقية متطابقان.

50) **مسألة مفتوحة:** ارسم شبه المنحرف $ABCD$ وشبه المنحرف $FGHJ$ غير المتطابقين وفيهما $\overline{FH} \cong \overline{AC}$ و $\overline{GJ} \cong \overline{BD}$.

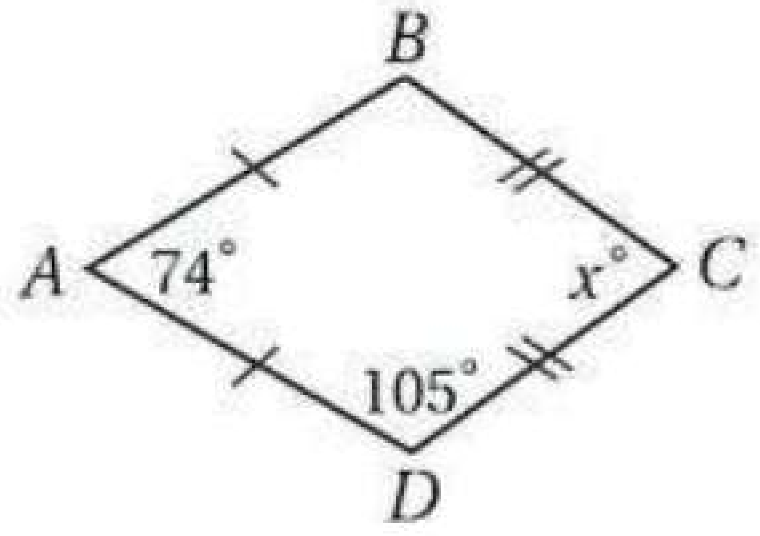


51) **اكتب:** قارن بين خصائص كلٍّ من: شبه المنحرف وشبه المنحرف المتطابق الساقين وشكل الطائرة الورقيّة.

شبه المنحرف هو شكل رباعي فيه ضلعان فقط متوازيان يسميان قاعدتي شبه المنحرف ويسمى الضلعان غير المتوازيين ساقي شبه المنحرف.
شبه المنحرف المتطابق الساقين: هو شكل رباعي فيه ضلعان فقط متوازيان ومتطابقان وزوايا القاعدة متطابقة.
شكل الطائرة الورقية: هو شكل رباعي يتكون من زوجين متمايزين من الأضلاع المتجاورةالمتطابقة وعلى عكس متوازي الأضلاع، كل ضلعين متقابلين ليسا متطابقين ولا متوازيين.

تدريب على الاختبار المعياري

52) **إجابة شبكيّة :** إذا كان $ABCD$ شكل طائرة ورقيّة، فما قياس $\angle C$؟



$\angle B = \angle D$ **من خصائص الطائرة الورقية**

$$m\angle A + m\angle B + m\angle C + m\angle D = 360^\circ$$

$$74 + 105 + x + 105 = 360^\circ$$

$$x = 360 - 284$$

$$x = 76^\circ$$

53) ما الشكل الذي يمكن أن يكون مثالاً مضادًّا للتخمين الآتي؟

إذا كان قطرا شكل رباعي متطابقين فإنه مستطيل .

F المربّع

G المعين

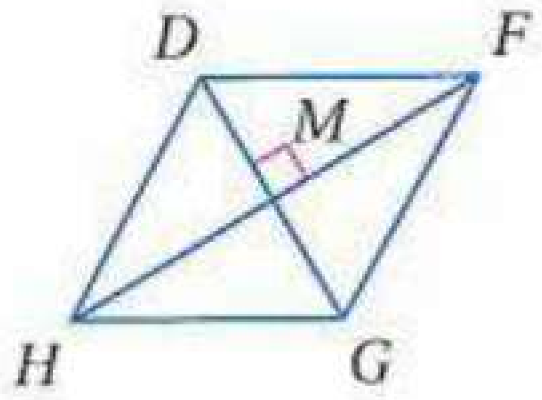
H متوازي الأضلاع

J شبه المنحرف المتطابق الساقين

J شبه المنحرف المتطابق الساقين

مراجعة تراكمية

جبر: استعن بالمعين $DFGH$ فيما يأتي: (الدرس 5-1)



54) إذا كان $m\angle FGH = 118°$ ، فأوجد $m\angle MHG$.

من خصائص المعين أنه يوجد ضلعين متتاليين متطابقين

إذن $\overline{FG} = \overline{HG}$

إذن $\angle HFG = \angle FHG$

وبما أن $\angle FGH = 118°$ إذن الزاويتين الأخرتين في ΔHFG

$180 - (118) = 62°$ وبما أن $\angle HFG = \angle FHG$

إذن $\angle MHG = \dfrac{62}{2} = 31°$

55) إذا كان $MG = x + 6$, $DM = 4x - 3$ ، فأوجد DG.

قطرا المعين ينصف كل منهما الأخر

$$MG = MD$$
$$x + 6 = 4x - 3$$
$$4x - x = 6 + 3$$
$$3x = 9$$
$$x = 3$$
$$DG = MG + MD$$
$$DG = x + 6 + 4x - 3$$
$$DG = 5x + 3$$
$$DG = 18$$

56) إذا كان $HD = 15$, $HM = 12$ ، فأوجد MG.

من خصائص المعين أن كل ضلعين متتالين متطابقين

$$HD = HG = 15$$

$$HM = 12$$

حسب نظرية فيثاغورث:

$$(HG)^2 = (MH)^2 + (MG)^2$$

$$(15)^2 = (12)^2 + (MG)^2$$

$$(HG)^2 = (15)^2 - (12)^2$$

$$(HG)^2 = 81$$

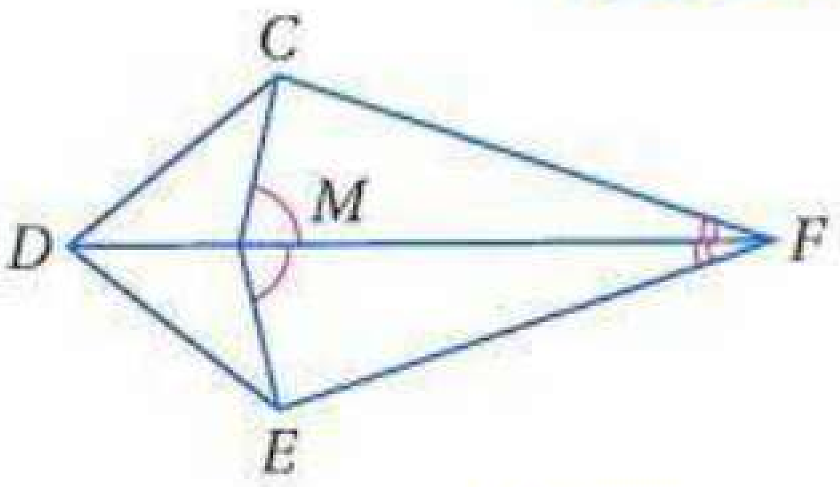
$$HG = 9$$

57) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين. (مهارة سابقة)

المعطيات: $\angle CMF \cong \angle EMF$ ،

$\angle CFM \cong \angle EFM$

المطلوب: $\triangle DMC \cong \triangle DME$



المعطيات: $\angle CMF \cong \angle EMF, \angle CFM \cong \angle EFM$

المطلوب: $\Delta DMC \cong \Delta DME$

البرهان: العبارات (المبررات)

1) $\angle CMF \cong \angle EMF, \angle CFM \cong \angle EFM$ (معطيات)

2) $\overline{MF} \cong \overline{MF}$, $\overline{DM} \cong \overline{DM}$ (خاصية الانعكاس)

3) $\Delta CMF \cong \Delta EMF$ (ASA)

4) $\overline{CM} \cong \overline{EM}$ (العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة)

5) $\angle DMC, \angle CMF$ متكاملتان $\angle DME, \angle EMF$ متكاملتان. (نظرية الزوايا المتكاملة)

6) $\angle DMC \cong \angle DME$ (مكملات الزوايا المتطابقة تكون متطابقة)

7) $\Delta DMC \cong \Delta DME$ (SAS)

أوجد ميل القطعة المستقيمة المعطاة إحداثيات طرفيها في كل مما يأتي:

58) $(x, 4y), (-x, 4y)$

الميل: $0 = \frac{0}{2x} = \frac{4y - 4y}{x + x} = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$

59) $(-x, 5x), (0, 6x)$

الميل: $1 = \frac{-x}{-x} = \frac{5x - 6x}{-x - 0} = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$

60) $(y, x), (y, y)$

الميل: $\frac{x - y}{0} = \frac{x - y}{y - y} = \frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$

الميل غير معرف

دليل الدراسة والمراجعة

اختبار المفردات:

بيّن ما إذا كانت كل جملة مما يأتي صحيحةً أو خاطئةً، وإذا كانت خاطئة فاستبدل بالكلمة التي تحتها خط كلمة من القائمة أعلاه؛ لتجعل الجملة صحيحة:

1) زاويتا قاعدة شبه المنحرف متطابقتان.

