موقع
حلول كتبي

تم تحميل وعرض المادة من

موقع حلول كتبي

المدرسة اونلاين

موقع
حلول كتبي

https://hululkitab.co

جميع الحقوق محفوظة للقائمين على العمل

للعودة إلى الموقع ابحث في قوقل عن : موقع حلول كتبي

موقع
حلول كتبي

قررت وزارة التعليم تدريس
هذا الكتاب وطبعه على نفقتها

المملكة العربية السعودية
وزارة التعليم
Ministry of Education

رياضيات ٤

التعليم الثانوي

(نظام المقررات)

(مسار العلوم الطبيعية)

قام بالتأليف والمراجعة
فريق من المتخصصين

طبعة ١٤٤٣ - ٢٠٢١

يوزع مجانًا ولا يباع
وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع
حلول كتبي

ⓒ وزارة التعليم ، ١٤٣٨هـ

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر
وزارة التعليم
الرياضيات ٤ (كتاب الطالب) التعليم الثانوي نظام المقررات (مسار العلوم الطبيعية). وزارة التعليم.- الرياض ، ١٤٣٨هـ
٢٢٨ ص ؛ ٥ , ٢٧ x ٢١سم
ردمك : ٣ - ٤٧٠ - ٥٠٨ - ٦٠٣ - ٩٧٨

١- الرياضيات - مناهج - السعودية ٢- التعليم الثانوي - مناهج - السعودية أ. العنوان
ديوي ٥١ , ٣٧٥٠ ١٤٣٨/٤٥٧٢

رقم الإيداع : ١٤٣٨/٤٥٧٢
ردمك : ٣ - ٤٧٠ - ٥٠٨ - ٦٠٣ - ٩٧٨

حول الغلاف

تُعدّ حركة البندول مثالاً على دالة جذرية.

حقوق الطبع والنشر محفوظة لوزارة التعليم

www.moe.gov.sa

مواد إثرائية وداعمة على "منصة عين"

IEN.EDU.SA

تواصل بمقترحاتك لتطوير الكتاب المدرسي

FB.T4EDU.COM

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع
حلول كتبي

موقع
حلول كتبي

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع
حلول كتبي

المقدمة

تعد مادة الرياضيات من المواد الدراسية الأساسية التي تهيِّئ للطالب فرص اكتساب مستويات عُليا من الكفايات التعليمية، مما يتيح له تنمية قدرته على التفكير وحل المشكلات، ويساعده على التعامل مع مواقف الحياة وتلبية متطلباتها.

ومن منطلق الاهتمام الذي توليه حكومة خادم الحرمين الشريفين بتنمية الموارد البشرية، وعيًا بأهمية دورها في تحقيق التنمية الشاملة، كان توجه وزارة التعليم نحو تطوير المناهج الدراسية وفي مقدمتها مناهج الرياضيات، بدءًا من المرحلة الابتدائية، سعيًا للارتقاء بمخرجات التعليم لدى الطلاب، والوصول بهم إلى مصاف أقرانهم في الدول المتقدمة.

وتتميز هذه الكتب بأنها تتناول المادة بأساليب حديثة، تتوافر فيها عناصر الجذب والتشويق، التي تجعل الطالب يقبل على تعلمها ويتفاعل معها، من خلال ما تقدمه من تدريبات وأنشطة متنوعة، كما تؤكد هذه الكتب على جوانب مهمة في تعليم الرياضيات وتعلمها، تتمثل فيما يأتي:

- الترابط الوثيق بين محتوى الرياضيات وبين المواقف والمشكلات الحياتية.
- تنوع طرائق عرض المحتوى بصورة جذابة مشوقة.
- إبراز دور المتعلم في عمليات التعليم والتعلم.
- الاهتمام بالمهارات الرياضية، والتي تعمل على ترابط المحتوى الرياضي وتجعل منه كلاً متكاملاً، ومن بينها: مهارات التواصل الرياضي، ومهارات الحس الرياضي، ومهارات جمع البيانات وتنظيمها وتفسيرها، ومهارات التفكير العليا.
- الاهتمام بتنفيذ خطوات أسلوب حل المشكلات، وتوظيف استراتيجياته المختلفة في كيفية التفكير في المشكلات الرياضية والحياتية وحلها.
- الاهتمام بتوظيف التقنية في المواقف الرياضية المختلفة.
- الاهتمام بتوظيف أساليب متنوعة في تقويم الطلاب بما يتناسب مع الفروق الفردية بينهم.

ولمواكبة التطورات العالمية في هذا المجال، فإن المناهج المطوَّرة والكتب الجديدة سوف توفر للمعلم مجموعة متكاملة من المواد التعليمية المتنوعة التي تراعي الفروق الفردية بين الطلاب، بالإضافة إلى البرمجيات والمواقع التعليمية، التي توفر للطالب فرصة توظيف التقنيات الحديثة والتواصل المبني على الممارسة، مما يؤكد دوره في عملية التعليم والتعلم.

ونحن إذ نقدّم هذه الكتب لأعزائنا الطلاب، لنأمل أن تستحوذ على اهتمامهم، وتلبي متطلباتهم وتجعل تعلمهم لهذه المادة أكثر متعة وفائدة.

والله ولي التوفيق.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

الفهرس

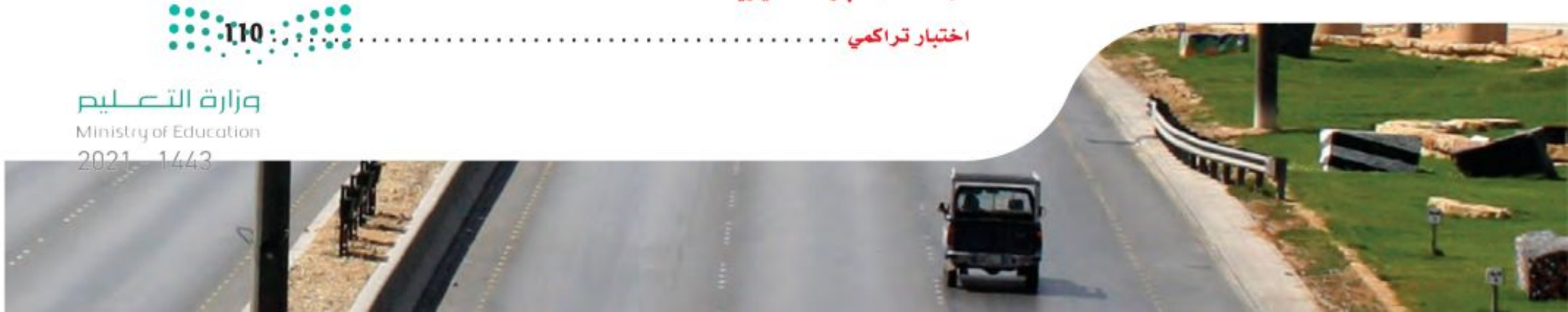
الفصل 1 العلاقات والدّوال النّسبية

التهيئة للفصل الأول 11
1-1 ضرب العبارات النّسبية وقسمتها 12
1-2 جمع العبارات النّسبية وطرحها 21
1-3 تمثيل دوال المقلوب بيانيًّا 27
اختبار منتصف الفصل 33
1-4 تمثيل الدّوال النّسبية بيانيًّا 34
توسع 1-4 معمل الحاسبة البيانية: تمثيل الدّوال النّسبية بيانيًّا 40
1-5 دوال التغيُّر 41
1-6 حل المعادلات والمتباينات النّسبية 47
توسع 1-6 معمل الحاسبة البيانية: حل المعادلات والمتباينات النّسبية 53
دليل الدراسة والمراجعة 55
اختبار الفصل 59
الإعداد للاختبارات المعيارية 60
اختبار تراكمي 62

الفصل 2 المتتابعات والمتسلسلات

التهيئة للفصل الثاني 65
2-1 المتتابعات بوصفها دوال 66
2-2 المتتابعات والمتسلسلات الحسابية 72
2-3 المتتابعات والمتسلسلات الهندسية 80
اختبار منتصف الفصل 86
2-4 المتسلسلات الهندسية اللانهائية 87
توسع 2-4 معمل الحاسبة البيانية: نهاية المتتابعة 93
2-5 نظرية ذات الحدين 94
توسع 2-5 معمل الجبر: التوافيق ومثلّث باسكال 98
2-6 البرهان باستعمال مبدأ الاستقراء الرياضيّ 99
دليل الدراسة والمراجعة 103
اختبار الفصل 107
الإعداد للاختبارات المعيارية 108
اختبار تراكمي 110

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443



موقع حلول كتبي

الفهرس

الفصل 3 **الاحتمالات**

التهيئة للفصل الثالث 113

3-1 تمثيل فضاء العيِّنة 114

3-2 الاحتمال باستعمال التباديل والتوافيق 120

3-3 الاحتمال الهندسي 127

اختبار منتصف الفصل 133

3-4 احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة 134

3-5 احتمالات الحوادث المتنافية 141

دليل الدراسة والمراجعة 148

اختبار الفصل 151

الإعداد للاختبارات المعيارية 152

اختبار تراكمي 154

الفصل 4 **حساب المثلَّثات**

التهيئة للفصل الرابع 157

استكشاف 4-1 معمل الجداول الإلكترونية: استقصاء المثلَّثات القائمة الخاصة 158

4-1 الدَوال المثلَّثية في المثلَّثات القائمة الزاوية 159

4-2 الزوايا وقياساتها 168

4-3 الدَوال المثلَّثية للزوايا 174

4-4 قانون الجيوب 180

توسع 4-4 معمل الهندسة: مساحة متوازي الأضلاع 187

اختبار منتصف الفصل 188

4-5 قانون جيوب التمام 189

4-6 الدَوال الدَائرية 195

4-7 تمثيل الدَوال المثلَّثية بيانيًا 202

4-8 الدَوال المثلَّثية العكسية 209

دليل الدراسة والمراجعة 215

اختبار الفصل 220

الإعداد للاختبارات المعيارية 221

اختبار تراكمي 223

الصيغ والرموز 225

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

ستركز في دراستك لهذا الكتاب على عدة موضوعات رياضية، تشمل ما يأتي:

- **العلاقات والدّوال النّسبية وخصائصها.**
- **المتتابعات والمتسلسلات والعمليات عليها.**
- **الاحتمالات وتطبيقاتها.**
- **حساب المثلثات وتطبيقاتها.**

وفي أثناء دراستك، ستتعلم طرائق لحل المسائل الجبرية وتمثيلها بصور متعددة وسوف تفهم لغة الرياضيات وتستعمل أدواتها، وتنمي قدراتك الذهنية وتفكيرك الرياضي.

موقع حلول كتبي

كيف تستعمل كتاب الرياضيات؟

- **اقرأ** فقرة **فيما سبق** لتعرف ارتباط هذا الدرس بما درسته من قبل، ولتعرف أفكار الدرس الجديد

  اقرأ فقرة **والآن** .

- **ابحث** عن **المفردات** المظللة **باللون الأصفر** باللغتين العربية والإنجليزية، واقرأ تعريف كل منها.

- **راجع** المسائل الواردة في **مثال** والمحلولة بخطوات تفصيلية؛ لتوضيح أفكار الدرس الرئيسة.

- **تذكَّر** بعض المفردات التي تعلَّمتها من قبل، بالرجوع إلى فقرة **مراجعة المفردات** .

- **ارجع** إلى المثال المشار إليه مقابل بعض التمارين في فقرتي **تأكد** و **تدرب وحل المسائل** ليساعدك

  على حل هذه التمارين وما شابهها.

- **استعن** بأسئلة **تدريب على اختبار** لتتعرف بعض أنماط أسئلة الاختبارات.

- **ارجع** إلى **مراجعة تراكمية** لتراجع أفكار الدروس السابقة.

- **ارجع** إلى **إرشادات للدراسة** حيث تجد معلومات وتوجيهات تساعدك في متابعة الأمثلة المحلولة.

- **ارجع** إلى فقرة **قراءة الرياضيات** ؛ لتتذكر نُطق بعض الرموز والمصطلحات الرياضية.

- **ارجع** إلى فقرة **تنبيه!** دائمًا لتعرف الأخطاء الشائعة التي يقع فيها كثير من الطلاب حول بعض المفاهيم الرياضية فتجتنبها.

- **نفِّذ** **اختبار الفصل** في نهاية كل فصل، بعد أن تُراجع أفكار الدرس مستفيدًا مما دوَّنته

  من أفكار في **المطويات** .

- **استعن** بصفحتَي **الإعداد للاختبارات** ؛ لتتعرف أنواع أسئلة الاختبارات وبعض طرق حلّها.

- **نفذ** **الاختبار التراكمي** في نهاية كل فصل لمراجعة الأفكار الرئيسة للفصل وماقبله من فصول.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

الفصل 1

العلاقات والدوالّ النسبية
Rational Functions and Relations

فيما سبق:

درست حل المعادلات التربيعية: بالتحليل إلى العوامل، وبيانيًا.

والآن:

- أتعرّف العبارات النسبية وأبسطها.
- أمثّل دوالّ نسبية بيانيًا.
- أحل مسائل التغيّر الطردي والتغيّر المشترك والتغيّر العكسي والتغيّر المركب.
- أحل معادلات ومتباينات نسبية.

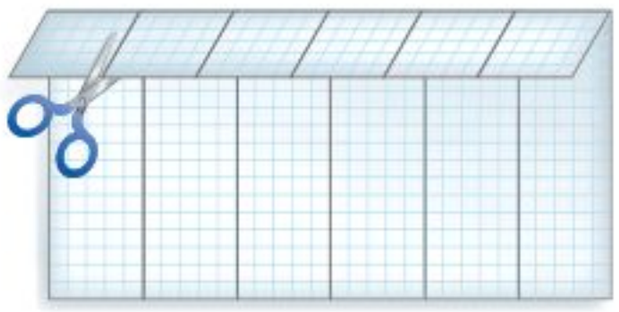
لماذا؟

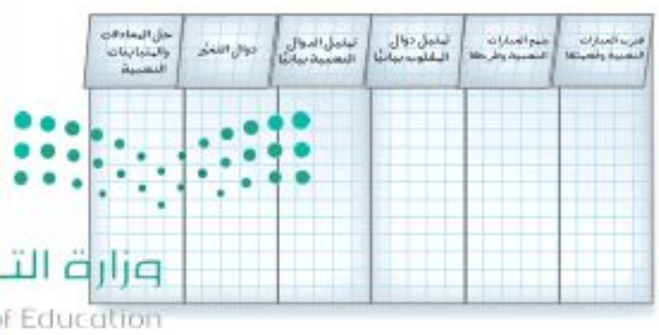
سفر: يمكن استعمال الدوالّ النسبية للتعبير عن المسافة، والزمن، والسرعة، عند السفر بالسيارة، أو بالطائرة، فإذا أردت الوصول إلى وجهة معينة في زمن معين، فيمكنك استعمال العلاقات النسبية للتوصل إلى السرعة المناسبة التي يجب أن تسير بها لتحقق هدفك.

المطويات منظم أفكار

العلاقات والدوالّ النسبية: اعمل هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك حول العلاقات والدوالّ النسبية، مبتدئًا بورقة رسم بياني.

1. **اطو** الورقة عرضيًا ست طيات متساوية.
2. **اطو** الحافة العلوية للورقة بعرض 2cm، ثم قصّ 6 أشرطة مبتدئًا من الحافة حتى خط الطيّ العرضي.
3. **اكتب** عناوين الدروس على الجهات الخارجية العلوية لأشرطة الطيات الست، واستعمل الجهات الداخلية للطيات لكتابة التعريفات والملاحظات.





وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي
رابط المنصة الرقمي
www.ien.edu.sa

التهيئة للفصل الأول

أجب عن الاختبار الآتي: انظر المراجعة السريعة قبل الإجابة عن الاختبار.

اختبار سريع

حُلّ كلَّ معادلة مما يأتي، واكتب الحل في أبسط صورة. (تستعمل مع الدرس 1-1)

1) $\frac{5}{14}=\frac{1}{3}x$

2) $\frac{1}{8}m=\frac{7}{3}$

3) $\frac{8}{5}=\frac{1}{4}k$

4) $\frac{10}{9}p=7$

5) **شاحنات:** استهلكت شاحنة $\frac{1}{3}$ سعة خزان وقودها الممتلئ في إحدى الرحلات، فإذا بقي في الخزان 80 لترًا من الوقود عند نهاية الرحلة، فما سعة خزان وقود الشاحنة؟

بسّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي: (تستعمل مع الدرس 2-1)

6) $\frac{3}{4}-\frac{7}{8}$

7) $\frac{8}{9}-\frac{7}{6}+\frac{1}{3}$

8) $\frac{9}{10}-\frac{4}{15}+\frac{1}{3}$

9) $\frac{10}{3}+\frac{5}{6}+3$

10) **دقيق:** تستعمل علياء $\frac{2}{3}$ كوب من الدقيق لعمل كعكة الفراولة، في حين تستعمل $\frac{3}{4}$ كوب لعمل كعكة الفانيليا. كم كوبًا من الدقيق تحتاج لعمل الكعكتين؟

حُلّ كلَّ تناسب مما يأتي: (تستعمل مع الدرس 4-1)

11) $\frac{9}{12}=\frac{p}{36}$

12) $\frac{9}{18}=\frac{6}{m}$

13) $\frac{2}{7}=\frac{5}{k}$

14) **تسوق:** تسوق أحمد من متجر في موسم التخفيضات، فاشترى ملابس سعرها الأصلي 550 ريالًا، ودفع مبلغ 440 ريالًا بعد الخصم. إذا أراد شراء ملابس أخرى من المتجر نفسه سعرها الأصلي 350 ريالًا وبنسبة التخفيض نفسها، فكم يدفع؟

مراجعة سريعة

مثال 1

حُلّ المعادلة: $\frac{9}{11}=\frac{7}{8}r$ ، واكتب الحل في أبسط صورة.

$\frac{9}{11}=\frac{7}{8}r$	المعادلة الأصلية
$\frac{72}{11}=7r$	اضرب كل من الطرفين في العدد 8
$\frac{72}{77}=r$	اقسم كل من الطرفين على العدد 7

بما أن القاسم المشترك الأكبر للعددين 77 , 72 هو 1، فإن الحل في أبسط صورة.

مثال 2

بسّط العبارة: $\frac{1}{3}+\frac{3}{4}-\frac{5}{6}$.

$\frac{1}{3}+\frac{3}{4}-\frac{5}{6}$	العبارة الأصلية
$=\frac{1}{3}\left(\frac{4}{4}\right)+\frac{3}{4}\left(\frac{3}{3}\right)-\frac{5}{6}\left(\frac{2}{2}\right)$	المضاعف المشترك الأصغر للمقامات 3, 4, 6 هو العدد 12
$=\frac{4}{12}+\frac{9}{12}-\frac{10}{12}$	بسّط
$=\frac{3}{12}$	اجمع، ثم اطرح
$=\frac{3\div 3}{12\div 3}=\frac{1}{4}$	بسّط

مثال 3

حُلّ التناسب: $\frac{5}{8}=\frac{u}{11}$.

$\frac{5}{8}=\frac{u}{11}$	المعادلة الأصلية
$5(11)=8u$	بالضرب التبادلي
$55=8u$	بسّط
$\frac{55}{8}=u$	اقسم كل من الطرفين على 8

بما أن القاسم المشترك الأكبر للعددين 8 ,55 هو 1، فإن الناتج في أبسط صورة.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي
رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

1-1

ضرب العبارات النسبية وقسمتها
Multiplying and Dividing Rational Expressions

فيما سبق:
درست تحليل كثيرات الحدود. (مهارة سابقة)

والآن:
- أتعرف العبارات النسبية.
- أبسّط عبارات نسبية.
- أبسّط كسورًا مركّبة.

المفردات:
العبارة النسبية
rational expression
الكسر المركّب
complex fraction

لماذا؟

يستطيع الغواصون الوصول إلى أعماق تزيد على 33 ft باستعمال أجهزة التنفس تحت الماء، وتعطي الدالّة النسبية $T(d) = \frac{1700}{d - 33}$ أكبر زمن يمكن للغواص قضاؤه في هذه الأعماق، بحيث يبقى قادرًا على الصعود إلى السطح بمعدل ثابت دون توقف، حيث $T(d)$ زمن الغوص بالدقائق، وd العمق بالأقدام.

تبسيط العبارات النسبية: تُسمى النسبة بين كثيرتي حدود مثل: $\frac{1700}{d - 33}$ **"عبارة نسبية"**.

بما أن المتغيِّرات في الجبر تمثِّل أعدادًا حقيقية في أغلب الأحيان، فإن العمليات على العبارات النسبية تشبه العمليات على الأعداد النسبية. وكما في تبسيط الكسور فإنه عند تبسيط العبارات النسبية يتم قسمة كلٍّ من البسط والمقام على القاسم المشترك الأكبر (GCF) لهما.

$$\frac{8}{12} = \frac{2 \cdot \cancel{4}}{3 \cdot \cancel{4}} = \frac{2}{3}$$

1

GCF = 4

$$\frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 6x + 5} = \frac{(x - 3)\cancel{(x - 1)}}{(x - 5)\cancel{(x - 1)}} = \frac{x - 3}{x - 5}$$

1

GCF = $x - 1$

قراءة الرياضيات
GCF
الرمز (GCF) يمثّل اختصارًا لـ:
Greatest Common Factor
القاسم (العامل) المشترك الأكبر

مثال 1 تبسيط عبارة نسبية

بسّط العبارة: $\frac{5x(x^2 + 4x + 3)}{(x - 6)(x^2 - 9)}$

$\frac{5x(x^2 + 4x + 3)}{(x - 6)(x^2 - 9)} = \frac{5x(x + 3)(x + 1)}{(x - 6)(x + 3)(x - 3)}$ حلّل كلًّا من البسط والمقام إلى عوامل

$= \frac{5x(x + 1)}{(x - 6)(x - 3)} \cdot \frac{\overset{1}{\cancel{(x + 3)}}}{\underset{1}{\cancel{(x + 3)}}}$ اختصر العوامل المشتركة

$= \frac{5x(x + 1)}{(x - 6)(x - 3)}$ بسّط

تحقق من فهمك

(1A $\frac{4y(y - 3)(y + 4)}{y(y^2 - y - 6)}$

(1B $\frac{2z(z + 5)(z^2 + 2z - 8)}{(z - 1)(z + 5)(z - 2)}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

تكون العبارة النسبية غير معرَّفة عند قيم المتغيِّر التي تجعل مقامها صفرًا.

قراءة الرياضيات

قيم x التي تجعل العبارة غير معرَّفة

لإيجاد قيم x التي تكون العبارة عندها غير معرَّفة، استعمل العبارة المعطاة قبل تبسيطها.

مثال 2 على اختبار

ما قيم x التي تجعل العبارة $\frac{x^2(x^2-5x-14)}{4x(x^2+6x+8)}$ غير معرَّفة؟

A $-2, -4$ **B** $-2, 7$ **C** $0, -2, -4$ **D** $0, -4, 7$

اقرأ فقرة الاختبار:

تريد إيجاد قيم x التي تجعل المقام صفرًا.

حل فقرة الاختبار:

إحدى القيم التي تجعل المقام $4x(x^2+6x+8)$ يساوي صفرًا هي $x=0$؛ لذا يمكن حذف البديلين A و B.

والآن حلّل المقام إلى عوامل.

$x^2+6x+8=(x+2)(x+4)$، إذن المقام يساوي $4x(x+2)(x+4)$.

وبما أن المقام يساوي صفرًا عندما $x=0$، أو $x=-2$ أو $x=-4$ فإن الإجابة الصحيحة هي C.

إرشادات للاختبار

بدائل السؤال

يمكنك في بعض الأحيان اختصار الوقت بحذف بعض البدائل غير المنطقية، ثم الاختيار من بين البدائل المتبقية.

تحقق من فهمك

2) ما قيم x التي تجعل العبارة $\frac{x(x^2+8x+12)}{-6(x^2-3x-10)}$ غير معرَّفة؟

A $5, 0$ **B** $5, -2$ **C** $0, -2$ **D** $5, -6$

في بعض الأحيان، يمكنك إخراج العدد 1- كعامل مشترك من البسط أو المقام للمساعدة في تبسيط العبارة النسبية.

مثال 3 تبسيط عبارة نسبية بإخراج 1− كعامل مشترك

بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي:

(a $\frac{(4w^2-3wy)(w+y)}{(3y-4w)(5w+y)}$

$\frac{(4w^2-3wy)(w+y)}{(3y-4w)(5w+y)} = \frac{w(4w-3y)(w+y)}{(3y-4w)(5w+y)}$ حلّل إلى عوامل

$= \frac{w(-1)(\overset{1}{\cancel{3y-4w}})(w+y)}{\cancel{(3y-4w)}(5w+y)}$ $4w-3y=-1(3y-4w)$

$= \frac{(-w)(w+y)}{5w+y}$ بسّط

(b $\frac{x^3-y^3}{y-x}$

$\frac{x^3-y^3}{y-x} = \frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{y-x}$ حلّل إلى عوامل

$= \frac{(-1)(\overset{1}{\cancel{y-x}})(x^2+xy+y^2)}{\underset{1}{\cancel{(y-x)}}}$ $x-y=-1(y-x)$

$= -x^2-xy-y^2$ بسّط

تحقق من فهمك

(3A $\frac{(xz-4z)}{z^2(4-x)}$

(3B $\frac{8a^3-b^3}{b-2a}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

تستعمل طريقة ضرب الكسور أو قسمتها في ضرب العبارات النسبية أو قسمتها؛ فعندما تضرب كسرين فإنك تضرب البسط في البسط والمقام في المقام. أما عند قسمة كسرين، فإنك تضرب المقسوم في مقلوب المقسوم عليه، أو تضرب المقسوم في النظير الضربي للمقسوم عليه.

والجدول الآتي يلخصُ قواعد ضرب العبارات النسبية وقسمتها:

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

ضرب العبارات النسبية

التعبير اللفظي: لضرب عبارتين نسبيتين، اضرب البسط في البسط والمقام في المقام.

الرموز: إذا كانت $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ عبارتين نسبيتين، حيث $b \neq 0, d \neq 0$، فإنَّ $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

مثال:
$$\frac{2}{9} \cdot \frac{15}{4} = \frac{\cancel{2}^{1} \cdot \cancel{3}^{1} \cdot 5}{\cancel{3}^{1} \cdot 3 \cdot \cancel{2}^{1} \cdot 2} = \frac{5}{3 \cdot 2} = \frac{5}{6}$$

قسمة العبارات النسبية

التعبير اللفظي: لقسمة عبارة نسبية على أخرى، اضرب المقسوم في مقلوب المقسوم عليه.

الرموز: إذا كانت $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ عبارتين نسبيتين، حيث $b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$، فإنَّ
$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

مثال:
$$\frac{3}{5} \div \frac{6}{35} = \frac{3}{5} \cdot \frac{35}{6} = \frac{\cancel{3}^{1} \cdot \cancel{5}^{1} \cdot 7}{\cancel{5}^{1} \cdot 2 \cdot \cancel{3}^{1}} = \frac{7}{2}$$

إرشادات للدراسة

العوامل المشتركة

تأكد من اختصار العوامل المشتركة في كلٍّ من البسط والمقام.

مثال 4 ضرب عبارات نسبية وقسمتها

بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي:

a) $\frac{6c}{5d} \cdot \frac{15cd^2}{8a}$

حلّل إلى عوامل
$$\frac{6c}{5d} \cdot \frac{15cd^2}{8a} = \frac{2 \cdot 3 \cdot c \cdot 5 \cdot 3 \cdot c \cdot d \cdot d}{5 \cdot d \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot a}$$

اختصر العوامل المشتركة
$$= \frac{\cancel{2}^{1} \cdot 3 \cdot c \cdot \cancel{5}^{1} \cdot 3 \cdot c \cdot \cancel{d}^{1} \cdot d}{\cancel{5}^{1} \cdot \cancel{d}^{1} \cdot \cancel{2}^{1} \cdot 2 \cdot 2 \cdot a}$$

بسّط
$$= \frac{3 \cdot 3 \cdot c \cdot c \cdot d}{2 \cdot 2 \cdot a}$$

بسّط
$$= \frac{9c^2d}{4a}$$

b) $\frac{18xy^3}{7a^2b^2} \div \frac{12x^2y}{35a^2b}$

اضرب المقسوم في مقلوب المقسوم عليه
$$\frac{18xy^3}{7a^2b^2} \div \frac{12x^2y}{35a^2b} = \frac{18xy^3}{7a^2b^2} \cdot \frac{35a^2b}{12x^2y}$$

جمّع العوامل
$$= \left(\frac{18 \times 35}{7 \times 12}\right) \cdot \left(\frac{x}{x^2}\right) \cdot \left(\frac{y^3}{y}\right) \cdot \left(\frac{a^2}{a^2}\right) \cdot \left(\frac{b}{b^2}\right)$$

استعمل قوانين الأسس واختصر العوامل المشتركة
$$= \left(\frac{\cancel{6}^{1} \times 3 \times \cancel{7}^{1} \times 5}{\cancel{6}_{1} \times 2 \times \cancel{7}_{1}}\right) \cdot x^{1-2} \cdot y^{3-1} \cdot a^{2-2} \cdot b^{1-2}$$

بسّط
$$= \frac{15}{2} \cdot x^{-1} \cdot y^2 \cdot a^0 \cdot b^{-1}$$

تعريف الأسس السالبة
$$= \frac{15}{2} \cdot \frac{1}{x^1} \cdot y^2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{b^1}$$

بسّط
$$= \frac{15y^2}{2xb}$$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

تحقق من فهمك

(4A $\frac{12c^3d^2}{21ab} \cdot \frac{14a^2b}{8c^2d}$

(4B $\frac{6xy}{15ab^2} \cdot \frac{21a^3}{18x^4y}$

(4C $\frac{16mt^2}{21a^4b^3} \div \frac{24m^3}{7a^2b^2}$

(4D $\frac{12x^4y^2}{40a^4b^4} \div \frac{6x^2y^4}{16a^2x}$

في بعض الأحيان عليك أن تحلّل البسط أو المقام أو كليهما قبل تبسيط ناتج ضرب عبارات نسبية أو قسمتها.

إرشادات للدراسة

تحليل كثيرات الحدود

عند تبسيط عبارات نسبية قد تظهر عوامل إحدى كثيرتي الحدود في كثيرة الحدود الأخرى، ويتم اختصارها كما في المثال 5*a*.