خطأ، شبه المنحرف متطابق الساقين

2) إذا كان متوازي الأضلاع مستطيلًا، فإنّ قطريه متطابقان.

صحيحة

3) القطعة المتوسطة لشبه المنحرف تصل بين رأسين غير متتالين فيه.

خطأ، القطر

4) قاعدة شبه المنحرف هي إحدى ضلعيه المتوازيين.

صحيحة

5) قطرا المعين متعامدان.

صحيحة

6) قطر شبه المنحرف قطعة مستقيمة تصل بين نقطتي منتصفي ساقيه.

خطأ، القطعة المتوسطة لشبه المنحرف

7) المستطيل يكون دائمًا متوازي أضلاع.

صحيحة

8) الشكل الرباعي الذي فيه زوجٌ واحدٌ من الأضلاع المتوازية هو متوازي أضلاع.

خطأ، شبه المنحرف

9) المعين الذي إحدى زواياه قائمة مستطيل.

صحيحة

10) ساق شبه المنحرف هو أحد ضلعيه غير المتوازيين.

صحيحة

1-1 زوايا المضلع (ص. 17-10)

أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة في كل من المضلعين المحدبين الآتيين :

11) العشاري.

$$m = (n-2).180$$
$$= (10-2).180$$
$$= (8).180 = 1440^\circ$$

12) ذو 15 ضلعًا.

$$m = (n-2).180$$
$$= (15-2).180$$
$$= (13).180 = 2340^\circ$$

13) **زخرفة :** يمثل نموذج الزخرفة المجاور شكلًا سداسيًا منتظمًا. أوجد مجموع قياسات زواياه الداخليّة.

$$m = (n-2).180$$
$$= (6-2).180$$
$$= (4).180 = 720^\circ$$

اوجد عدد اضلاع المضلع المنتظم المعطى قياس إحدى زواياه الداخلية في كل مما يأتي:

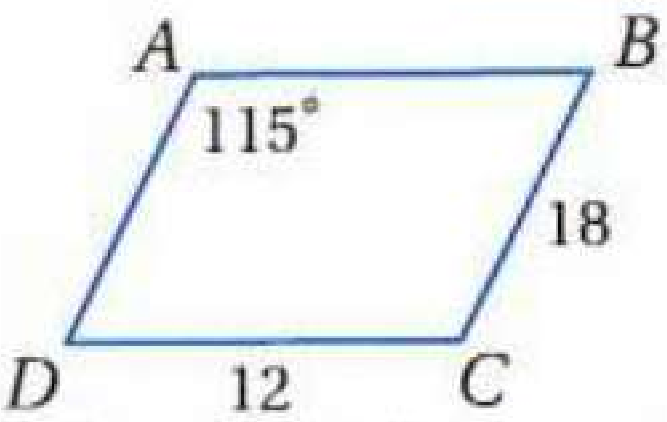
14) 135°

$$135n = (n-2).180$$
$$135n = 180n - 360$$
$$135n - 180n = -360$$
$$-45n = -360$$
$$n = 8$$

15) 168°

$$168n = (n-2).180$$
$$168n = 180n - 360$$
$$168n - 180n = -360$$
$$-12n = -360$$
$$n = 30$$

1-2 متوازي الأضلاع (ص. 19-26)



استعمل $\square ABCD$ المبين جانبًا لإيجاد كل مما يأتي :

16) $m\angle ADC$

نظرية الزاويتان المتحالفتان

$$\angle BAD + \angle ADC = 180$$

$$115 + \angle ADC = 180$$

$$\angle ADC = 180 - 115 = 65^\circ$$

17) AD

كل ضلعين متقابلين في متوازي الأضلاع متطابقين

$$AD = BC = 18$$

18) AB

كل ضلعين متقابلين في متوازي الأضلاع متطابقين

$$AB = DC = 12$$

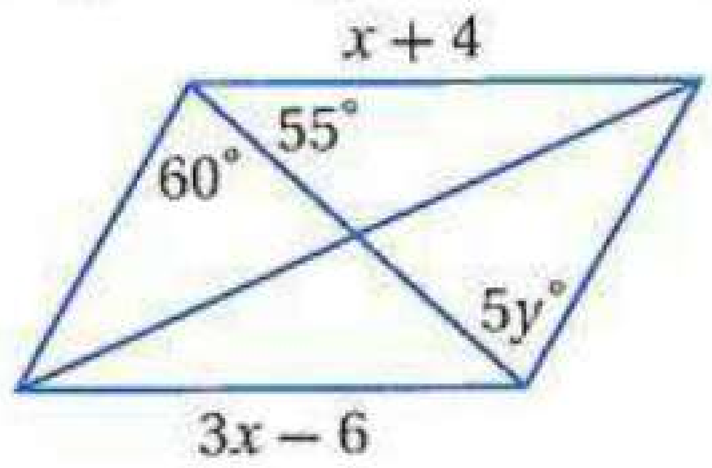
19) $m\angle BCD$

كل زاويتين متقابلين في متوازي الأضلاع متطابقين

$$\angle BAD = \angle BCD = 115^\circ$$

جبر: أوجد قيمتي x, y في كل من متوازيي الأضلاع الآتيين:

20)



$$x + 4 = 3x - 6$$

$$3x - x = 4 + 6$$

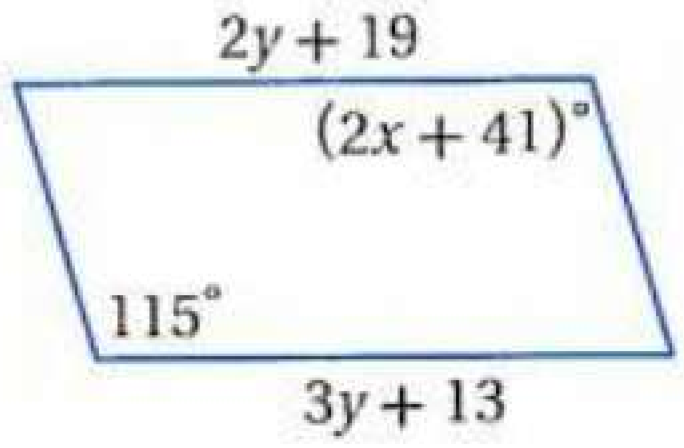
$$2x = 10$$

$$x = 5$$

$60 = 5y$

$y = 12$

(21



$2y + 19 = 3y + 13$

$3y - 2y = 19 - 13$

$y = 6$

$2x + 41 = 115$

$2x = 115 - 41$

$2x = 74$

$x = 37$

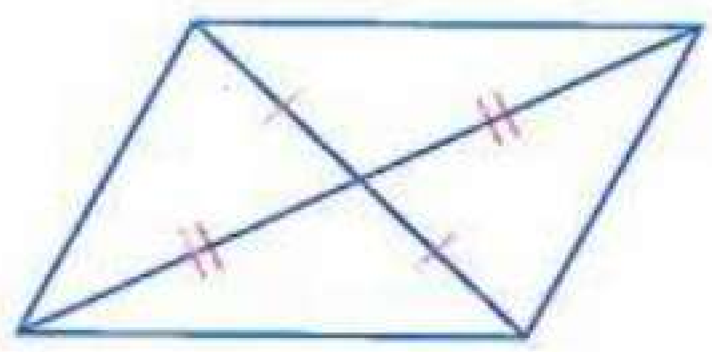
(22 **تصميم:** ما المعطيات الضرورية لتحديد ما إذا كانت الأجزاء المكونة للنمط أدناه متوازيات أضلاع؟

إذا كانت الأضلاع المتقابلة متساوية في الطول أو إذا كان زوج من الأضلاع المتقابلة متطابقاً ومتوازياً، فإن الشكل متوازي أضلاع. ويمكن أن يكون الشكل متوازي أضلاع أيضاً إذا كانت الزوايا المتقابلة متطابقة أو إذا كان القطران ينصف كل منهما الآخر.