مثال 5 عبارات نسبية تتضمن كثيرات حدود في كلٍّ من بسطها ومقامها

بسّط كلًّا من العبارتين الآتيتين:

(a $\frac{x^2 - 6x - 16}{x^2 - 16x + 64} \cdot \frac{x - 8}{x^2 + 5x + 6}$

حلّل إلى عوامل

$$\frac{x^2 - 6x - 16}{x^2 - 16x + 64} \cdot \frac{x - 8}{x^2 + 5x + 6} = \frac{(x - 8)(x + 2)}{(x - 8)(x - 8)} \cdot \frac{x - 8}{(x + 3)(x + 2)}$$

اختصر العوامل المشتركة

$$= \frac{\overset{1}{\cancel{(x-8)}}\overset{1}{\cancel{(x+2)}}}{\underset{1}{\cancel{(x-8)}}\underset{1}{\cancel{(x-8)}}} \cdot \frac{\overset{1}{\cancel{x-8}}}{(x+3)\underset{1}{\cancel{(x+2)}}}$$

بسّط

$$= \frac{1}{x + 3}$$

(b $\frac{x^2 - 16}{12y + 36} \div \frac{x^2 - 12x + 32}{y^2 - 3y - 18}$

اضرب المقسوم في مقلوب المقسوم عليه

$$\frac{x^2 - 16}{12y + 36} \div \frac{x^2 - 12x + 32}{y^2 - 3y - 18} = \frac{x^2 - 16}{12y + 36} \cdot \frac{y^2 - 3y - 18}{x^2 - 12x + 32}$$

حلّل إلى عوامل

$$= \frac{(x + 4)(x - 4)}{12(y + 3)} \cdot \frac{(y - 6)(y + 3)}{(x - 4)(x - 8)}$$

اختصر العوامل المشتركة

$$= \frac{(x+4)\overset{1}{\cancel{(x-4)}}}{12\underset{1}{\cancel{(y+3)}}} \cdot \frac{(y-6)\overset{1}{\cancel{(y+3)}}}{\underset{1}{\cancel{(x-4)}}(x-8)}$$

بسّط

$$= \frac{(x + 4)(y - 6)}{12(x - 8)}$$

تحقق من فهمك

(5A $\frac{8x - 20}{x^2 + 2x - 35} \cdot \frac{x^2 - 7x + 10}{4x^2 - 16}$

(5B $\frac{x^2 - 9x + 20}{x^2 + 10x + 21} \div \frac{x^2 - x - 12}{6x + 42}$

تبسيط الكسور المركّبة: **الكسر المركّب** يحوي بسطه ومقامه أو أحدهما كسورًا، والعبارات الآتية كسور مركّبة:

$\frac{\frac{c}{6}}{5d}$ $\quad \frac{\frac{8}{x}}{x-2}$ $\quad \frac{\frac{x-3}{8}}{\frac{x-2}{x+4}}$ $\quad \frac{\frac{4}{a}+6}{\frac{12}{a}-3}$

ولتبسيط كسر مركّب، اكتبه أولًا على صورة قسمة عبارتين.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

مثال 6 تبسيط الكسور المركبة

بسّط كلًّا من العبارتين الآتيتين:

a) $\dfrac{\frac{a+b}{4}}{\frac{a^2+b^2}{4}}$

$\dfrac{\frac{a+b}{4}}{\frac{a^2+b^2}{4}} = \dfrac{a+b}{4} \div \dfrac{a^2+b^2}{4}$ — اكتب العبارة على صورة قسمة عبارتين

$= \dfrac{a+b}{4} \cdot \dfrac{4}{a^2+b^2}$ — اضرب المقسوم في مقلوب المقسوم عليه

$= \dfrac{a+b}{\cancel{4}_{1}} \cdot \dfrac{\overset{1}{\cancel{4}}}{a^2+b^2} = \dfrac{a+b}{a^2+b^2}$ — اختصر العوامل المشتركة وبسّط

b) $\dfrac{\frac{x^2}{x^2-y^2}}{\frac{4x}{y-x}}$

$\dfrac{\frac{x^2}{x^2-y^2}}{\frac{4x}{y-x}} = \dfrac{x^2}{x^2-y^2} \div \dfrac{4x}{y-x}$ — اكتب العبارة على صورة قسمة عبارتين

$= \dfrac{x^2}{x^2-y^2} \cdot \dfrac{y-x}{4x}$ — اضرب المقسوم في مقلوب المقسوم عليه

$= \dfrac{x \cdot x}{(x+y)(x-y)} \cdot \dfrac{(-1)(x-y)}{4x}$ — حلّل إلى عوامل

$= \dfrac{x \cdot \overset{1}{\cancel{x}}}{(x+y)(\underset{1}{\cancel{x-y}})} \cdot \dfrac{(-1)(\overset{1}{\cancel{x-y}})}{\underset{1}{\cancel{4x}}}$ — اختصر العوامل المشتركة

$= \dfrac{-x}{4(x+y)}$ — بسّط

تحقق من فهمك

6A) $\dfrac{\frac{(x-2)^2}{2(x^2-5x+4)}}{\frac{x^2-4}{4x-10}}$

6B) $\dfrac{\frac{x^2-y^2}{y^2-49}}{\frac{y-x}{y+7}}$

تأكد

مثال 1 بسّط كلًّا من العبارتين الآتيتين:

1) $\dfrac{x^2-5x-24}{x^2-64}$

2) $\dfrac{c+d}{3c^2-3d^2}$

مثال 2

3) اختيار من متعدد: حدِّد قيم x التي تجعل العبارة $\dfrac{x+7}{x^2-3x-28}$ غير معرَّفة.

A $-7, 4$ **B** $4, 7$ **C** $-7, 4, 7$ **D** $-4, 7$

الأمثلة 6-3 بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي:

4) $\dfrac{y^2+3y-40}{25-y^2}$

5) $\dfrac{a^2x-b^2x}{by-ay}$

6) $\dfrac{x^3+27}{3x+9}$

7) $\dfrac{27x^2y^4}{16yz^3} \cdot \dfrac{8z}{9xy^3}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

(8 $\frac{12x^3y}{13ab^2} \div \frac{36xy^3}{26b}$

(9 $\frac{x^2 - 4x - 21}{x^2 - 6x + 8} \cdot \frac{x - 4}{x^2 - 2x - 35}$

(10 $\frac{\frac{a^3b^3}{xy^4}}{\frac{a^2b}{x^2y}}$

(11 $\frac{\frac{4x}{x+6}}{\frac{x^2 - 3x}{x^2 + 3x - 18}}$

(12 $\frac{a^2 - b^2}{3a^2 - 6a + 3} \div \frac{4a + 4b}{a^2 - 1}$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي:

(13 $\frac{x(x-3)(x+6)}{x^2 + x - 12}$

(14 $\frac{y^2(y^2 + 3y + 2)}{2y(y-4)(y+2)}$

(15 $\frac{(x^2 - 9)(x^2 - z^2)}{4(x+z)(x-3)}$

(16 $\frac{(x^2 - 16x + 64)(x+2)}{(x^2 - 64)(x^2 - 6x - 16)}$

مثال 2 (17 **اختيار من متعدد:** حدِّد قيم x التي تجعل العبارة $\frac{(x-3)(x+6)}{(x^2 - 7x + 12)(x^2 - 36)}$ غير معرَّفة.

A $-6, 3$ **B** $4, 6$ **C** $-6, 6$ **D** $-6, 3, 4, 6$

الأمثلة 3-6 بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي:

(18 $\frac{x^2 - 5x - 14}{28 + 3x - x^2}$

(19 $\frac{x^3 - 9x^2}{x^2 - 3x - 54}$

(20 $\frac{16 - c^2}{c^2 + c - 20}$

(21 $\frac{3 - 3y}{y^3 - 1}$

(22 $\frac{3ac^3f^3}{8a^2bcf^4} \cdot \frac{12ab^2c}{18ab^3c^2f}$

(23 $\frac{14xy^2z^3}{21w^4x^2yz} \cdot \frac{7wxyz}{12w^2y^3z}$

(24 $\frac{64a^2b^5}{35b^2c^3f^4} \div \frac{12a^4b^3c}{70abcf^2}$

(25 $\frac{9x^2yz}{5z^4} \div \frac{12x^4y^2}{50xy^4z^2}$

(26 $\frac{y^2 + 8y + 15}{y - 6} \cdot \frac{y^2 - 9y + 18}{y^2 - 9}$

(27 $\frac{c^2 - 6c - 16}{c^2 - d^2} \div \frac{c^2 - 8c}{c + d}$

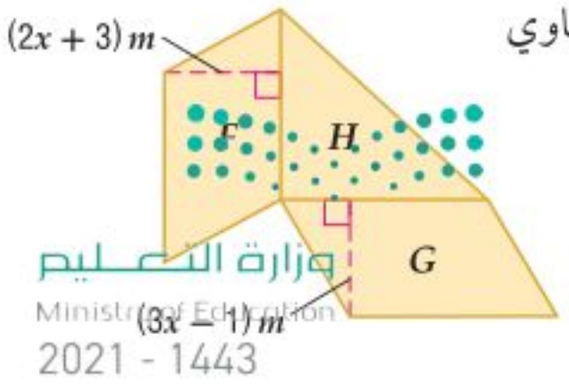
(28 $\frac{\frac{x^2 - 9}{6x - 12}}{\frac{x^2 + 10x + 21}{x^2 - x - 2}}$

(29 $\frac{\frac{y - x}{z^3}}{\frac{x - y}{6z^2}}$

(30 $\frac{\frac{a^2 - b^2}{b^3}}{\frac{b^2 - ab}{a^2}}$

(31 $\frac{\frac{x - y}{a + b}}{\frac{x^2 - y^2}{b^2 - a^2}}$

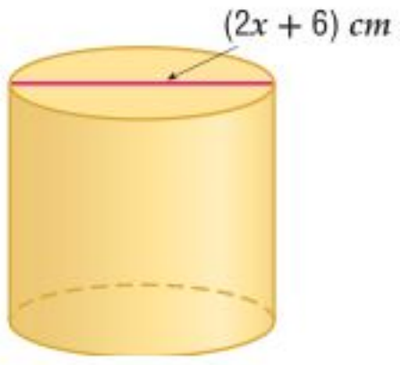
(32 **هندسة:** في الشكل المجاور، إذا كانت مساحة متوازي الأضلاع F تساوي $(8x^2 + 10x - 3)\text{m}^2$ ، وارتفاعه $(2x + 3)\text{m}$ ، ومساحة متوازي الأضلاع G تساوي $(6x^2 + 13x - 5)\text{m}^2$ ، وارتفاعه $(3x - 1)\text{m}$، فأوجد مساحة المثلَّث القائم الزاوية H.



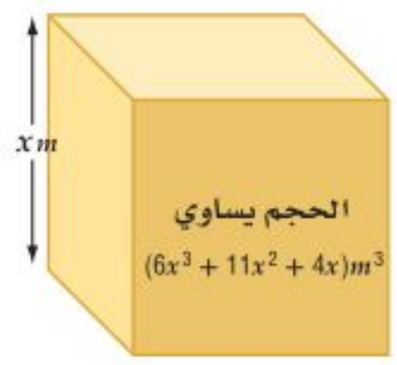
وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

33) هندسة: إذا كان حجم الأسطوانة في الشكل أدناه $(x^2 - 3x - 18)\pi\ cm^3$ فأوجد ارتفاعها.



34) هندسة: يمكن استعمال كثيرة الحدود $(6x^3 + 11x^2 + 4x)m^3$ للتعبير عن حجم الصندوق في الشكل أدناه الذي له شكل منشور متوازي مستطيلات، حيث x ارتفاع الصندوق.



a) أوجد بعدي الصندوق الآخرين.

b) أوجد النسبة بين أبعاد الصندوق الثلاثة عندما $x = 2$.

c) هل النسبة بين أبعاد الصندوق الثلاثة ثابتة لكلِّ قيم x ؟

35) تلوث: تمثِّل الدالّة $T(x) = \frac{0.4(x^2 - 2x)}{x^3 + x^2 - 6x}$ سُمْك بقعة نفط تسربت من إحدى ناقلات النفط، حيث T سُمك البقعة التي تبعد x m عن مكان التسرب وتقاس بالمتر.

الربط بالحياة

يُعد تلوث مياه البحار بالنفط من أخطر الملوثات في عصرنا؛ وذلك لصعوبة مكافحته، وأثره الضار على البيئة وصحة الإنسان.

a) اكتب الدالّة في أبسط صورة.

b) ما سمك البقعة التي تبعد 100 m عن مكان التسرب؟

بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي:

36) $\frac{x^2 - 16}{3x^3 + 18x^2 + 24x} \cdot \frac{x^3 - 4x}{2x^2 - 7x - 4}$

37) $\frac{3x^2 - 17x - 6}{4x^2 - 20x - 24} \div \frac{6x^2 - 7x - 3}{2x^2 - x - 3}$

38) $\frac{9 - x^2}{x^2 - 4x - 21} \cdot \left(\frac{2x^2 + 7x + 3}{2x^2 - 15x + 7}\right)^{-1}$

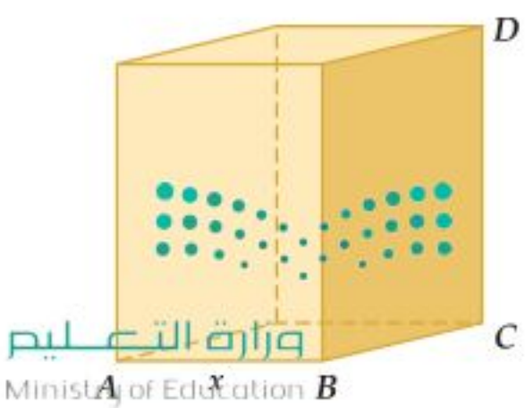
39) $\left(\frac{3xy^3z}{2a^2bc^2}\right)^3 \cdot \frac{16a^4b^3c^5}{15x^7yz^3}$

40) $\left(\frac{2xy^3}{3abc}\right)^{-2} \div \frac{6a^2b}{x^2y^4}$

41) $\frac{\frac{2x^2 + 7x - 30}{-6x^2 + 13x + 5}}{\frac{4x^2 + 12x - 72}{3x^2 - 11x - 4}}$

42) $\frac{\frac{4x^2 - 1}{3x^3 - 6x^2 - 24x}}{\frac{12x^2 + 12x - 9}{-2x^2 + 5x + 12}}$

43) هندسة: مساحة قاعدة المنشور (متوازي المستطيلات) المجاور تساوي $20\ cm^2$.



وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

a) أوجد طول الضلع $\overline{BC}$ بدلالة x.

b) إذا كان $DC = 3BC$، فأوجد مساحة المنطقة المظللة بدلالة x.

c) أوجد حجم المنشور بدلالة x.

موقع حلول كتبي

بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي:

44) $\frac{x^2+4x-32}{2x^2+9x-5} \cdot \frac{3x^2-75}{3x^2-11x-4} \div \frac{6x^2-18x-60}{x^3-4x}$

45) $\frac{8x^2+10x-3}{3x^2-12x-36} \div \frac{2x^2-5x-12}{3x^2-17x-6} \cdot \frac{4x^2+3x-1}{4x^2-40x+24}$

46) $\frac{4x^2-9x-9}{3x^2+6x-18} \div \frac{-2x^2+5x+3}{x^2-4x-32} \div \frac{8x^2+10x+3}{6x^2-6x-12}$

47) تمثيلات متعددة: ستكتشف في هذا السؤال العلاقة بين العبارة النسبية قبل تبسيطها وبعده.

a) جبريًّا: بسّط العبارة: $\frac{x^2-5x+4}{x-4}$.

b) جدوليًّا: إذا كانت $f(x)=\frac{x^2-5x+4}{x-4}$، فاستعمل العبارة التي حصلت عليها في الفرع (a) لكتابة الدالّة $g(x)$ المرتبطة بالدالّة $f(x)$، ثم استعمل الحاسبة البيانية لعمل جدول لقيم x لكلّتا الدالّتين، حيث $0 \le x \le 10$.

c) تحليليًّا: أوجد قيمة كلٍّ من $f(4)$، و $g(4)$، ثم وضِّح الفرق بين القيمتين.

d) لفظيًّا: ماذا تستنتج بالنسبة للعبارة الأصلية في الفرع (a) والدالّة $g(x)$؟

مسائل مهارات التفكير العليا

48) تبرير: قارن بين كلٍّ من $\frac{(x-6)(x+2)(x+3)}{x+3}$ و $(x-6)(x+2)$.

49) اكتشف الخطأ: قام كلٌّ من علي ومحمد بتبسيط العبارة $\frac{x+y}{x-y} \div \frac{4}{y-x}$. أيُّهما إجابته صحيحة؟ فسِّر إجابتك.

علي

$$\frac{x+y}{x-y} \div \frac{4}{y-x} = \frac{x-y}{x+y} \cdot \frac{4}{y-x}$$
$$= \frac{-4}{x+y}$$

محمد

$$\frac{x+y}{x-y} \div \frac{4}{y-x} = \frac{x+y}{x-y} \cdot \frac{y-x}{4}$$
$$= -\frac{x+y}{4}$$

50) تحدٍّ: ما قيمة y التي تجعل الجملة $\frac{x-6}{x+3} \cdot \frac{y}{x-6} = x-2$ صحيحة دائمًا، عدا عند $x=6$ و $x=-3$؟

51) تبرير: هل الجملة الآتية صحيحة دائمًا، أم صحيحة أحيانًا، أم غير صحيحة أبدًا؟ فسِّر إجابتك.
"العبارة النسبية التي تتضمن متغيرًا في المقام تكون معرَّفة لجميع الأعداد الحقيقية".

52) مسألة مفتوحة: اكتب عبارة نسبية ناتج تبسيطها $\frac{x-1}{x+4}$.