1-3 تمييز متوازي الأضلاع

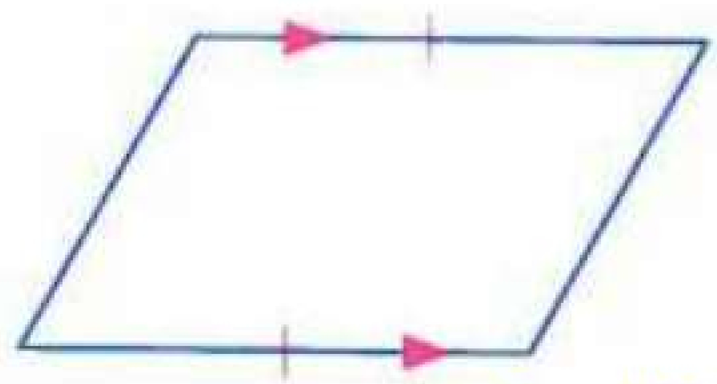
حدد ما إذا كان الشكل الرباعي في كل مما يأتي متوازي أضلاع أم لا؟ برّر إجابتك.

(23



نعم، النظرية 1.11

(24

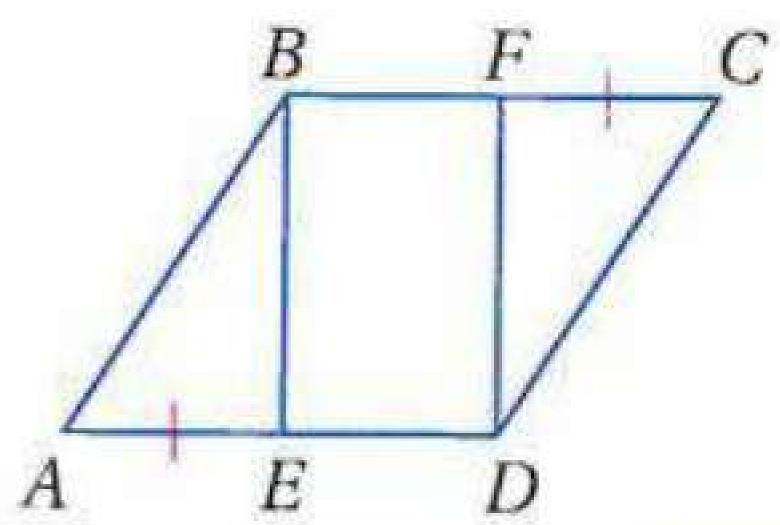


نعم، النظرية 1.12

(25 **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $\square ABCD$ ، $\overline{AE} \cong \overline{CF}$

المطلوب: $EBFD$ متوازي أضلاع.



المعطيات: $\overline{AE} \cong \overline{CF}$ ، $\square ABCD$

المطلوب: الشكل الرباعي EBFD متوازي أضلاع.

البرهان:

1) $\square ABCD$ ، $\overline{AE} \cong \overline{CF}$ (معطيات)

2) $\overline{AE} \cong \overline{CF}$ (تعريف تطابق القطع المستقيمة)

3) $\overline{BC} \cong \overline{AD}$ (الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة)

4) $BC = AD$ (تعريف تطابق القطع المستقيمة)

5) $\overline{AD} = \overline{AE} + \overline{ED}$, $\overline{BC} = \overline{BF} + \overline{CF}$ (مسلمة جمع القطع المستقيمة) $BF + AE = AE + ED$

6) $BF + CF = AE + ED$ (بالتعويض)

7) $BF + AE = AE + ED$ (بالتعويض)

8) $BF = ED$ (خاصية الطرح)

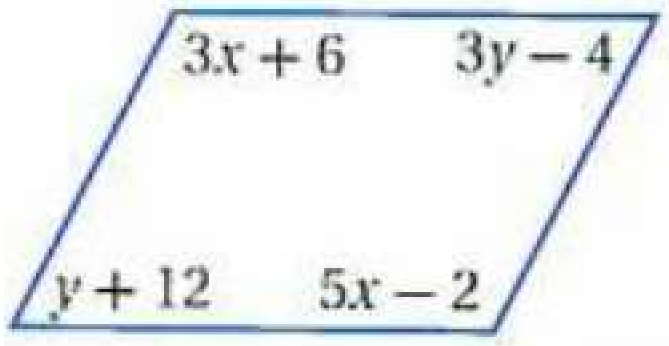
9) $\overline{BF} \cong \overline{ED}$ (تعريف تطابق القطع المستقيمة)

10) $\overline{BF} \parallel \overline{ED}$ (تعريف متوازي الأضلاع)

11) الشكل الرباعي EBFD متوازي أضلاع (إذا كان زوج من الأضلاع المتقابلة متوازياً ومتطابقاً فإن الشكل الرباعي متوازي أضلاع)

جبر: أوجد قيمتي x , y في كل مما يأتي بحيث يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

26)



$3x + 6 = 5x - 2$

$5x - 3x = 6 + 2$

$2x = 8$

$x = 4$

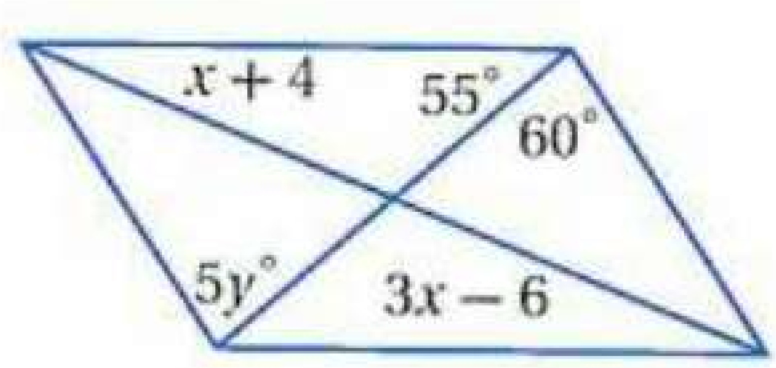
$3y - 4 = y + 12$

$3y - y = 12 + 4$

$2y = 16$

$y = 8$

(27



$$x + 4 = 3x - 6$$

$$3x - x = 4 + 6$$

$$2x = 10$$

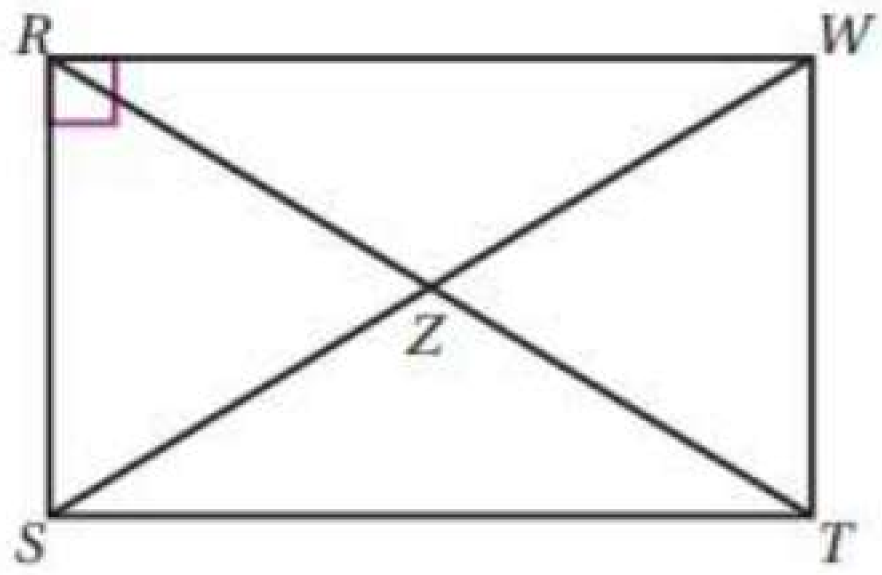
$$x = 5$$

$$5y = 60$$

$$y = 12$$

1-4 المستطيل (ص. 41-36)