53) اكتب: إذا علمت أن ناتج تبسيط العبارة النسبية $\frac{x^2+3x}{4x}$ هو $\frac{x+3}{4}$. فوضِّح لماذا لا تكون هذه العبارة معرَّفة لجميع قيم x؟

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

تدريب على اختبار

54) احتمال: إذا رمي مكعب مرقم من 1-6 مرة واحدة، فما احتمال ظهور عدد أقل من 4 ؟

A $\frac{1}{6}$ **C** $\frac{1}{2}$

B $\frac{1}{3}$ **D** $\frac{2}{3}$

55) ما أبسط صورة للعبارة النسبية $\frac{5-c}{c^2-c-20}$ ؟

A $\frac{5-c}{c-4}$ **C** $\frac{5-c}{c+4}$

B $\frac{1}{c+4}$ **D** $-\frac{1}{c+4}$

مراجعة تراكمية

حُلّ كلًّا من المعادلتين الآتيتين:

56) $\sqrt{x-8}+5=7$ (مهارة سابقة)

57) $\sqrt[3]{n+8}-6=-3$ (مهارة سابقة)

58) بسط العبارة $\frac{h^{\frac{1}{2}}+1}{h^{\frac{1}{2}}-1}$ (مهارة سابقة)

بسّط كلًّا مما يأتي: (مهارة سابقة)

59) $(2a+3b)+(8a-5b)$

60) $(x^2-4x+3)-(4x^2+3x-5)$

61) $(5y+3y^2)+(-8y-6y^2)$

62) $2x(3y+9)$

63) $(x+6)(x+3)$

64) $(x+1)(x^2-2x+3)$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي
رابط المدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

1-2

جمع العبارات النسبية وطرحها
Adding and Subtracting Rational Expressions

فيما سبق:
درست جمع كثيرات حدود وطرحها. (مهارة سابقة)

والآن:
- أجد المضاعف المشترك الأصغر (LCM) لكثيرات حدود.
- أجمع عبارات نسبية وأطرحها.

لماذا؟

عندما نكون في الشارع وتقترب سيارة إطفاء، نسمع صفيرها وهي تقترب منا بتردد أعلى؛ لأن طول موجة الصوت ينضغط إلى حدٍّ ما بفعل سرعة قدومها في اتجاهنا، وبعد أن تتجاوزنا متباعدة عنا، نسمع صوت صفيرها بتردد منخفض؛ لأن طول موجتها يزداد استطالة. ويعرف ذلك بتأثير دوبلر (Doppler) . ويمكن تمثيل هذه الظاهرة بالعبارة النسبية $f_s\left(\frac{v}{v - v_s}\right)$ ، حيث f_s تردد صوت صفير سيارة الإطفاء، وv سرعة الصوت في الهواء، و v_s سرعة سيارة الإطفاء.

المضاعف المشترك الأصغر (LCM) لكثيرات الحدود: تمامًا كما في الأعداد النسبية التي على الصورة الكسرية، فعند جمع عبارتين نسبيتين بمقامين مختلفين أو طرحهما، يجب أن تجد أولًا المضاعف المشترك الأصغر (LCM) للمقامين.

ولإيجاد (LCM) لعددين أو لكثيرتي حدود أو أكثر، يجب أن تُحلل كلًّا منها إلى عواملها الأولية أولًا، ثم تضرب جميع العوامل التي لها الأس الأكبر.

الأعداد	كثيرات الحدود
$\frac{5}{6} + \frac{4}{9}$	$\frac{3}{x^2 - 3x + 2} + \frac{5}{2x^2 - 2}$
LCM للعددين 6, 9	LCM لكثيرتي الحدود $x^2 - 3x + 2, 2x^2 - 2$
$6 = 2 \cdot 3$	$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$
$9 = 3 \cdot 3$	$2x^2 - 2 = 2 \cdot (x - 1)(x + 1)$
$\text{LCM} = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$	$\text{LCM} = 2(x - 1)(x - 2)(x + 1)$

قراءة الرياضيات

LCM
الرمز (LCM) يمثّل اختصارًا لـ:
Least Common Multiple
(المضاعف المشترك الأصغر)

مثال 1 LCM لوحيدات الحد وكثيرات الحدود

أوجد LCM لكلٍّ مجموعة من كثيرات الحدود ممَّا يأتي:

a) $6xy, 15x^2, 9xy^4$

$6xy = 2 \cdot 3 \cdot x \cdot y$	حلّل
$15x^2 = 3 \cdot 5 \cdot x^2$	حلّل
$9xy^4 = 3 \cdot 3 \cdot x \cdot y^4$	حلّل
$\text{LCM} = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^2 \cdot y^4 = 90x^2y^4$	اضرب قوى العوامل التي لها الأس الأكبر وبسّط

b) $y^4 + 8y^3 + 15y^2 , y^2 - 3y - 40$

$y^4 + 8y^3 + 15y^2 = y^2(y + 5)(y + 3)$	حلّل
$y^2 - 3y - 40 = (y + 5)(y - 8)$	حلّل
$\text{LCM} = y^2(y + 5)(y + 3)(y - 8)$	اضرب قوى العوامل التي لها الأس الأكبر

تحقق من فهمك

1A) $12a^2b, 15abc, 8b^3c^4$

1B) $4a^2 - 12a - 16, a^3 - 9a^2 + 20a$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

جمع العبارات النسبية وطرحها: عند جمع عبارتين نسبيتين أو طرحهما يجب أن نوحّد مقاميهما، تمامًا كما في جمع الكسور وطرحها.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

جمع العبارات النسبية وطرحها

التعبير اللفظي: لجمع العبارات النسبية أو طرحها، أعد كتابة العبارات بحيث تكون مقاماتها متساوية، ثم اجمع أو اطرح.

الرموز: لأي عبارتين نسبيتين $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$، حيث $b \neq 0, d \neq 0$، فإنَّ:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd} \quad , \quad \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}-\frac{bc}{bd}=\frac{ad-bc}{bd}$$

ومن الأفضل أن يكون المقام المشترك للمقامات هو (LCM).

مثال:
$$\frac{2}{5} \pm \frac{1}{3}=\frac{2\cdot 3}{5\cdot 3} \pm \frac{5\cdot 1}{5\cdot 3}=\frac{2\cdot 3 \pm 5\cdot 1}{5\cdot 3}$$

مثال 2

جمع عبارات نسبية مقاماتها وحيدات حد وطرحها

بسّط العبارة: $\frac{3y}{2x^3}+\frac{5z}{8xy^2}$

$$\frac{3y}{2x^3}+\frac{5z}{8xy^2}=\frac{3y}{2x^3}\cdot\frac{4y^2}{4y^2}+\frac{5z}{8xy^2}\cdot\frac{x^2}{x^2}$$ وحّد المقامات باستعمال LCM وهو $8x^3y^2$

$$=\frac{12y^3}{8x^3y^2}+\frac{5x^2z}{8x^3y^2}$$ اضرب الكسور

$$=\frac{12y^3+5x^2z}{8x^3y^2}$$ اجمع البسطين

تحقق من فهمك

(2A $\frac{4}{5a^3b^2}+\frac{9c}{10ab}$

(2B $\frac{3a^2}{16b^2}-\frac{8x}{5a^3b}$

يستعمل LCM أيضًا لجمع أو طرح عبارات نسبية مقاماتها كثيرات حدود.

مثال 3

جمع عبارات نسبية مقاماتها كثيرات حدود وطرحها

بسّط العبارة: $\frac{5}{6x-18}-\frac{x-1}{4x^2-14x+6}$

$$\frac{5}{6x-18}-\frac{x-1}{4x^2-14x+6}=\frac{5}{6(x-3)}-\frac{x-1}{2(2x-1)(x-3)}$$ حلّل المقامين

$$=\frac{5(2x-1)}{6(x-3)(2x-1)}-\frac{(x-1)(3)}{2(2x-1)(x-3)(3)}$$ وحّد المقامين

$$=\frac{10x-5-3x+3}{6(x-3)(2x-1)}$$ اطرح البسطين

$$=\frac{7x-2}{6(x-3)(2x-1)}$$ بسّط

تحقق من فهمك

(3A $\frac{x-1}{x^2-x-6}-\frac{4}{5x+10}$

(3B $\frac{x-8}{4x^2+21x+5}+\frac{6}{12x+3}$

إرشادات للدراسة

تبسيط العبارات النسبية

يمكن تبسيط العبارة النسبية الناتجة عن جمع أو طرح عبارتين نسبيتين في بعض الأحيان.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

من طرائق تبسيط الكسور المركَّبة تبسيط كلٍّ من البسط والمقام على حدة، ثم تبسيط العبارة الناتجة.

مثال 4 تبسيط الكسور المركَّبة بتبسيط كلٍّ من البسط والمقام على حدة

بسّط العبارة $\dfrac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{x}{y}}$

$$\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{x}{y}} = \frac{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}{\frac{y}{y}-\frac{x}{y}}$$

LCM لمقامات البسط هو x

LCM لمقامات المقام هو y

$$= \frac{\frac{x+1}{x}}{\frac{y-x}{y}}$$

بسّط كلًّا من البسط والمقام

$$= \frac{x+1}{x} \div \frac{y-x}{y}$$

اكتب العبارة على صورة قسمة عبارتين

$$= \frac{x+1}{x} \cdot \frac{y}{y-x}$$

اضرب المقسوم في مقلوب المقسوم عليه

$$= \frac{xy+y}{xy-x^2}$$

بسّط

تحقق من فهمك

(4A $\dfrac{1-\frac{y}{x}}{\frac{1}{y}+\frac{1}{x}}$

(4B $\dfrac{\frac{c}{d}-\frac{d}{c}}{\frac{d}{c}+2}$

إرشادات للدراسة

حدود غير معرَّفة

تذكّر أن هناك قيودًا على المتغيرات في المقام.

وهناك طريقة أخرى لتبسيط الكسور المركّبة هي إيجاد LCM لمقامات البسط والمقام، ثم اختصارها بضرب كلٍّ من بسط العبارة ومقامها في LCM .

مثال 5 تبسيط الكسور المركَّبة بإيجاد (LCM) للمقامات

بسّط العبارة $\dfrac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{x}{y}}$

$$\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{x}{y}} = \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\left(1-\frac{x}{y}\right)} \cdot \frac{xy}{xy}$$

LCM لمقامات البسط والمقام هو xy ، بضرب العبارة في $\frac{xy}{xy}$

$$= \frac{xy+y}{xy-x^2}$$

خاصية التوزيع

لاحظ أنه تم حل المسألة نفسها في المثالين 5 , 4 بطريقتين مختلفتين، وكانت النتيجة واحدة؛ لذا يمكنك استعمال الطريقة التي تناسبك لحل المسائل المشابهة.

تحقق من فهمك

(5A $\dfrac{1+\frac{2}{x}}{\frac{3}{y}-\frac{4}{x}}$

(5B $\dfrac{\frac{1}{d}-\frac{d}{c}}{\frac{1}{c}+6}$

(5C $\dfrac{\frac{1}{y}+\frac{1}{x}}{\frac{1}{y}-\frac{1}{x}}$

(5D $\dfrac{\frac{a}{b}+1}{1-\frac{b}{a}}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

تأكد

مثال 1 أوجد LCM لكلٍّ مجموعة من كثيرات الحدود ممَّا يأتي:

1) $16x, 8x^2y^3, 5x^3y$

2) $7a^2, 9ab^3, 21abc^4$

3) $3y^2 - 9y, y^2 - 8y + 15$

4) $x^3 - 6x^2 - 16x, x^2 - 4$

المثالان 3 , 2 بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي:

5) $\frac{12y}{5x} + \frac{5x}{4y^3}$

6) $\frac{5}{6ab} + \frac{3b^2}{14a^3}$

7) $\frac{7b}{12a} - \frac{1}{18ab^3}$

8) $\frac{y^2}{8c^2d^2} - \frac{3x}{14c^4d}$

9) $\frac{4x}{x^2 + 9x + 18} + \frac{5}{x + 6}$

10) $\frac{8}{y - 3} + \frac{2y - 5}{y^2 - 12y + 27}$

11) $\frac{4}{3x + 6} - \frac{x + 1}{x^2 - 4}$

12) $\frac{3a + 2}{a^2 - 16} - \frac{7}{6a + 24}$

المثالان 5 , 4 بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي:

13) $\frac{4 + \frac{2}{x}}{3 - \frac{2}{x}}$

14) $\frac{6 + \frac{4}{y}}{2 + \frac{6}{y}}$

15) $\frac{\frac{3}{x} + \frac{2}{y}}{1 + \frac{4}{y}}$

16) $\frac{\frac{2}{b} + \frac{5}{a}}{\frac{3}{a} - \frac{8}{b}}$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 أوجد LCM لكلٍّ مجموعة من كثيرات الحدود ممَّا يأتي:

17) $24cd, 40a^2c^3d^4, 15abd^3$

18) $4x^2y^3, 18xy^4, 10xz^2$

19) $x^2 - 9x + 20, x^2 + x - 30$

20) $6x^2 + 21x - 12, 4x^2 + 22x + 24$

المثالان 3 , 2 بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي:

21) $\frac{5a}{24cf^4} + \frac{a}{36bc^4f^3}$

22) $\frac{4b}{15x^3y^2} - \frac{3b}{35x^2y^4z}$

23) $\frac{5b}{6a} + \frac{3b}{10a^2} + \frac{2}{ab^2}$

24) $\frac{4}{3x} + \frac{8}{x^3} + \frac{2}{5xy}$

25) $\frac{8}{3y} + \frac{2}{9} - \frac{3}{10y^2}$

26) $\frac{1}{16a} + \frac{5}{12b} - \frac{9}{10b^3}$

27) $\frac{8}{x^2 - 6x - 16} + \frac{9}{x^2 - 3x - 40}$

28) $\frac{6}{y^2 - 2y - 35} + \frac{4}{y^2 + 9y + 20}$

29) $\frac{12}{3y^2 - 10y - 8} - \frac{3}{y^2 - 6y + 8}$

30) $\frac{6}{2x^2 + 11x - 6} - \frac{8}{x^2 + 3x - 18}$

31) $\frac{2x}{4x^2 + 9x + 2} + \frac{3}{2x^2 - 8x - 24}$

32) $\frac{4x}{3x^2 + 3x - 18} - \frac{2x}{2x^2 + 11x + 15}$

المثالان 5 , 4 بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي:

33) $\frac{\frac{2}{x - 3} + \frac{3x}{x^2 - 9}}{\frac{3}{x + 3} - \frac{4x}{x^2 - 9}}$

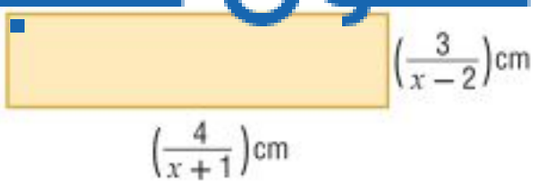
34) $\frac{\frac{4}{x + 5} + \frac{9}{x - 6}}{\frac{5}{x - 6} - \frac{8}{x + 5}}$

35) $\frac{\frac{5}{x + 6} - \frac{2x}{2x - 1}}{\frac{x}{2x - 1} + \frac{4}{x + 6}}$

36) $\frac{\frac{8}{x - 9} - \frac{x}{3x + 2}}{\frac{3}{3x + 2} + \frac{4x}{x - 9}}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

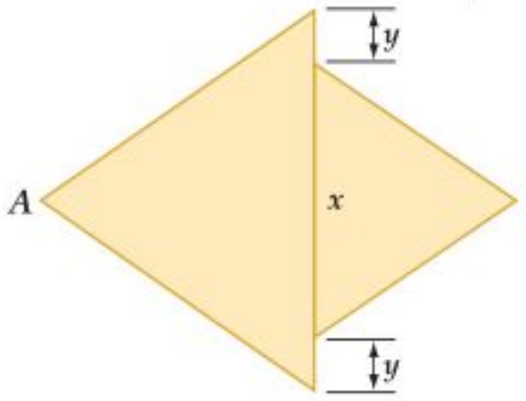


37) هندسة: أوجد محيط المستطيل في الشكل المجاور.

38) أحياء: يمكن قياس PH أو درجة الحموضة A في فم شخص بعد تناوله الطعام باستعمال الصيغة $A = \frac{20.4t}{t^2 + 36} + 6.5$، حيث t عدد الدقائق التي مرّت بعد تناول الطعام.

a) بسّط الصيغة السابقة.

b) أوجد درجة الحموضة في فم شخص بعد مُضِيِّ 30 min على تناوله الطعام.