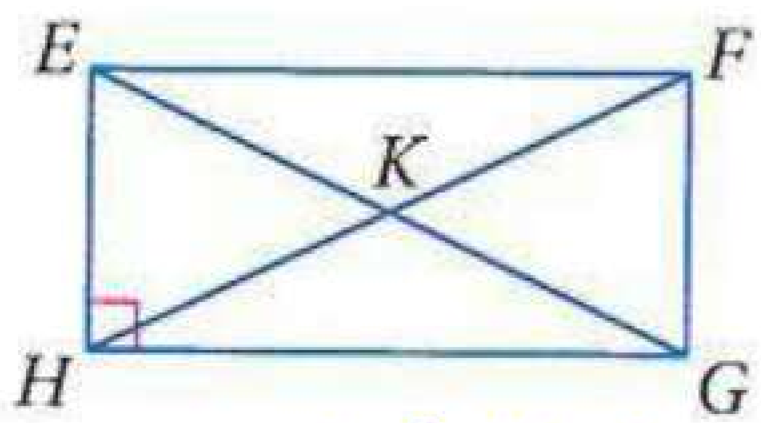
28) **جبر:** الشكل الرباعي $RSTW$ مستطيل، إذا كان $RZ=(2x+5)\text{in}$، $SW=(5x-20)\text{in}$، فأوجد x؟



من خصائص المستطيل إن قطراه متطابقان

$$RT = WS$$
$$2(2x+5) = 5x - 20$$
$$4x + 10 = 5x - 20$$
$$5x - 4x = 10 + 20$$
$$x = 30$$

جبر: استعن بالمستطيل $EFGH$ أدناه.



من خصائص إن جميع زواياه قوائم

29) إذا كان $m\angle FEG = 57°$، فأوجد $m\angle GEH$.

$$\angle GEH = 90 - 57 = 33^{\circ}$$

30) إذا كان $m\angle HGE = 13°$، فأوجد $m\angle FGE$.

$$\angle FGE = 90 - 13 = 77^{\circ}$$

31) إذا كان $FK = 32$ ft، فأوجد EG.

قطرا المستطيل متطابق

$$FH = FK + KH$$
$$FH = 32 + 32 = 64$$
$$FH = EG = 64ft$$

32) أوجد $m\angle HEF + m\angle EFG$.

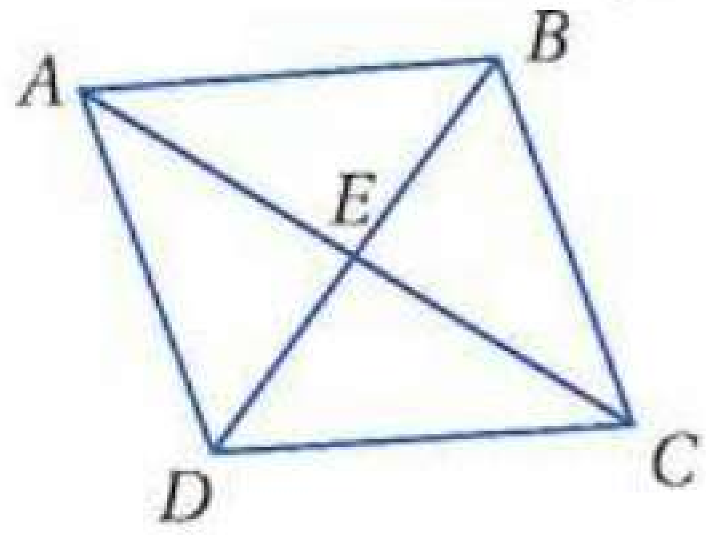
زوايا المستطيل قوائم

$$\angle HEF + \angle EFG = 90 + 90 = 180^{\circ}$$

1-5 المعين والمربع (ص. 49-42)

جبر: في المعين $ABCD$ ، إذا كان $EB = 9, AB = 12$ ، $m\angle ABD = 55^\circ$، فأوجد كلًّا مما يأتي :

33) AE



$$(AB)^2 = (EB)^2 + (AE)^2$$
$$(12)^2 = (9)^2 + (AE)^2$$
$$(AE)^2 = (12)^2 - (9)^2$$
$$AE \approx 7.9$$

34) $m\angle BDA$

بما أن $AB = AD$ من خصائص المعين أن جميع أضلاعه متطابقة إذا:

$$\angle BDA = \angle ABD = 55^\circ$$

35) CE

$$(BC)^2 = (EB)^2 + (EC)^2$$
$$(12)^2 = (9)^2 + (EC)^2$$
$$(EC)^2 = (12)^2 - (9)^2$$
$$AE \approx 7.9$$

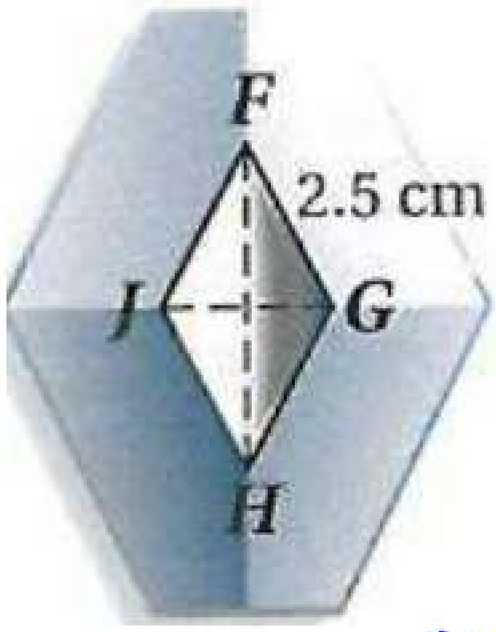
36) $m\angle ACB$

بما أن $m\angle ABD = 55$ وبما أن قطرا المعين ينصف الزوايا

إذا $m\angle DBC = 55$ وحسب نظرية الزاويتان المتحالفتان:

$$m\angle BCD = 180 - (55 + 55)$$
$$m\angle BCD = 70$$
$$m\angle ACB = \frac{70}{2} = 35^\circ$$

37) **شعار:** تتخذ شركة سيارات الشكل المجاور علامة تجارية لها. إذا كان شكل العلامة التجارية معينًا، فما طول FJ؟



من خصائص المعين أن جميع أضلاعه متطابقة

$$FG = FJ = 2.5cm$$

هندسة إحداثية: حدد ما إذا كان $\square QRST$ المعطاة إحداثيات رؤوسه في كل مما يأتي معينًا أو مستطيلًا أو مربعًا. اكتب جميع التسميات التي تنطبق عليه. ووضح إجابتك.

38) $Q(12, 0), R(6, -6), S(0, 0), T(6, 6)$

أولاً: استعمل صيغة المسافة بين نقطتين للمقارنة بين طولي القطرين.

$$QS = \sqrt{(12-0)^2 + (0-0)^2} = 12$$

$$RT = \sqrt{(6-6)^2 + (-6-6)^2} = 12$$

بما أن القطران RT, QS متساويان إذن هما متطابقان إذن الشكل مستطيل

ثانيا: استعمل صيغة الميل لتحديد ما إذا كان القطران متعامدان

ميل: $\overline{QS} = \frac{0-0}{12-0} = \frac{0}{12}$

ميل: $\overline{RT} = \frac{-6-6}{6-6} = \frac{-12}{0}$

بما أن حاصل ضرب الميلين $= -1$ فإن القطرين متعامدان لذا فأن $QRST$ معين.

إذن الشكل مستطيل ومعين ومربع؛ لأن الضلعين المتتاليين متطابقان ومتعامدان.