39) هندسة: إذا كان كلٌّ من المثلَّثين في الشكل المجاور متطابق الضلعين، وكانت مساحة المثلَّث الأصغر $200\ cm^2$، ومساحة المثلَّث الأكبر $300\ cm^2$، فأوجد البُعد بين النقطة A والنقطة B بدلالة x , y في أبسط صورة.

40) إنتاج النفط: قدّر مهندسو إحدى شركات استخراج النفط إنتاج إحدى الآبار مستعملين الدالّة $R(x) = \frac{20}{x} + \frac{200x}{3x^2 + 20}$، حيث $R(x)$ معدل إنتاج البئر بآلاف البراميل سنويًّا بعد x سنة من بدء الإنتاج.

a) بسّط الدالّة $R(x)$.

b) ما معدّل إنتاج البئر بعد مرور 50 سنة؟

الربط بالحياة

يقع حقل الغوار في المملكة العربية السعودية، وتبلغ مساحته $3000\ km^2$، وتم اكتشافه عام 1948م. وتقدر إنتاجيته بنحو 65% من إنتاج المملكة؛ أي حوالي 5 مليون برميل يوميًا، ويقدّر احتياطيه من 70 إلى 170 مليار برميل.

أوجد LCM لكلٍّ ممَّا يأتي:

41) $-6abc^2, 18a^2b^2, 15a^4c, 8b^3$

42) $x^2 - 3x - 28, 2x^2 + 9x + 4, x^2 - 16$

بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي:

43) $\frac{1}{12a} + 6 - \frac{3}{5a^2}$

44) $\frac{5}{16y^2} - 4 - \frac{8}{3x^2y}$

45) $\frac{5}{6x^2 + 46x - 16} + \frac{2}{6x^2 + 57x + 72}$

46) $\frac{1}{8x^2 - 20x - 12} + \frac{4}{6x^2 + 27x + 12}$

47) $\frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} + \frac{y}{x + y} - \frac{x}{x - y}$

48) $\frac{x^2 + x}{x^2 - 9x + 8} + \frac{4}{x - 1} - \frac{3}{x - 8}$

49) $\frac{\frac{2}{a-1} + \frac{3}{a-4}}{\frac{6}{a^2 - 5a + 4}}$

50) $\frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}{\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right)(x + y)}$

51) هندسة: يُعطى طول مستطيل بالعبارة $\frac{x^2 - 9}{x - 2}$، ويعطى طول مستطيل آخر بالعبارة $\frac{x + 3}{x^2 - 4}$. أوجد النسبة بين طولي المستطيلين، ثم اكتبها في أبسط صورة.

52) زوارق: قطع علي مسافة 20 mi راكبًا زورقه، حيث قطع نصف المسافة بسرعة معينة والنصف الثاني بسرعة تقل عن السرعة الأولى بمقدار 2 mi/h .

a) إذا كانت x تعبِّر عن السرعة الأولى بالأميال لكلِّ ساعة، فاكتب عبارة تمثِّل الزمن الذي استغرقه علي لقطع النصف الأول من المسافة.

b) اكتب عبارة تمثِّل الزمن الذي استغرقه لقطع النصف الثاني من المسافة.

c) اكتب عبارة تمثِّل الزمن الذي استغرقه لقطع المسافة كلها.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

الربط بالحياة

الكاميرا الرقمية آلة تلتقط الصور الفوتوغرافية وتخزنها إلكترونيًا بدلاً من الأفلام. وبإمكان بعضها تسجيل الصوت أو الفيديو مع الصور. وتمتاز بالسرعة، وسهولة الاستخدام.

53) تصوير: يحدِّد البُعد البؤري لعدسة آلة التصوير المسافة التي يمكن خلالها التصوير بهذه الآلة؛ فكلما كان البُعد البؤري أصغر كانت مسافة التصوير أكبر. فإذا كان البُعد البؤري لعدسة آلة تصوير 70 mm وأردنا تصوير جسم على بُعد x mm من العدسة، فإنه يجب أن يكون الفيلم على بُعد y mm من العدسة. ويمكن تمثيل ذلك بالمعادلة $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{70}$.

a) اكتب y كدالّة في المتغير x.

b) هل يمكن تصوير جسم على بُعد 70 mm من العدسة؟ ولماذا؟

54) أدوية: يتناول أحد المرضى نوعين من الدواء. فإذا كان تركيزهما في دمه بوحدة الجرام/ لتر (g /L) يُعطى بالدالّتين: $g(t)=\frac{3t}{2t^2+6t+4}$ ، $f(t)=\frac{2t}{3t^2+9t+6}$ حيث t الزمن بالساعات بعد تناول الدواء.

a) اجمع الدالّتين لتحصل على دالّة تمثِّل تركيز النوعين معًا في دم المريض.

b) ما تركيز النوعين في دم المريض بعد 8 ساعات من تناولهما؟

مسائل مهارات التفكير العليا

55) تحدٍّ: بسّط العبارة $\dfrac{5x^{-2}-\frac{x+1}{x}}{\frac{4}{3-x^{-1}}+6x^{-1}}$.

56) تبرير: حدِّد إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أم خاطئة، ووضِّح إجابتك:

$\frac{6}{x+2}+\frac{4}{x-3}=\frac{10x-10}{(x+2)(x-3)}$ لأيِّ عدد حقيقي x .

57) مسألة مفتوحة: اكتب ثلاث وحيدات حدٍّ، على أن يكون LCM لهنّ يساوي $180a^4b^6c$.

58) اكتب: اكتب طريقة منظمة لجمع عبارات نسبية مختلفة المقامات.

تدريب على اختبار

59) إذا كان $\frac{2a}{a}+\frac{1}{a}=4$، فما قيمة a؟

A) $-\frac{1}{8}$ **B)** $\frac{1}{8}$ **C)** $\frac{1}{2}$ **D)** 2

مراجعة تراكمية

بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي: (الدرس 1-1)

60) $\frac{-4ab}{21c}\cdot\frac{14c^2}{22a^2}$ **61)** $\frac{x^2-y^2}{6y}\div\frac{x+y}{36y^2}$ **62)** $\frac{n^2-n-12}{n+2}\div\frac{n-4}{n^2-4n-12}$

مثِّل كلَّ دالّة ممَّا يأتي بيانيًّا، وحدِّد مجالها ومداها (مهارة سابقة)

63) $y=-\sqrt{2x+1}$ **64)** $y=\sqrt{5x-3}$ **65)** $y=2\sqrt{3-4x}+3$

مثِّل كلَّ دالّة ممَّا يأتي بيانيًّا: (مهارة سابقة)

66) $y=4(x+3)^2+1$ **67)** $y=-(x-5)^2-3$ **68)** $y=\frac{1}{4}(x-2)^2+4$

69) $y=\frac{1}{2}(x-3)^2-5$ **70)** $y=x^2+6x+2$ **71)** $y=x^2-8x+18$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي
رابط الموقع الرسمي
www.ien.edu.sa

1-3

تمثيل دوالّ المقلوب بيانيًّا
Graphing Reciprocal Functions

فيما سبق: درست تمثيل دوالّ كثيرات الحدود بيانيًا. (مهارة سابقة)

والآن:
- أحدّد خصائص دوالّ المقلوب.
- أمثّل تحويلات دوالّ المقلوب بيانيًا.

المفردات:
- خط التقارب — asymptote
- خط التقارب الرأسي — vertical asymptote
- خط التقارب الأفقي — horizontal asymptote
- دالّة المقلوب — reciprocal function
- القطع الزائد — hyperbola

لماذا؟

خطّطَت مجموعة من الطلبة لجمع مبلغ 5000 ريال للقيام بعمل خيري، فقرروا أن يتبرع كل منهم بريال واحد يوميًّا، فإذا كان عدد الطلاب n طالبًا، فإن عدد الأيام c اللازمة لجمع المبلغ يُعطى بالعلاقة $c = \frac{5000}{n}$.

خطوط التقارب الرأسية والأفقية: **خط التقارب** لدالّة: هو مستقيم يقترب منه التمثيل البياني للدالّة. ولدالّة المقلوب $f(x) = \frac{1}{a(x)}$ **خط تقارب رأسي** عند القيمة المستثناة من مجالها، و**خط تقارب أفقي** يبيّن سلوك طرفي التمثيل البياني للدالّة.

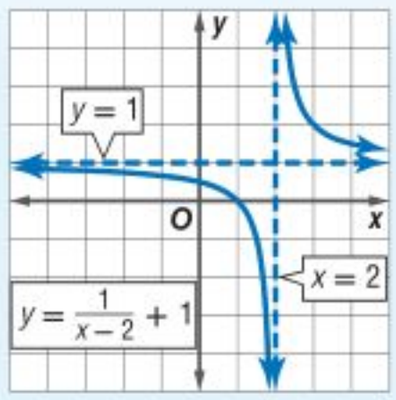
مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

خطوط التقارب للدالّة $y = \frac{a}{x-b} + c$

التعبير اللفظي: للدالّة $y = \frac{a}{x-b} + c$ ، $a \neq 0$ خط تقارب رأسي عند قيمة x التي تجعل المقام صفرًا، أي أن خط التقارب الرأسي للدالّة هو $x = b$ ، ويكون لها خط تقارب أفقي عند $y = c$.

مثال:



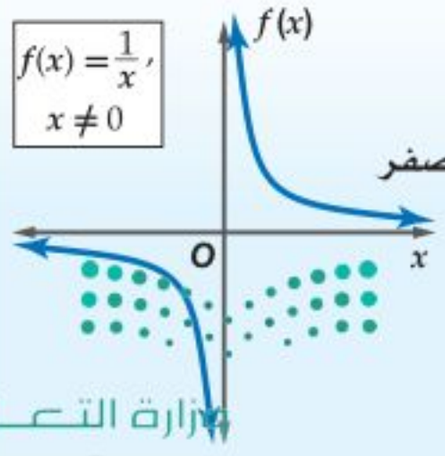
وأما مجال الدالّة $y = \frac{a}{x-b} + c$ فهو جميع الأعداد الحقيقية ما عدا $x = b$، وأما مداها فهو جميع الأعداد الحقيقية ما عدا $y = c$، ولأنه لا يمكن رسم هذه الدالّة دون رفع القلم عن الورقة؛ لذا اختر قيمًا لـ x على جانبي خط التقارب الرأسي لترسم جزأي منحنى الدالّة.

تمثِّل الدالّة $c = \frac{5000}{n}$ دالّة مقلوب، و**دالّة المقلوب** التي سندرسها هي الدالّة المكتوبة على الصورة $f(x) = \frac{1}{a(x)}$، حيث $a(x)$ دالّة خطية، و $a(x) \neq 0$.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

الدالّة الرئيسة (الأم) لدوالّ المقلوب



الدالّة الرئيسة (الأم):	$f(x) = \frac{1}{x}$
شكل التمثيل البياني:	قطع زائد
المجال والمدى:	جميع الأعداد الحقيقية ما عدا الصفر
خطا التقارب:	$x = 0$ و $y = 0$
المقطعان:	لا يوجد
تكون الدالّة غير معرَّفة عندما:	$x = 0$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

مجال دالّة المقلوب هو مجموعة القيم التي تكون الدالّة عندها معرَّفة.

فمثلًا الدوالّ: $f(x)=\frac{-3}{x+2}$ ، $g(x)=\frac{4}{x-5}$ ، $h(x)=\frac{3}{x}$

غير معرَّفة عندما: $x=-2$ $x=5$ $x=0$

مثال 1 القيود على المجال (تحديد القيم التي تجعل الدالّة غير معرَّفة)

حدِّد قيمة x التي تجعل الدالّة $f(x)=\frac{3}{2x+5}$ غير معرَّفة.

أوجد قيمة x التي يساوي المقام عندها صفرًا.

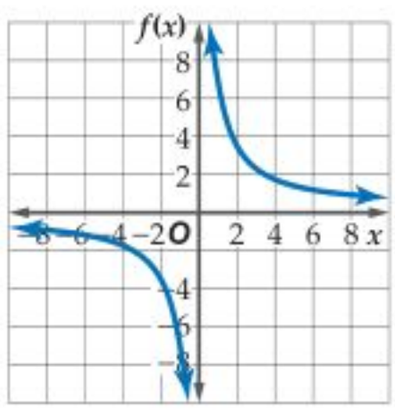
$$2x+5=0$$
$$x=-\frac{5}{2}$$

الدالّة غير معرَّفة عندما $x=-\frac{5}{2}$.

تحقق من فهمك

1A) $f(x)=\frac{2}{x-1}$ **1B)** $f(x)=\frac{7}{3x+2}$

قد لا تكون بعض قيم x في دالّة المقلوب منطقية، وذلك في مسائل من واقع الحياة. فعلى سبيل المثال في التمثيل البياني المجاور، إذا كانت قيم x تمثِّل زمنًا، أو مسافة أو عدد أشخاص فلا يمكن أن تكون هذه القيم سالبة في سياق المسألة، ولذلك لا حاجة للجزء الأيسر من التمثيل البياني والذي تكون فيه قيم x سالبة.



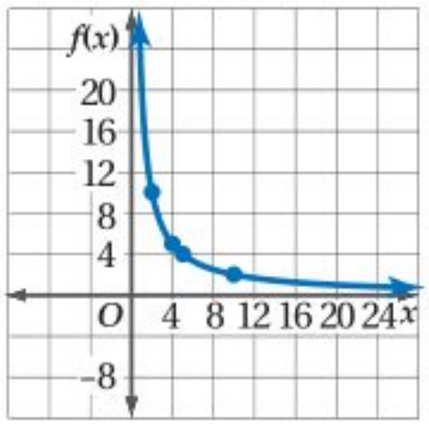
مثال 2 من واقع الحياة تمثيل دالّة المقلوب بيانيًا

سفر: **مثِّل الدالّة $f(x)=\frac{20}{x}$ بيانيًا، حيث تمثِّل x عدد الأشخاص في منطاد هوائي، وتمثِّل $f(x)$ متوسط المساحة المخصصة لكلِّ شخص بالأقدام المربعة.**

بما أن عدد الأشخاص لا يكون صفرًا أو سالبًا، لذا استعمل الأعداد الصحيحة الموجبة فقط للمتغير x .

عدد الأشخاص x	2	4	5	10
المساحة المخصصة للشخص $f(x)$	10	5	4	2

عيِّن النقاط (2, 10)، (4, 5)، (5, 4)، (10, 2) في المستوى الإحداثي وصل بينها بخط منحنٍ. وبما أن الدالّة غير معرَّفة عند $(x=0)$، فإن لها خط تقارب رأسي هو $x=0$؛ أي أن منحناها يقترب من المستقيم $x=0$ (المحور y) ولا يمسّه، وبالمثِّل للدالّة خط تقارب أفقي $y=0$ (المحور x)؛ أي أن منحناها يقترب من المستقيم $y=0$ ولا يمسه، لذا مُدّ المنحنى الذي رسمته في اتجاه كلٍّ من المحورين x, y الموجبين، ولكن دون أن يمس أيًّا منهما، كما هو مبيّن في الشكل المجاور.



تحقق من فهمك

2) حدائق: حديقة مستطيلة الشكل مساحتها $18\ \text{cm}^2$ ، والدالّة $l=\frac{18}{w}$ تبيّن العلاقة بين طولها وعرضها. مثِّل هذه الدالّة بيانيًّا.

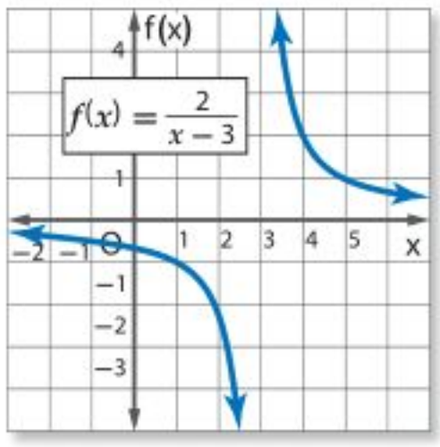
وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

مثال 3 تحديد خصائص دوالّ المقلوب

حدِّد خطوط التقارب والمجال والمدى لكلٍّ من الدالّتين الآتيتين:

(a



حدِّد قيمة x التي تكون الدالّة $f(x)$ عندها غير معرَّفة.