39) $Q(-2, 4), R(5, 6), S(12, 4), T(5, 2)$

أولاً: استعمل صيغة المسافة بين نقطتين للمقارنة بين طولي القطرين.

$$QS = \sqrt{(-2-12)^2 + (4-4)^2} = 14$$

$$RT = \sqrt{(5-5)^2 + (6-2)^2} = 4$$

بما أن القطران RT,QS غير متساويان إذن الشكل ليس مستطيل

ثانيا: استعمل صيغة الميل لتحديد ما إذا كان القطران متعامدان

ميل: $\overline{QS} = \frac{-2-12}{4-4} = \frac{-14}{0}$

ميل: $\overline{RT} = \frac{5-5}{6-2} = \frac{0}{4}$

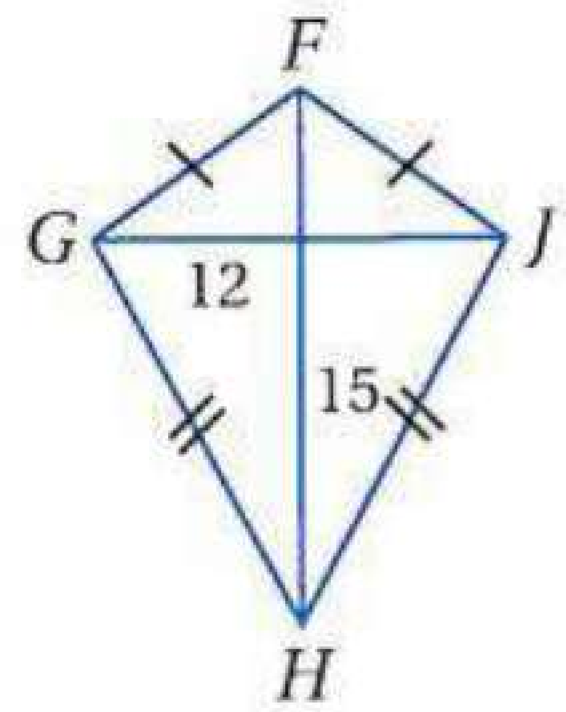
بما أن حاصل ضرب الميلين $\neq -1$ فإن القطرين ليس متعامدان لذا فأن QRST ليس معين.

إذن الشكل رباعي فقط وليس معين ولا مربع ولا مستطيل

1-6 شبه المنحرف وشكل الطائرة الورقيّة

أوجد القياس المطلوب في كل من السؤالين الآتيين:

40) GH

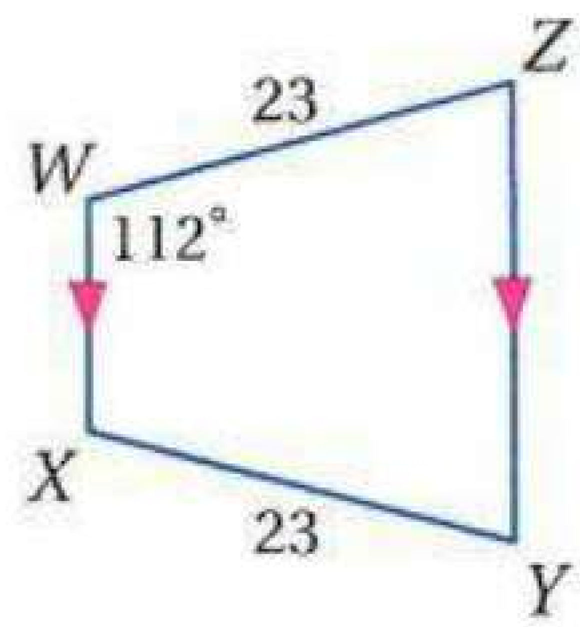


$$(GH)^2 = (15)^2 + (12)^2$$

$$(GH)^2 = 225 + 144$$

$$GH = 3\sqrt{41}$$

41) $m\angle Z$



بما أن $\overline{WX} \parallel \overline{ZY}$ و $WZ = XY$

إذا $\angle W = \angle X = 112$ وكذلك $\angle Z = \angle Y$

مجموع الزوايا الداخلية = 360°

$$\angle W + \angle Z + \angle Y + \angle X = 360$$

$$112 + \angle Z + \angle Z + 112 = 360$$

$$2\angle Z = 360 - (224)$$

$$2\angle Z = 136$$

$$\angle Z = 68^\circ$$

42) **تصميم:** استعن بقطعة البلاط المربعة الشكل المبينة جانبًا في السؤالين الآتيين:

a) صف طريقة لتحديد ما إذا كانت أشكال شبه المنحرف الظاهرة في البلاطة متطابقة الساقين؟

ساقا كل شبه منحرف أجزاء من قطري المربع.
وقطرا المربع ينصفان الزوايا المتقابلة، لذلك فقياس كل زاوية قاعدة لشبه المنحرف يساوي 45°.
زوج واحد من الأضلاع متواز وزاويتا كل قاعدة متطابقتان.
إذا شبه المنحرف متطابق الضلعين

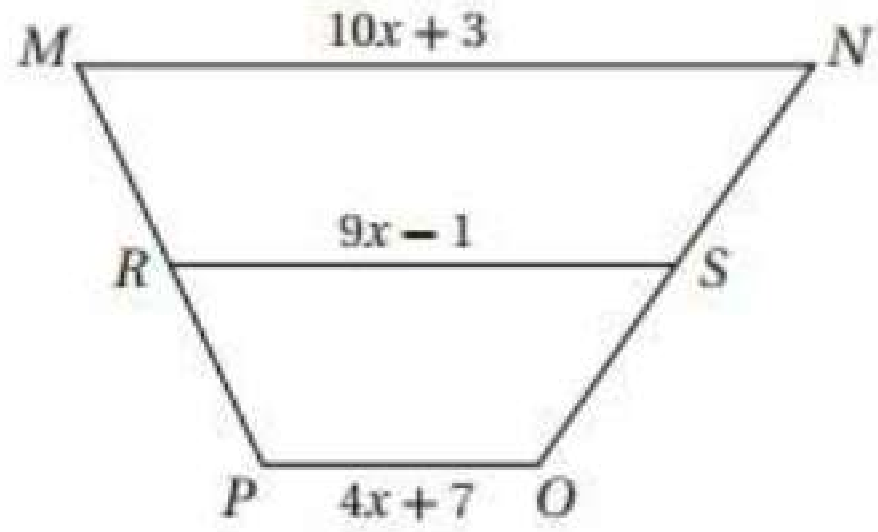
b) إذا كان محيط البلاطة 48 in، ومحيط المربّع الأحمر 16 in، فما محيط أحد أشكال شبه المنحرف ؟

طول القاعدة الكبرى = 12 in.
طول القاعدة الصغرى = 4 in.
قطر المربع الكبير = $12\sqrt{2} = \sqrt{144+144}$
قطر المربع الصغير = $4\sqrt{2} = \sqrt{16+16}$
طول أحد ساقي شبه المنحرف = $4\sqrt{2} = \dfrac{8\sqrt{2}}{2} = \dfrac{12\sqrt{2}-4\sqrt{2}}{2}$
محيط شبه المنحرف = $27.3\text{in.} \approx 12+4+4\sqrt{2}+4\sqrt{2}$

الإعداد للاختبارات المعيارية

اقرأ كل مسألة مما يأتي، وحدّد المطلوب . ثم استعمل المعطيات لحلها، وبيّن خطوات حلك:

1) $\overline{RS}$ قطعة متوسطة لشبه المنحرف $MNOP$. ما طول $\overline{RS}$ ؟



$$RS = \frac{1}{2}(MN + PO)$$

$$(9x - 1) = \frac{1}{2}(10x + 3 + 4x + 7)$$

$$(9x - 1) = \frac{1}{2}(14x + 10)$$

$$9x - 1 = 7x + 5$$

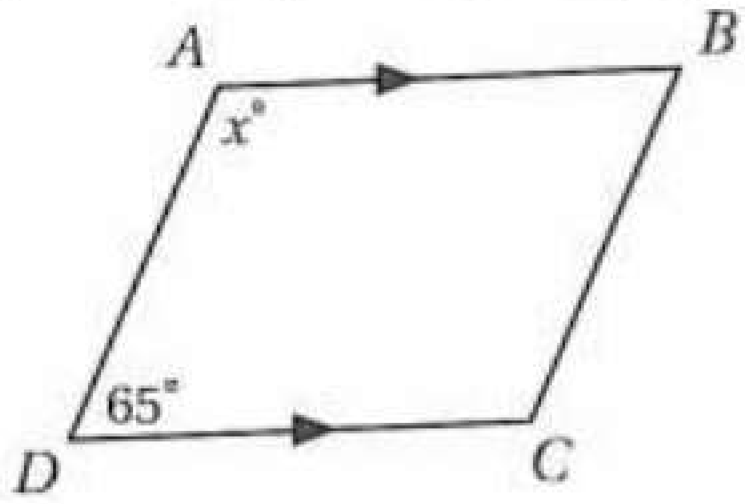
$$9x - 7x = 5 + 1$$

$$2x = 6$$

$$x = 3$$

$$RS = 9x - 1 = 27 - 1 = 26$$

2) إذا كان $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ ، فأوجد قيمة الزاوية x .