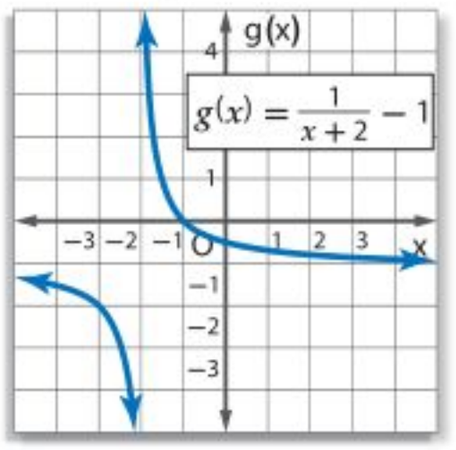
$$x - 3 = 0$$
$$x = 3$$

$f(x)$ غير معرَّفة عند $x = 3$. وهذا يعني وجود خط تقارب رأسي عند $x = 3$ ، وبما أن $c = 0$ فإنه، يوجد خط تقارب أفقي عند $y = 0$

(لاحظ أنه كلما زادت قيم x الأكبر من 3، تقترب قيم $f(x)$ من الصفر، وكلما قلَّت قيم x الأقل من 3، تقترب قيم $f(x)$ من الصفر أيضًا. وهذا يعني وجود خط تقارب أفقي عند $y = 0$) .

مجال الدالّة هو جميع الأعداد الحقيقية ما عدا 3 . أما المدى فهو جميع الأعداد الحقيقية ما عدا الصفر.

(b



حدِّد قيمة x التي تكون الدالّة $g(x)$ عندها غير معرَّفة.

$$x + 2 = 0$$
$$x = -2$$

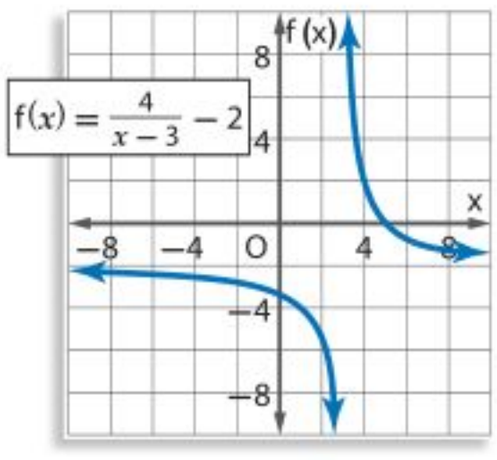
$g(x)$ غير معرَّفة عند $x = -2$، وهذا يعني وجود خط تقارب رأسي عند $x = -2$ ، وبما أن $c = -1$ ، فإنه يوجد خط تقارب أفقي عند $y = -1$

(لاحظ أنه كلما زادت قيم x الأكبر من -2، تقترب قيم $g(x)$ من -1، وكلما قلت قيم x الأقل من -2، تقترب قيم $g(x)$ من -1أيضًا، وهذا يعني وجود خط تقارب أفقي عند $y = -1$).

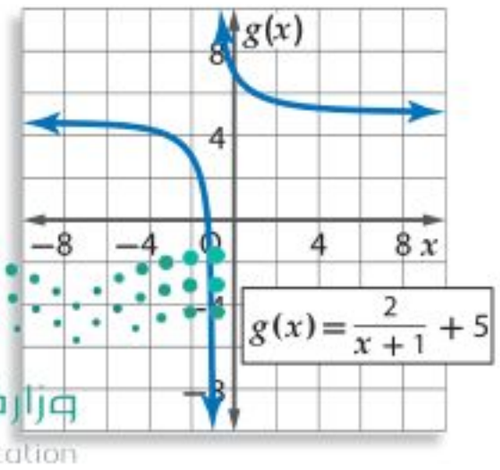
مجال الدالّة هو جميع الأعداد الحقيقية ما عدا -2 . أما المدى فهو جميع الأعداد الحقيقية ما عدا -1 .

تحقق من فهمك

(3A



(3B



إرشادات للدراسة

خطوط التقارب

يبين خط التقارب الرأسي قيمة x التي تكون الدالّة عندها غير معرَّفة. أما خط التقارب الأفقي فيبيِّن سلوك طرفَي التمثيل البياني.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

يمكنك استعمال دوالّ المقلوب لحل مسائل حياتية عديدة.

الربط بالحياة

تأسست الخطوط الجوية العربية السعودية في عام 1946 م، وكانت أولى رحلاتها الدولية إلى مطار (اللد) الفلسطيني لنقل الحجاج. وفي عام 2013 م حققت الشركة أعلى معدل نقل للركاب (25.241.421 راكبًا) على (177.435) رحلة داخلية ودولية، وأحرزت المركز الثاني عالميًا (90.46%) في انضباط مواعيد الرحلات.

مثال 4 من واقع الحياة — كتابة معادلات دوالّ المقلوب

طيران: تقطع طائرة ركاب مسافة 7500 ميل في إحدى الرحلات.

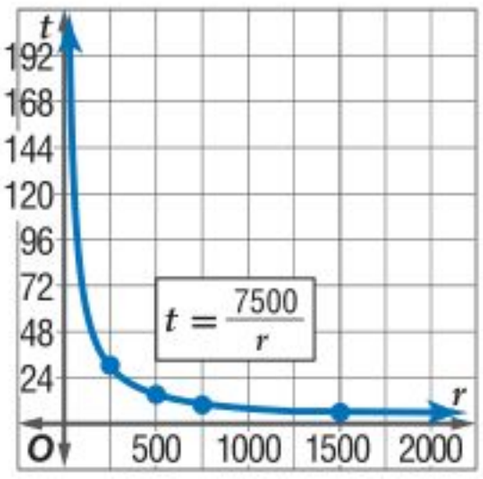
a) اكتب دالّة تبين الزمن t الذي تحتاج إليه الطائرة لتقطع هذه المسافة بدلالة السرعة r. ومثّل هذه الدالّة بيانيًّا.

حل المعادلة $rt = d$ بالنسبة للمتغير t.

$rt = d$	المعادلة الأصلية
$t = \frac{d}{r}$	اقسم كل من الطرفين على r
$t = \frac{7500}{r}$	$d = 7500$

مثّل الدالّة $t = \frac{7500}{r}$ بيانيًّا، عين النقاط:

(250,30)، (500,15)، (750,10)، (1500,5)



b) وضِّح أيّة قيود يمكن وضعها على كلٍّ من المجال والمدى في هذه الحالة.

المجال والمدى في هذه الحالة هما مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة؛ لأن القيم السالبة في هذه الحالة غير منطقية. وهناك شرط أو قيد إضافي على المجال؛ لأن للطائرة سرعة عظمى، وأخرى صُغرى تستطيع الطيران بها.

تحقق من فهمك

4) رحلات: نظَّم طلاب الصف الثاني الثانوي في مدرسة أهلية رحلة إلى منطقة أثرية بإشراف إدارة مدرستهم، حيث دفع كل واحد منهم 45 ريالًا ثمنًا للوجبات الغذائية، وتكفلت إدارة المدرسة بنفقات إضافية للرحلة وهي 2500 ريال. اكتب دالّة تمثّل متوسط التكلفة الكلّية للطالب الواحد ومثّلها بيانيًّا. ووضِّح أية قيود يمكن وضعها على كلٍّ من المجال والمدى.

تأكد

مثال 1

1) حدِّد قيمة x التي تجعل الدالّة $f(x) = \frac{5}{4x - 8}$ غير معرَّفة.

مثال 2

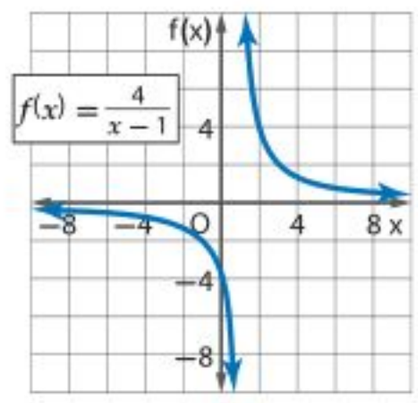
مثّل كلَّ دالّة ممَّا يأتي بيانيًّا، وحدِّد مجال ومدى كلٍّ منها:

2) $f(x) = \frac{5}{x}$ **3)** $f(x) = \frac{2}{x + 3}$

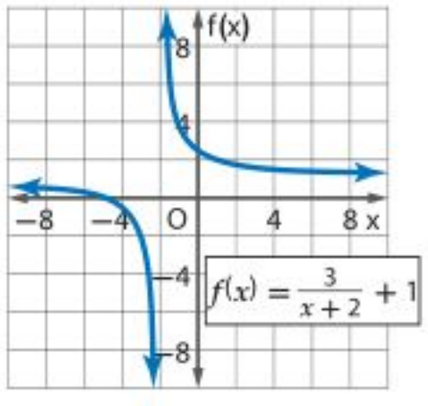
مثال 3

حدِّد خطوط التقارب والمجال والمدى لكلٍّ من الدالّتين الآتيتين:

4)



5)



مثال 4

6) هدية جماعية: يرغب بعض الطلاب في إرسال هدية ثمنها 150 ريالًا إلى أحد أصدقائهم.

a) فإذا كانت c تمثّل المبلغ الذي يدفعه كلٌّ منهم، وf عدد الأصدقاء، فاكتب دالّة تمثّل المبلغ الذي يدفعه كلٌّ منهم بدلالة عدد الأصدقاء.

b) مثّل هذه الدالّة بيانيًّا.

c) وضِّح أيّة قيود يمكن وضعها على كلٍّ من المجال والمدى في هذه الحالة.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

تدرب وحل المسائل

مثال 1 حدِّد قيمة x التي تجعل كلَّ دالّة فيما يأتي غير معرَّفة.

7) $f(x)=\frac{5}{2x}$ **8)** $f(x)=\frac{x}{x-7}$ **9)** $f(x)=\frac{4}{3x+9}$

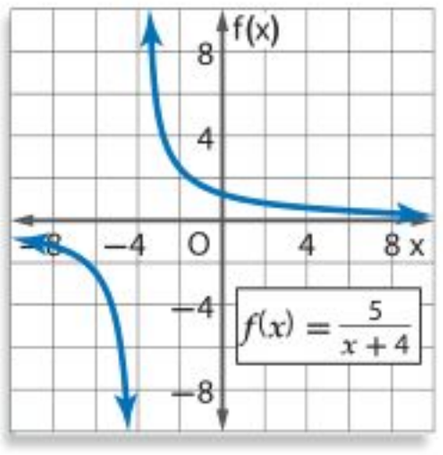
مثال 2 مثِّل كلَّ دالّة ممَّا يأتي بيانيًّا، وحدِّد مجال ومدى كلٍّ منها:

10) $f(x)=\frac{3}{x}$ **11)** $f(x)=\frac{-4}{x+2}$ **12)** $f(x)=\frac{2}{x-6}$

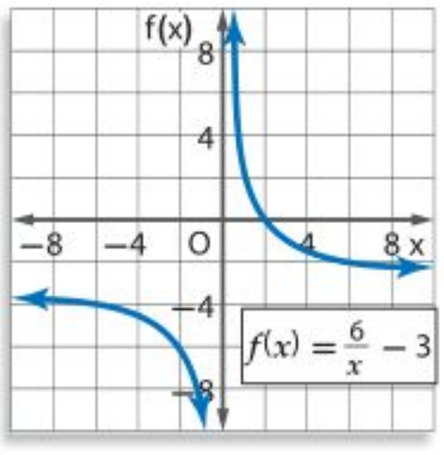
13) $f(x)=\frac{-2}{x-5}$ **14)** $f(x)=\frac{3}{x-7}-8$ **15)** $f(x)=\frac{9}{x+3}+6$

مثال 3 حدِّد خطوط التقارب والمجال والمدى لكلٍّ من الدالّتين الآتيتين:

16)



17)



مثال 4 **18) كيمياء:** لدى محمد 200 جرام (g) من سائل مجهول. وتساعد معرَّفة كثافة السائل على تحديد نوعه. ويمكن حساب كثافة السائل بقسمة كتلته على حجمه.

a) اكتب دالّة تمثِّل كثافة هذا السائل (d) بدلالة حجمه (v).

b) مثِّل هذه الدالّة بيانيًّا.

c) استعمل التمثيل البياني لتحديد خطوط التقارب والمجال والمدى لهذه الدالّة.

مثِّل كلَّ دالّة ممَّا يأتي بيانيًّا، وحدِّد مجال ومدى كلٍّ منها:

19) $f(x)=\frac{5}{3x}$ **20)** $f(x)=\frac{2}{4x+1}$ **21)** $f(x)=\frac{1}{2x+3}$

22) تمثيلات متعددة: افترض أن $g(x)=\frac{1}{x^2}$ ، $f(x)=\frac{1}{x}$.

a) جدوليًّا: أنشئ جدول قيم للمقارنة بين الدالّتين.

b) بيانيًّا: استعمل القيم في الجدول لتمثيل كِلتا الدالّتين بيانيًّا.

c) لفظيًّا: قارن بين التمثيلين البيانيين، ثم حدِّد أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بينهما.

d) تحليليًّا: اكتب تخمينًا حول الفرق بين التمثيل البياني للدوالّ التي على الصورة $f(x)=\frac{1}{x^n}$ عندما تكون n عددًا زوجيًّا، وعندما تكون n عددًا فرديًّا.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

مسائل مهارات التفكير العليا

23) مسألة مفتوحة: اكتب دالّة مقلوب يكون لتمثيلها البياني خط تقارب رأسي عند $x = -4$، وخط تقارب أفقي عند $y = 6$.

24) تبرير: قارن بين التمثيلين البيانيين لكلٍّ زوج من المعادلات الآتية موضِّحا أوجه الشبه وأوجه الاختلاف.

a $y = \frac{1}{x}, y - 7 = \frac{1}{x}$ **b** $y = \frac{1}{x}, y = 4\left(\frac{1}{x}\right)$ **c** $y = \frac{1}{x}, y = \frac{1}{x+5}$

d استعمل ملاحظاتك في الفروع a – c؛ لتمثيل الدالّة $y - 7 = 4\left(\frac{1}{x+5}\right)$ بيانيًّا دون استعمال جدول قِيم.

25) أيُّها لا ينتمي؟ حدِّد الدالّة المختلفة عن الدوالّ الثلاث الأخرى، ووضِّح إجابتك.

$f(x) = \frac{3}{x+1}$ $g(x) = \frac{x+2}{x^2+1}$ $h(x) = \frac{5}{x^2+2x+1}$ $j(x) = \frac{20}{x-7}$

26) تحدٍّ: اكتب دالَّتَي مقلوب، يكون للتمثيل البياني لكلٍّ منهما خطا التقارب نفساهما، ثم مثِّل هاتين الدالّتين بيانيًّا.

27) اكتب: ارجع إلى فقرة "لماذا" في بداية هذا الدرس، ووضِّح كيف يمكن استعمال دوالّ المقلوب عند جمع التبرعات. وبيِّن لماذا يكون جزء من التمثيل البياني للدالّة فقط منطقيًّا بالنسبة لسياق الموقف.

تدريب على اختبار

28) ما مجال الدالّة $f(x) = \frac{8}{x+3}$؟

A مجموعة الأعداد الحقيقية.

B مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة.

C مجموعة الأعداد الحقيقية ما عدا 3.

D مجموعة الأعداد الحقيقية ما عدا 3−.

29) ما قيمة العبارة $(x+y)\ (x+y)$، إذا كانت $xy = -3, x^2 + y^2 = 10$؟

A 4

B 7

C 13

D 16

مراجعة تراكمية

بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي: (الدرس 1-1)

30) $\dfrac{\frac{p^3}{2n}}{-\frac{p^2}{4n}}$ **31)** $\dfrac{\frac{m+q}{5}}{\frac{m^2+q^2}{5}}$ **32)** $\dfrac{\frac{x+y}{2x-y}}{\frac{x+y}{2x+y}}$

أوجد $(f+g)(x), (f-g)(x), (f.g)(x), (\frac{f}{g})(x)$ **للدالّتين** $f(x), g(x)$ **في كلٍّ ممَّا يأتي:** (مهارة سابقة)

33) $f(x) = x+9$, $g(x) = x-9$ **34)** $f(x) = 2x-3$, $g(x) = 4x+9$ **35)** $f(x) = 2x^2$, $g(x) = 8-x$

مثِّل كلَّ دالّة ممَّا يأتي بيانيًّا، وحدِّد مجال ومدى كلٍّ منها: (مهارة سابقة)

36) $f(x) = \begin{cases} x & x \neq 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$ **37)** $f(x) = |x-5|$ **38)** $f(x) = x^2 - 4$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

اختبار منتصف الفصل

الدروس من 1-1 إلى 3-1

بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي:

1) $\frac{2x^2y^5}{7x^3yz} \cdot \frac{14xyz^2}{18x^4y}$

2) $\frac{24a^4b^6}{35ab^3} \div \frac{12abc}{7a^2c}$

3) $\frac{3x-3}{x^2+x-2} \cdot \frac{4x+8}{6x+18}$

4) $\frac{m^2+3m+2}{9} \div \frac{m+1}{3m+15}$

5) $\frac{\frac{r^2+3r}{r+1}}{\frac{3r}{3r+3}}$

6) $\frac{\frac{2y}{y^2-4}}{\frac{3}{y^2-4y+4}}$

7) اختيار من متعدد: إذا كانت $r \neq \pm 2$، فأيٌّ ممَّا يأتي تكافئ العبارة $\frac{r^2+6r+8}{r^2-4}$؟

A) $\frac{r-2}{r+4}$

B) $\frac{r+4}{r-2}$

C) $\frac{r+2}{r-4}$

D) $\frac{r+4}{r+2}$

8) اختيار من متعدد: ما قيم x التي تجعل العبارة $\frac{x^2-16}{(x^2-6x-27)(x+1)}$ غير معرّفة؟

A) $-3, -1$

B) $-9, 1, 3$

C) $-3, -1, 9$

D) -1

9) أوجد LCM لكثيرتَي الحدود $3x-3$, x^2-x .

بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي:

10) $\frac{2x}{4x^2y} + \frac{x}{3xy^3}$

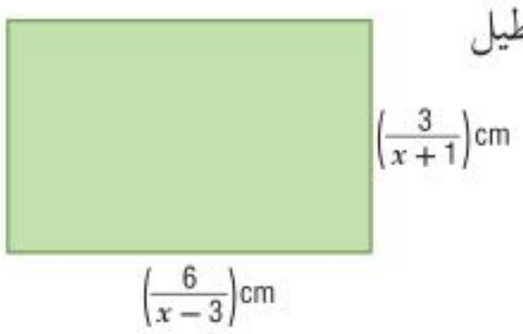
11) $\frac{3}{4m} + \frac{2}{3mn^2} - \frac{4}{n}$

12) $\frac{6}{r^2-3r-18} - \frac{1}{r^2+r-6}$

13) $\frac{3x+6}{x+y} + \frac{6}{-x-y}$

14) $\frac{x-4}{x^2-3x-4} + \frac{x+1}{2x-8}$

15) هندسة: أوجد محيط المستطيل في الشكل المجاور .



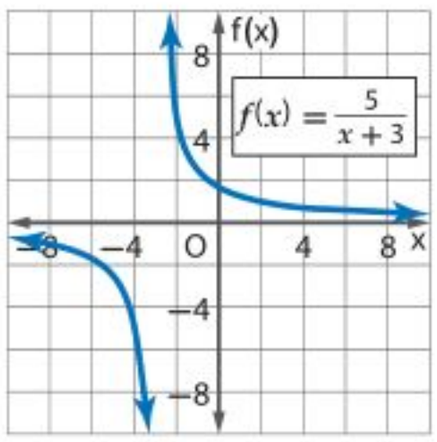
16) سفر: سافر محمد إلى الشاطئ الذي يبعد 100 km عن بيته، فقطع نصف المسافة بسرعة معينة، والنصف الثاني بسرعة أقل بمقدار 15 km/h .

a) إذا كانت x تمثِّل السرعة الأولى، فاكتب عبارةً تمثِّل الزمن الذي استغرقه في قطع النصف الأول من المسافة.

b) اكتب عبارة تمثِّل الزمن الذي استغرقه في قطع النصف الثاني من المسافة.

c) اكتب عبارة تمثِّل الزمن الذي استغرقه في قطع الرحلة كاملة في أبسط صورة.

17) حدِّد خطوط التقارب والمجال والمدى للدالّة الآتية:



مثِّل كلَّ دالّة ممَّا يأتي بيانيًّا، وحدِّد مجال ومدى كلٍّ منها:

18) $f(x) = \frac{6}{x-1}$

19) $f(x) = \frac{-2}{x} + 4$

20) $f(x) = \frac{3}{x+2} - 5$

21) $f(x) = -\frac{1}{x-3} + 2$

22) شطائر: أحضر مجموعة من الأصدقاء 45 شطيرة لتناولها بالتساوي في رحلة ترفيهية. ويعتمد عدد الشطائر التي سيأكلها كلُّ شخص على عدد الأشخاص المشتركين في الرحلة.

a) إذا كانت x تمثِّل عدد الأصدقاء المشاركين في الرحلة، فاكتب دالّة تمثِّل هذا الموقف.

b) مثِّل هذه الدالّة بيانيًّا.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي
رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

1-4

تمثيل الدوالّ النسبية بيانيًّا
Graphing Rational Functions

فيما سبق:
درست تمثيل دوالَ المقلوب بيانيًا. الدرس (1-3)

والآن:
- أمثّل بيانيًا دوالَ نسبية لها خطوط تقارب رأسية وأفقية.
- أمثّل بيانيًا دوالَ نسبية لها نقاط انفصال.

المفردات:
الدالّة النسبية rational function
نقطة الانفصال point discontinuity

لماذا؟

اشترى أحمد آلة تصوير رقمية وطابعة لطباعة الصور بمبلغ إجمالي مقداره 1350 ريالًا، وكانت تكلفة الحبر وورق الطباعة للصورة الواحدة 1.5 ريال.

يمكنه استعمال الدالّة النسبية $C(p) = \frac{1.5p + 1350}{p}$ لحساب تكلفة طباعة p من الصور.

خطوط التقارب الرأسية والأفقية: **الدالّة النسبية** هي دالّة على الصورة $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$، حيث $a(x)$ و $b(x)$ كثيرتا حدود، و $b(x) \neq 0$.

لتمثيل الدالّة النسبية بيانيًّا يكون من المفيد تحديد أصفارها، وخطوط التقارب لها. فأصفار الدالّة $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$ هي جميع قيم x التي يكون عندها $a(x) = 0$.

مفهوم أساسي
خطوط التقارب الرأسية والأفقية

أضف إلى مطويتك

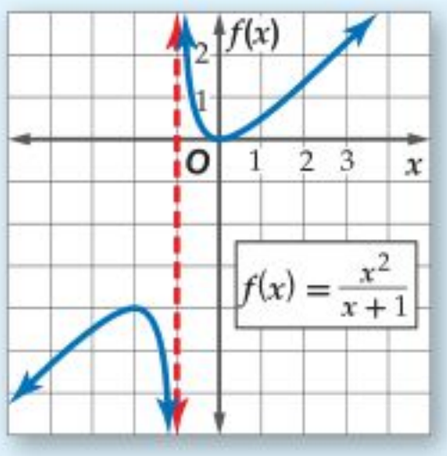
التعبير اللفظي: إذا كان $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$، حيث $a(x)$, $b(x)$ كثيرتا حدود لا يوجد بينهما عوامل مشتركة غير الواحد، و $b(x) \neq 0$ فإنه:

- يوجد للدالّة $f(x)$ خط تقارب رأسي عندما $b(x) = 0$.
- يوجد للدالّة $f(x)$ خط تقارب أفقي واحد على الأكثر.
- إذا كانت درجة $a(x)$ أكبر من درجة $b(x)$ فلا يوجد خط تقارب أفقي.
- إذا كانت درجة $a(x)$ أقل من درجة $b(x)$، فإن خط التقارب الأفقي هو المستقيم $y = 0$.
- إذا كانت درجة $a(x)$ تساوي درجة $b(x)$، فإن خط التقارب الأفقي هو المستقيم:

$$y = \frac{\text{المعامل الرئيس لـ } a(x)}{\text{المعامل الرئيس لـ } b(x)} .$$

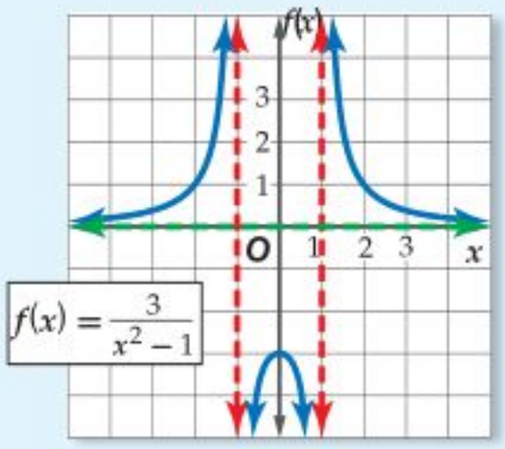
أمثلة:

لا يوجد خط تقارب أفقي



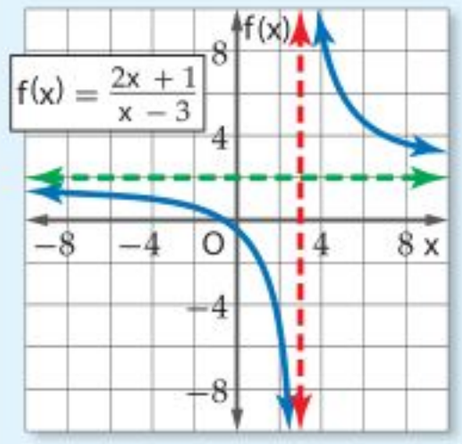
خط التقارب الرأسي:
$x = -1$

يوجد خط تقارب أفقي واحد



خطا التقارب الرأسي:
$x = -1, x = 1$

خط التقارب الأفقي:
$y = 0$



خط التقارب الرأسي:
$x = 3$

خط التقارب الأفقي:
$y = 2$

إرشادات للدراسة

مجال الدالّة النسبية
مجال الدالّة النسبية $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$ هي: جميع الأعداد الحقيقية باستثناء تلك الأعداد التي تجعل المقام صفرًا.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

يمكنك استعمال خطوط التقارب لتسهيل تمثيل الدالّة النسبية بيانيًّا، كما يمكنك استعمالها لتوضيح عدد الأجزاء التي ينقسم إليها التمثيل البياني للدالّة، فإذا كان هناك خط تقارب رأسي واحد، فإن التمثيل ينقسم إلى فرعين، أما إذا كان هناك خطًّا تقارب فإنه ينقسم إلى ثلاثة أفرع.

مثال 1 التمثيل البياني لدالّة نسبية ليس لها خط تقارب أفقي

مثِّل الدالّة $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ بيانيًّا.

الخطوة 1: أوجد مجال الدالّة.

$x - 1 = 0$ $\quad b(x) = 0$

$x = 1$ أضف 1 لكلا الطرفين

إذن مجال الدالّة هو جميع الأعداد باستثناء $x = 1$.

الخطوة 2: أوجد خطوط التقارب.

أوجد خط التقارب الرأسي.

بما أن المقام يصبح صفرًا عند $x = 1$.

إذن يوجد خط تقارب رأسي للدالّة عند $x = 1$.

وبما أن درجة البسط أكبر من درجة المقام، فلا يوجد خط تقارب أفقي للدالّة.

الخطوة 3: أوجد أصفار الدالّة.

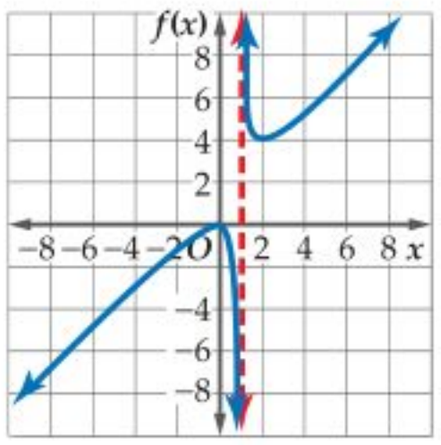
$x^2 = 0$ $\quad a(x) = 0$

$x = 0$ خُذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين

يوجد للدالّة صفر عندما $x = 0$ ، وهذا يعني أن منحنى الدالّة يقطع المحور x عند النقطة $(0, 0)$.

الخطوة 4: مثِّل بيانيًّا.

أنشئ جدول قيم للدالّة لتجد أزواجًا مرتبة تقع على التمثيل البياني، وصل بين تلك النقاط على المستوى الإحداثي.



x	$f(x)$
−3	−2.25
−2	−1.33
−1	−0.5
0	0
0.5	−0.5
1.5	4.5
2	4
3	4.5

إرشادات للدراسة

الحاسبة البيانية

يمكنك استعمال تطبيق القوائم وجداول البيانات في الحاسبة البيانية لإنشاء جدول قيم للدالّة عندما تكون القيم في الصورة العشرية.

تحقق من فهمك

1) $f(x) = \frac{x^3}{x-1}$.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

مثال 2 من واقع الحياة

استعمال التمثيل البياني للدوالّ النسبية

الربط بالحياة

تقوم قوات خفر السواحل بعمليات المراقبة والحراسة الحدودية والإنقاذ وتقديم المساعدة لمستخدمي المياه الإقليمية في المملكة.

متوسط السرعة: يسير قارب خفر سواحل عكس اتجاه الموج بسرعة مقدارها r_1 mi/h. وخلال عودته إلى نقطة الانطلاق سار القارب في اتجاه الموج بسرعة مقدارها r_2 mi/h. ويُعطى مقدار متوسط سرعة القارب خلال رحلة الذهاب والعودة بالصيغة $R = \frac{2r_1r_2}{r_1 + r_2}$.

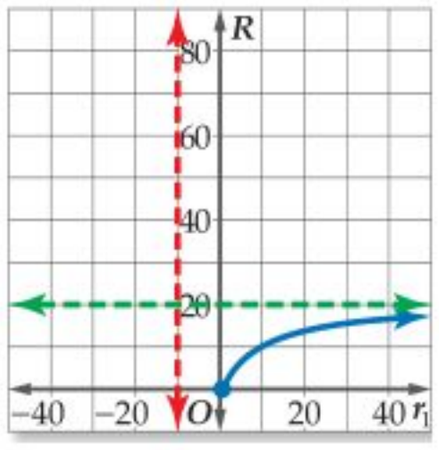
a) إذا كان r_1 هو المتغيِّر المستقل، و R هو المتغيِّر التابع، فمثِّل الصيغة بيانيًّا عندما $r_2 = 10$ mi/h.

بتعويض قيمة r_2 تصبح الدالّة $R = \frac{2r_1(10)}{r_1 + (10)} = \frac{20r_1}{r_1 + 10}$.

ويكون خط التقارب الرأسي هو $r_1 = -10$.

وَ خط التقارب الأفقي هو $R = 20$.

مثِّل خطَّي التقارب والدالّة بيانيًّا.



b) ما مقطع المحور R للتمثيل البياني؟

مقطع المحور R هو $R = 0$.

c) ما قيم المجال والمدى المنطقية في سياق المسألة؟

في سياق المسألة، مقدار السرعة غير سالب؛ لذا فإن قيم r_1 الأكبر من أو التي تساوي الصفر هي التي تكون واقعية منطقية، وقيم R المنطقية هي بين 0 و 20.

تحقق من فهمك

2) رواتب: تستعمل إحدى الشركات الدالّة $S(x) = \frac{13500x + 250}{x + 1}$ لحساب راتب موظف خلال السنة x من عمله لديها، مثِّل هذه الدالّة بيانيًّا. وحدِّد القيم المنطقية لمجال الدالّة ومداها في سياق المسألة، وعلى ماذا يدل خط التقارب الأفقي في هذه المسألة؟

نقطة الانفصال: يوجد في بعض الأحيان **نقط انفصال** في التمثيل البياني للدالّة النسبية، وتظهر هذه النقط على شكل فجوات في التمثيل البياني للدالّة؛ لأن الدالّة تكون غير معرّفة عند تلك النقاط ومُعرفةً حولها.