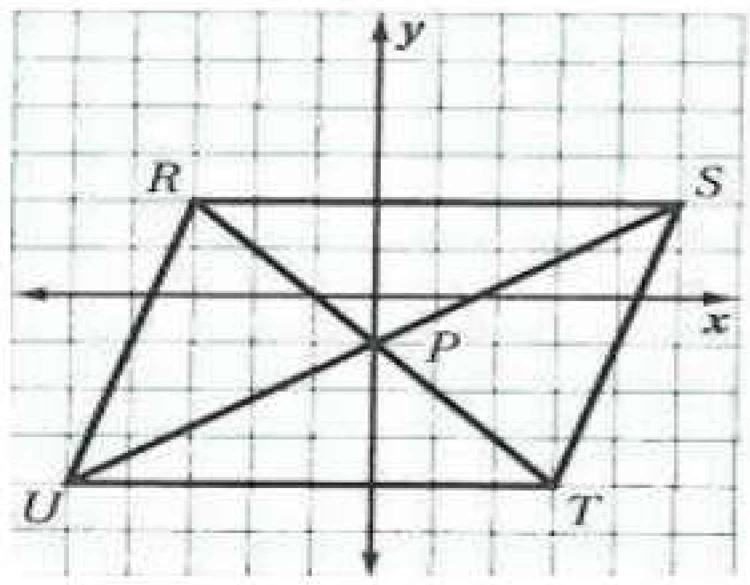
115 : J

$$x + 65 = 180$$

$$x = 180 - 65$$

$$x = 115$$

3) استعن بالتمثيل البياني أدناه في كل من السؤالين الآتيين:



a) هل ينصّف قطرا الشكل الرباعي $RSTU$ كل منهما الآخر؟ استعمل صيغة المسافة بين نقطتين لتتحقق من إجابتك.

$$S\,(5,2), P\,(0,-1), R\,(-3,2), U\,(-5,-4), T\,(-3,-4)$$

$$RP = \sqrt{(0+3)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{18}$$

$$PT = \sqrt{(0+3)^2 + (-1+4)^2} = \sqrt{18}$$

$$PS = \sqrt{(5-0)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{34}$$

$$UP = \sqrt{(0+5)^2 + (-1+4)^2} = \sqrt{34}$$

بما أن $RP = 3\sqrt{2}$, $PT = 3\sqrt{2}$, $PS = \sqrt{34}$, $UP = \sqrt{34}$ ، فإن القطران ينصف كل منهما الآخر.

b) ما نوع الشكل الرباعي $RSTU$؟ وضّح إجابتك باستعمال خصائص هذا النوع من الأشكال الرباعيّة أو تعريفه.

متوازي أضلاع، إذا كان قطرا شكل رباعي ينصف كل منهما الآخر فإن الشكل متوازي أضلاع.

4) ما مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة للثُّماني المنتظم؟

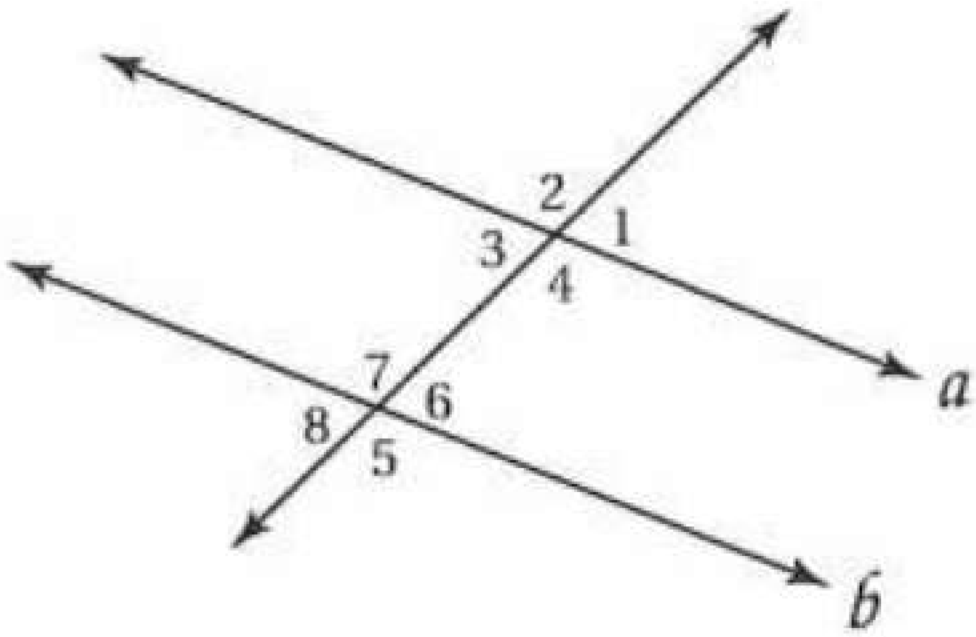
360

اختبار معياري

أسئلة الاختيار من متعدد

اقرأ كل سؤال مما يأتي، ثم اكتب رمز الإجابة الصحيحة على نموذج الإجابة.

1) إذا كان $b \parallel a$ ، فأيّ العبارات الآتية ليست صحيحة؟



A $\angle 1 \cong \angle 3$

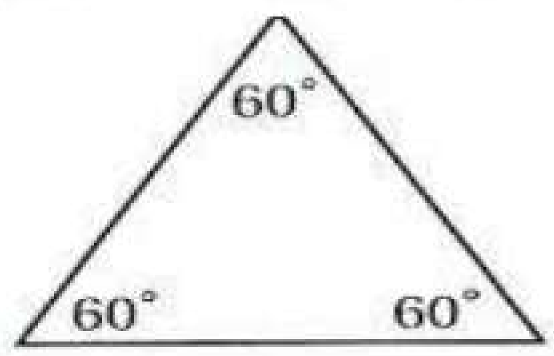
C $\angle 2 \cong \angle 5$

B $\angle 4 \cong \angle 7$

D $\angle 8 \cong \angle 2$

D : $\angle 8 \cong \angle 2$

2) صنّف المثلث أدناه تبعًا لقياسات زواياه. اختر المصطلح الأنسب.



F حادّ الزوايا

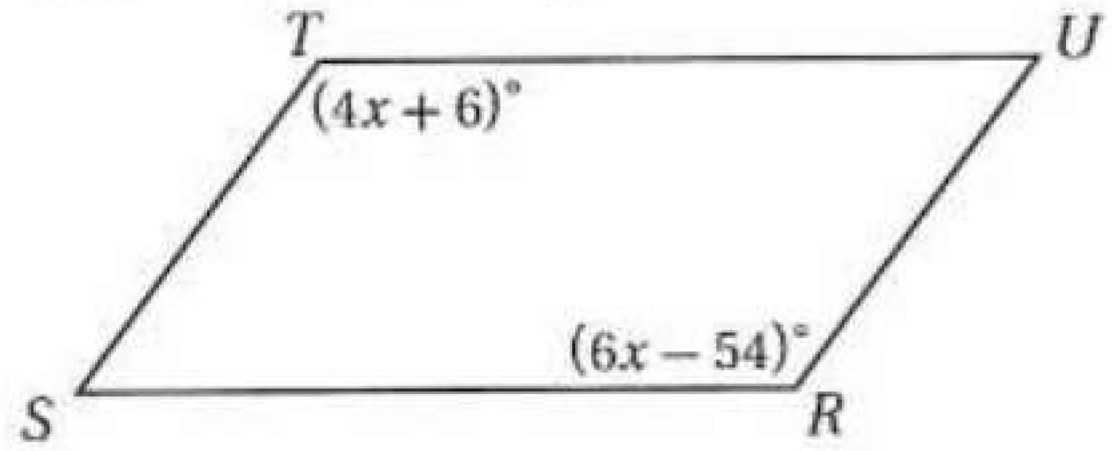
H منفرج الزاوية

G متطابق الزوايا

J قائم الزاوية

G : متطابق الزوايا

3) أوجد قيمة x في متوازي الأضلاع $RSTU$.



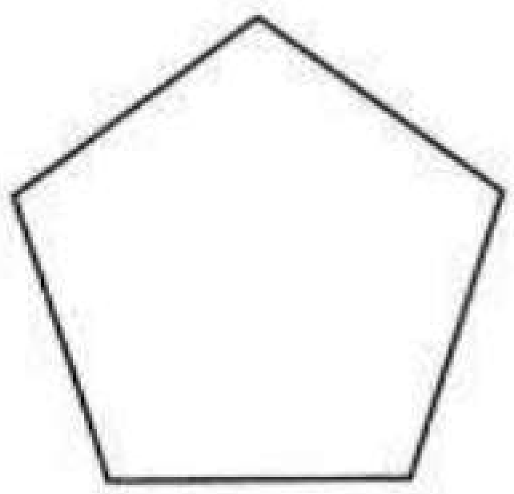
A 12   C 25

B 18   D 30

$30 : D$

$$4x + 6 = 6x - 54$$
$$6x - 4x = 6 + 54$$
$$2x = 60$$
$$x = 30$$

4) ما قياس الزوايا الداخليّة في الخُماسي المنتظم؟



F 96° H 120°

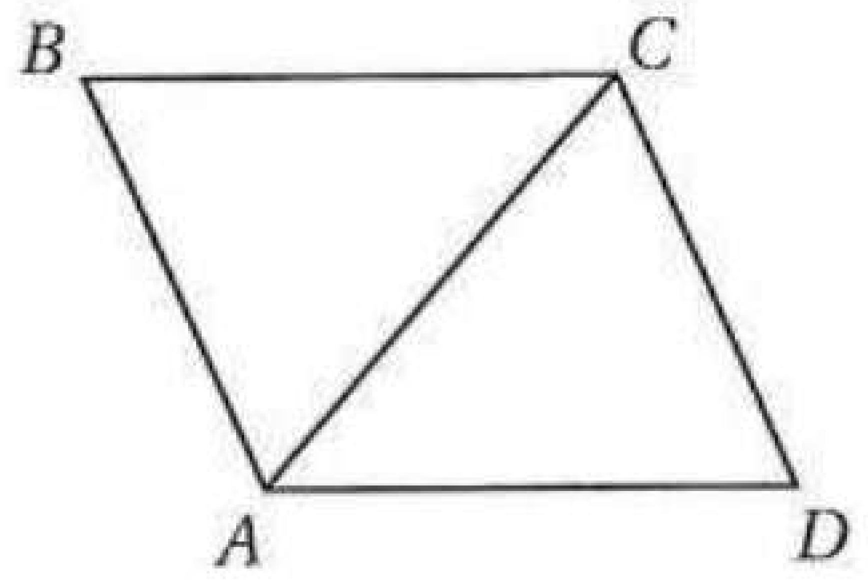
G 108° J 135°

$108^\circ : G$

$$= (n - 2).180 = (5 - 2).180 = 540^\circ$$
$$= \frac{540}{5} = 108$$

5) الشكل الرباعي $ABCD$ معينًا

فيه $m\angle BCD = 120^\circ$، أوجد $m\angle DAC$.



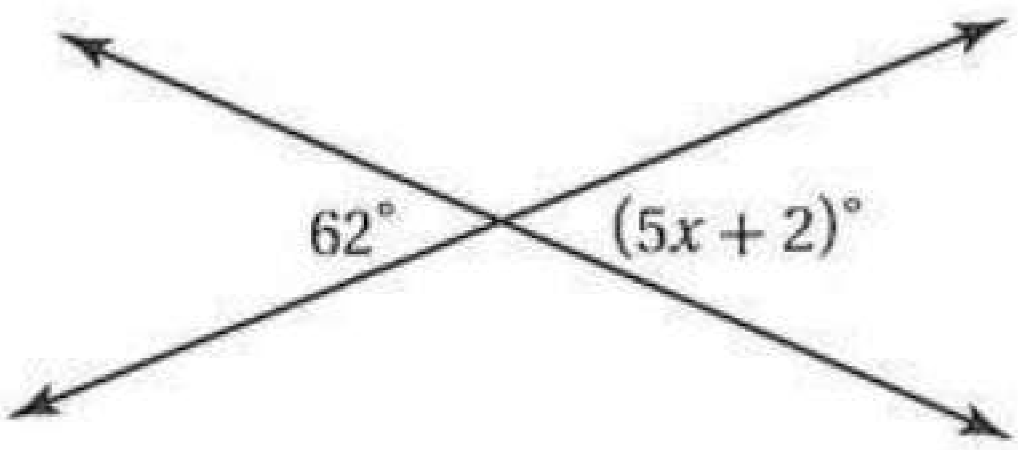
A 30° **C** 90°

B 60° **D** 120°

B : 60°

$$m\angle BCD = m\angle BAD = \frac{120}{2} = 60^\circ$$

6) ما قيمة x في الشكل أدناه؟



F 10 **H** 14

G 12 **J** 15

G : 12

$$5x + 2 = 62$$
$$5x = 62 - 2$$
$$5x = 60$$
$$x = 12$$

7) $\overline{AE}$, $\overline{DT}$ قطران للمستطيل $DATE$ يتقاطعان في S.
إذا كان $AE = 40, ST = x + 5$ ، فما قيمة x؟

A 35   C 15

B 25   D 10

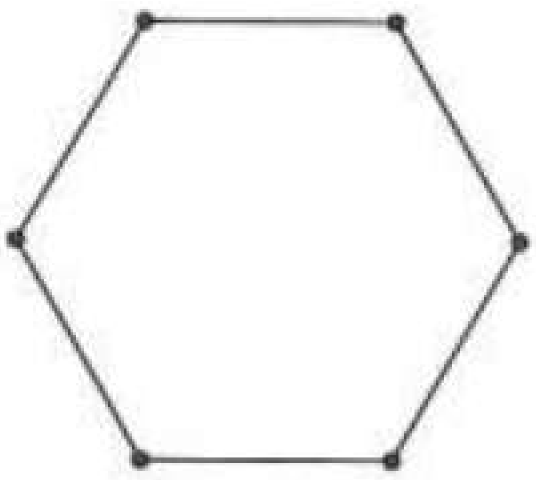
قطرا المستطيل متطابقان

$$2ST = AE$$
$$2(x+5) = 40$$
$$2x + 10 = 40$$
$$2x = 40 - 10$$
$$2x = 30$$
$$x = 15$$

أسئلة ذات إجابات قصيرة

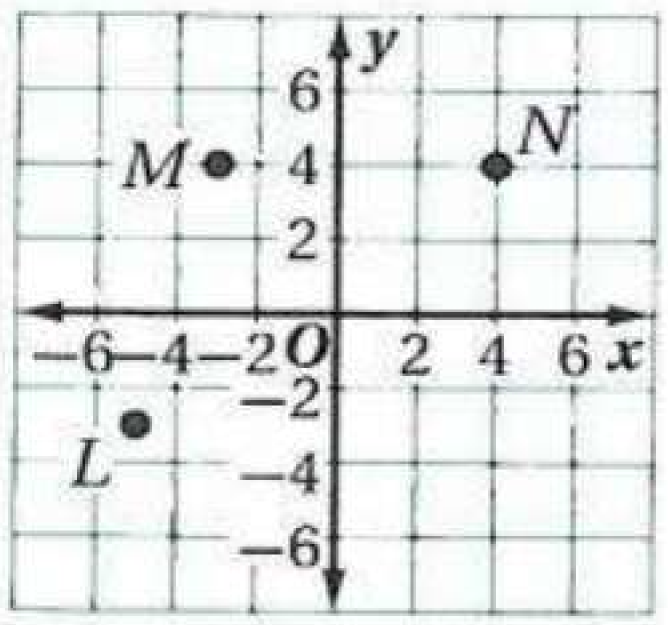
اكتب إجابتك على نموذج الإجابة.

8) تشكل أعمدة خيمة رؤوس سداسي منتظم، ما قياس الزاوية المتكوّنة عند أيّ من أركان الخيمة؟



$$120^\circ : G$$
$$(n-2).180 = (6-2).180 = 720^\circ$$
$$= \frac{720}{6} = 120^\circ$$

9) ما إحداثيات الرأس الرابع لشبه المنحرف المتطابق الساقين $LMNJ$؟ بيّن خطوات الحل.



$(6,-3)$

10) ماذا نسمي متوازي الأضلاع إذا كان قطراه متعامدين؟ وضّح إجابتك.

يكون مربعاً أو معيناً.

11) حدد ما إذا كانت النتيجة صحيحة أم لا فيما يأتي اعتمادًا على المعطيات. فسر تبريرك.

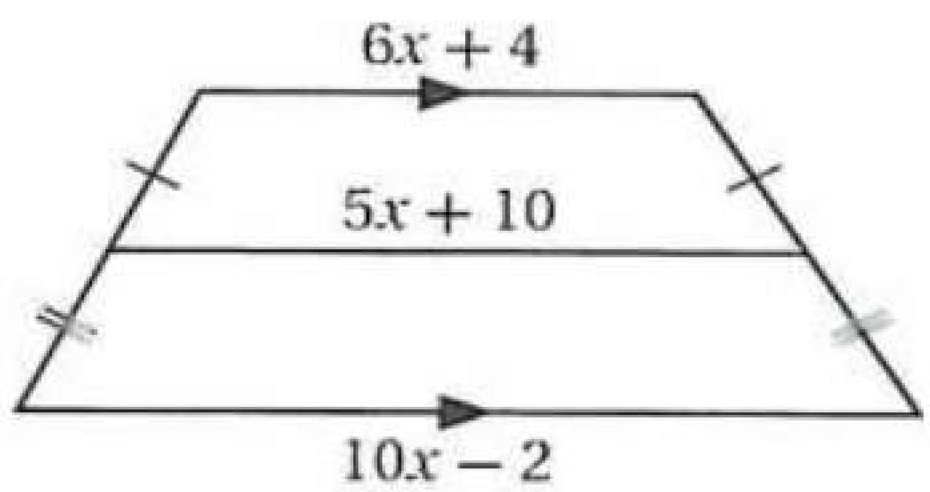
المعطيات: إذا كان العدد يقبل القسمة على 9، فإنّه يقبل القسمة على 3.

العدد 144 يقبل القسمة على 9.

النتيجة: العدد 144 يقبل القسمة على 3.

النتيجة صحيحة؛ قانون الفصل المنطقي.

12) **إجابة شبكيّة:** أوجد قيمة x في الشكل أدناه. وقرّب الإجابة إلى أقرب عُشر إن كان ذلك ضروريًّا.



$$5x + 10 = \frac{1}{2}(10x - 2 + 6x + 4)$$

$$5x + 10 = \frac{1}{2}(16x + 2)$$

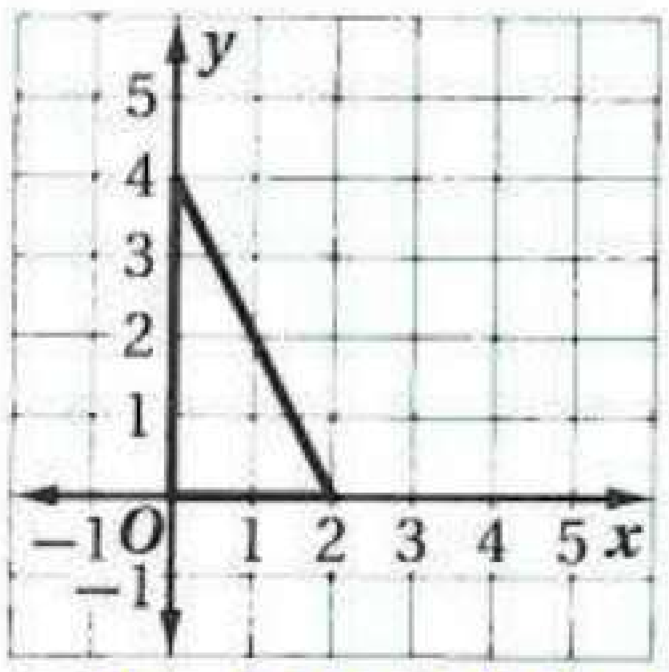
$$10x + 20 = 16x + 2$$

$$16x - 10x = 20 - 2$$

$$6x = 18$$

$$x = 3$$

13) ما إحداثيات مركز الدائرة التي تمر برؤوس المثلث أدناه؟



رؤوس المثلث هي: $(0,0)(2,0)(0,4)$

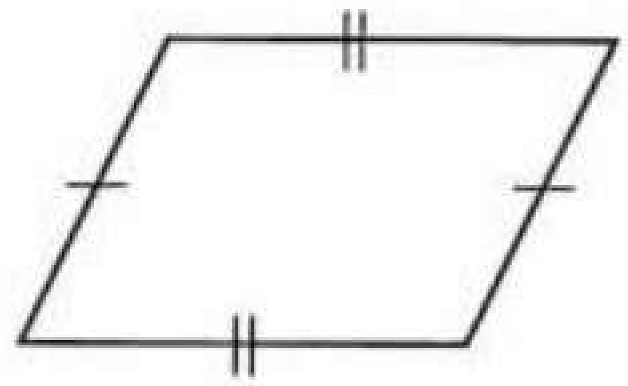
معادلة أحد الأعمدة المنصفة هي $y = \frac{2-0}{2} = 1$ ومعادلة عمود منصف آخر هي $x = \frac{4-0}{2} = 2$. ويتقاطع هذان العمودان عند النقطة $(5,3)$ لذلك فمركز الدائرة التي تمر في رؤوس المثلث يقع عند النقطة $(1,2)$

أسئلة ذات إجابات مطولة

اكتب إجابتك على نموذج الإجابة مبينًا خطوات الحل.

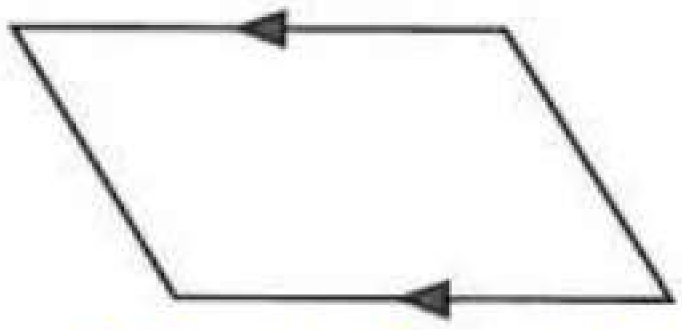
14) هل يمكنك إثبات أنّ كل شكل مما يأتي متوازي أضلاع؟ إذا لم تستطع ذلك، فاذكر المعطيات الإضافية التي ستحتاج إليها لإثبات أنه متوازي أضلاع. ووضّح تبريرك.

(a



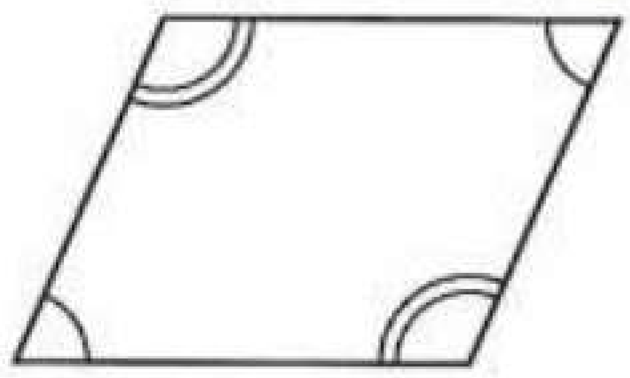
نعم؛ الأضلاع المتقابلة متطابقة، لذا فالشكل متوازي أضلاع

(b



لا؛ ضلعان متقابلان فقط متوازيان. عليك أن تبين أن:
1) الضلعين المتوازيين متطابقان أيضاً
أو 2) الضلعين المتقابلين الآخرين متوازيان

(c



نعم؛ الزوايا المتقابلة متطابقة، لذا فالشكل متوازي أضلاع.