مفهوم أساسي

نقطة الانفصال

أضف إلى مطويتك

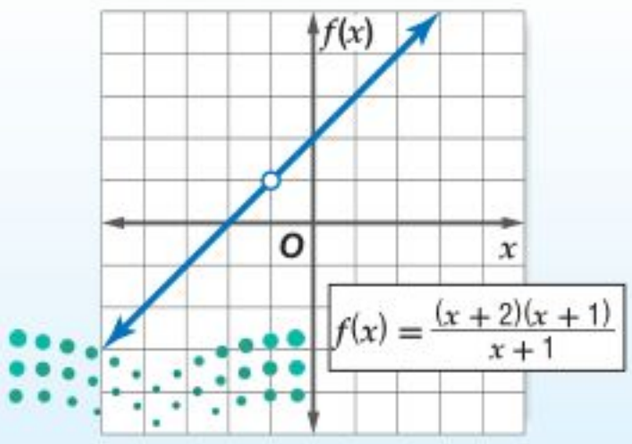
التعبير اللفظي: إذا كانت $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$، حيث $b(x) \neq 0$، وكان $x - c$ عاملًا مشتركًا بين $a(x)$ و $b(x)$، فإنه توجد نقطة انفصال عندما $x = c$.

مثال:

$$f(x) = \frac{(x + 2)(x + 1)}{x + 1}$$
$$= x + 2, \quad x \neq -1$$

نقطة الانفصال هي:

$$(-1, f(-1)) = (-1, 1)$$



وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

مثال 3 التمثيل البياني لدالّة تتضمن نقطة انفصال

مثِّل الدالّة $f(x)=\frac{x^2-16}{x-4}$ بيانيًّا .

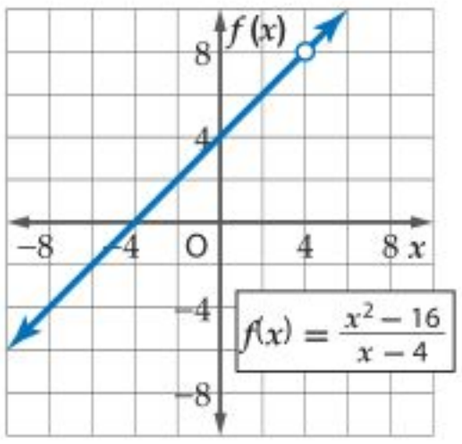
لاحظ أن مجال الدالّة $f(x)$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية ما عدا 4

$$\frac{x^2-16}{x-4}=\frac{(x+4)(x-4)}{x-4}=x+4$$

لذا فإن التمثيل البياني للدالّة $f(x)=\frac{x^2-16}{x-4}$ هو نفسه

التمثيل البياني للدالّة $f(x)=x+4$، مع وجود فجوة في

التمثيل البياني للدالّة $f(x)=x+4$ عندما $x=4$.



تحقق من فهمك

3A $f(x)=\frac{x^2+4x-5}{x+5}$

3B $f(x)=\frac{x^3+2x^2-9x-18}{x^2-9}$

تنبيه !

فجوات التمثيل البياني

تذكر أن وجود عامل مشترك بين البسْط والمقام يدل على وجود فجوة في التمثيل البياني للدالّة.

تأكـد

مثال 1 مثِّل الدالّتين الآتيتين بيانيًّا:

1) $f(x)=\frac{x^2-2}{x-1}$

2) $f(x)=\frac{x^2}{x+2}$

مثال 2

3) كرة سلة : في بداية تدريب لفريق كرة سلة، أحرز سعيد 7 أهداف من 11 رمية حرة لعبها، ويرغب في تحسين النسبة المئوية للأهداف التي يحرزها والممثَّلة بالدالّة $P(x)=\frac{7+x}{11+x}$، حيث x عدد الرميات الحرة الأخرى التي سيلعبها.

a) مثِّل هذه الدالّة بيانيًّا.

b) أيُّ جزء من التمثيل البياني للدالّة منطقي في سياق المسألة؟

c) ماذا يمثِّل مقطع المحور الرأسي للتمثيل البياني؟

d) ما معادلة خط التقارب الأفقي؟ وما النسبة المئوية التي يمثِّلها؟ وهل يمكن الوصول إلى هذه النسبة؟

مثال 3 مثِّل كلَّ دالّة ممَّا يأتي بيانيًّا:

4) $f(x)=\frac{x^2-4x-5}{x+1}$

5) $f(x)=\frac{x^2+x-12}{x+4}$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 مثِّل كلًّا من الدالّتين الآتيتين بيانيًّا:

6) $f(x)=\frac{x^2}{6x+12}$

7) $f(x)=\frac{x^2-16}{x-1}$

مثال 2 مثِّل كلَّ دالّة ممَّا يأتي بيانيًّا:

8) $f(x)=\frac{x}{x+2}$

9) $f(x)=\frac{5}{(x-1)(x+4)}$

10) $f(x)=\frac{1}{(x+4)^2}$

11) $f(x)=\frac{2x}{(x+2)(x-5)}$

12) $f(x)=\frac{4}{(x-2)^2}$

13) $f(x)=\frac{x-3}{x+1}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

14) كهرباء: دائرة كهربائية تحتوي على 3 مقاومات موصولة على التوالي، وتُعطى شدة التيار الكهربائي بالمس
فيها بالمعادلة $C = \frac{V}{R_1 + R_2 + R_3}$ ، حيث V فرق الجهد بالفولت، و R_3 , R_2 , R_1 المقاومات بالأوم.

a) إذا كان R_1 هو المتغيِّر المستقل، و C هو المتغيِّر التابع، فمثِّل المعادلة بيانيًّا عندما تكون
$V = 120\text{ v}, R_2 = 25\ \Omega, R_3 = 75\ \Omega$.

b) اكتب معادلة خط التقارب الرأسي، وأوجد مقطع المحور R_1، ومقطع المحور C للتمثيل البياني.

c) أوجد قيمة C عندما تكون $R_1 = 140\ \Omega$.

d) ما قيم المجال والمدى المنطقية في سياق المسألة؟

مثال 3 مثِّل كلَّ دالّة ممَّا يأتي بيانيًّا:

15) $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 8}{x - 4}$

16) $f(x) = \frac{x^2 + 4x - 12}{x - 2}$

17) $f(x) = \frac{x^2 - 64}{x - 8}$

18) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

أوجد معادلات خطوط التقارب الرأسية، ونقط الانفصال (إن وجدت) للتمثيل البياني لكلِّ دالّة ممَّا يأتي:

19) $f(x) = \frac{x + 4}{x^2 + 9x + 20}$

20) $f(x) = \frac{2}{x^2 + 3x}$

21) $f(x) = \frac{x^2 - 5x}{x - 5}$

22) اتصالات: اشترى أحمد هاتفًا محمولًا مزودًا بخدمة إنترنت، وكان ثمن الهاتف 1500 ريال، ومتوسط تكلفة مكالماته الشهرية 200 ريال بالإضافة إلى 100 ريال شهريًّا لخدمة الإنترنت. إذا علمت أن التكلفة الشهرية لأحمد تشمل: ثمن الهاتف، ومتوسط تكلفة المكالمات، وثمن خدمة الإنترنت.

a) اكتب دالّة نسبية تمثِّل متوسط التكلفة الشهرية لأحمد، بعد مرور x شهرًا من شراء الهاتف، ومثِّلها بيانيًّا.

b) اكتب معادلات خطوط تقارب التمثيل البياني للدالّة؟

c) لماذا يكون الربع الأول من المستوى الإحداثي هو المهم في هذا الموقف؟

d) بعد كم شهر من شراء الهاتف يكون متوسط التكلفة الشهرية لأحمد 450 ريالًا؟

الربط بالحياة

أشار مسح عالمي إلى أن مستخدمي الهواتف النقالة في المملكة العربية السعودية أكثر من أي دولة في العالم؛ بمعدل 180 هاتفًا نقالًا لكل 100 فرد.

المصدر: وزارة الاتصالات وتقنية المعلومات
http://www.mcit.gov.sa/Ar/Communication

مثِّل كلَّ دالّة ممَّا يأتي بيانيًّا:

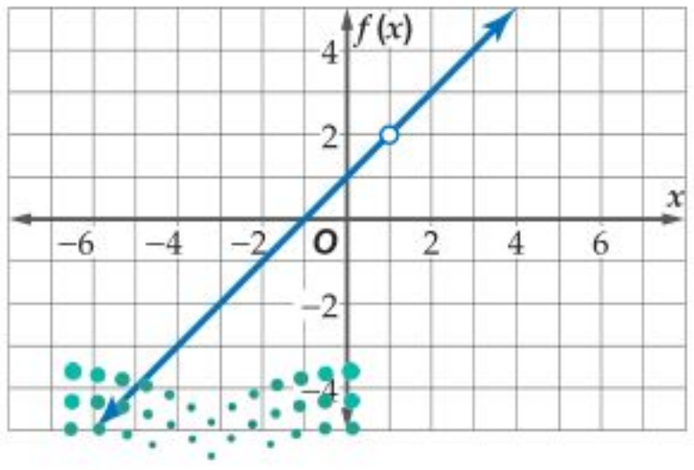
23) $f(x) = \frac{x + 1}{x^2 + 6x + 5}$

24) $f(x) = \frac{x^2 - 10x - 24}{x + 2}$

مسائل مهارات التفكير العليا

25) مسألة مفتوحة: مثِّل بيانيًّا بشكل تقريبيٍّ دالّة نسبية لها خط تقارب أفقي معادلته $y = 1$، وخط تقارب رأسي معادلته $x = -2$.

26) تحدٍّ: اكتب دالّة نسبية لها التمثيل البياني المجاور .



27) تبرير: ما الفرق بين التمثيلين البيانيين للدالّتين:
$f(x) = x - 2, g(x) = \frac{(x + 3)(x - 2)}{x + 3}$ ؟

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

28) برهان: إذا علمت أن الدالّة النسبية هي دالّة على الصورة: $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$، حيث $a(x)$ و $b(x)$ كثيرتا حدود، و $b(x) \neq 0$، فأثبت أن $f(x) = \frac{x}{a-b} + c$ دالّة نسبية.

29) اكتب: وضِّح كيف يمكن استعمال تحليل البسْط والمقام إلى عوامل لإيجاد خطوط التقارب الرأسية أو نقطة الانفصال لدالّة نسبية.

تدريب على اختبار

30) يريد عليٌّ أن يختار كتابين معًا من بين 6 كتب مختلفة. بكم طريقة يمكنه القيام بذلك؟

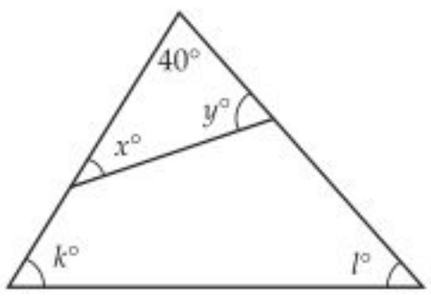
A 48

B 18

C 15

D 12

31) هندسة: في الشكل المجاور، ما قيمة $x + y + k + l$ ؟



A 140

B 280

C 320

D 360

مراجعة تراكمية

مثِّل كلَّ دالّة ممَّا يأتي بيانيًّا، وحدِّد مجال ومدى كلٍّ منها: (الدرس 3-1)

32) $f(x) = \frac{-5}{x+2}$

33) $f(x) = \frac{4}{x-1} - 3$

34) $f(x) = \frac{1}{x+6} + 1$

بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي: (الدرس 2-1)

35) $\frac{m}{m^2-4} + \frac{2}{3m+6}$

36) $\frac{d-4}{d^2+2d-8} + \frac{d+2}{d^2-16}$

37) $\frac{y}{y+3} - \frac{6y}{y^2-9}$

38) $\frac{5}{x^2-3x-28} + \frac{7}{2x-14}$

39) سفر: يبين الجدول المجاور المسافات التي يقطعها أحمد عند سفره إلى مدينة مجاورة بعد مرور زمن معين. (مهارة سابقة)

الزمن (h)	المسافة (km)
0	0
1	55
2	110
3	165
4	165
5	225

a) أوجد معدل تغير المسافة بين الساعتين الأولى والثالثة من الانطلاق.

b) أوجد معدل تغير المسافة بعد مرور 5 ساعات من الانطلاق.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي
ابحث الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

توسع
1-4

معمل الحاسبة البيانية

تمثيل الدوالّ النسبية بيانيًّا
Graphing Rational Functions

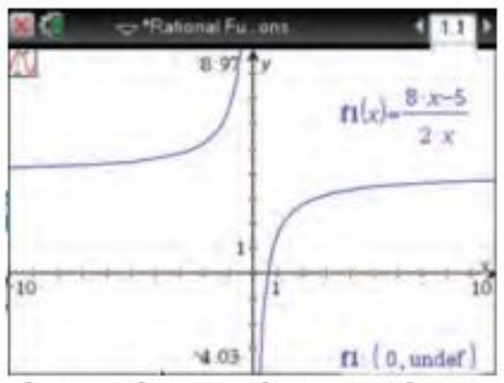
يمكن استعمال الحاسبة البيانية TI-nspire لاستكشاف التمثيلات البيانية للدوالّ النسبية.

نشاط 1 التمثيل البياني لدالّة لها خطوط تقارب

مثّل الدالّة $y = \frac{8x - 5}{2x}$ بيانيًّا، وأوجد معادلات خطوط التقارب.

الخطوة 1: مثّل الدالّة بيانيًّا:

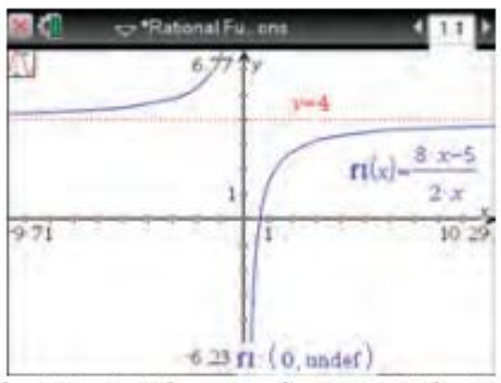
اضغط مفتاح (on)، ومن الشاشة الظاهرة اختر 1 مستند جديد، ثم اختر 2: اضافة تطبيق الرسوم البيانية واختر (ctrl ÷)، ثم اكتب الدالّة واضغط (enter). ولتحديد خطوط التقارب اضغط (menu)، ومنها اختر 5: تتبع المسار، ومنها 1: تتبع مسار التمثيل البياني، ثم تتبع التمثيل البياني بتحريك الأسهم، ستلاحظ أنه لا يوجد قيمة لِـ y عندما $x = 0$، وتظهر النقطة (0, undef) وخط التقارب الرأسي.



[−10, 10] scl:1 by [−4.3, 8.97] scl:1

الخطوة 2: أوجد معادلات خطوط التقارب.

بالنظر إلى المعادلة، يمكننا معرَّفة أن الدالّة غير معرَّفة عندما $x = 0$، لذا فإن لها خط تقارب رأسيًّا معادلته $x = 0$. لاحظ ما يحدث لقيم y عندما تزداد قيم x وعندما تقل. لعلك لاحظت أن قيم y تقترب من العدد 4 في الحالتين، وعليه يكون للدالّة خط تقارب أفقي معادلته $y = 4$.



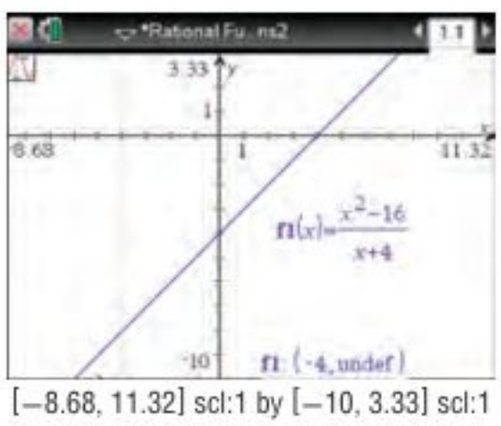
[−9.71, 10.29] scl:1 by [−6.23, 6.77] scl:1

نشاط 2 التمثيل البياني لدالّة تتضمَّن نقطة انفصال

مثّل الدالّة $y = \frac{x^2 - 16}{x + 4}$ بيانيًّا.

الخطوة 1: مثِّل الدالّة بيانيًّا:

اضغط مفتاح (on) ومن الشاشة الظاهرة اختر 1 مستند جديد ثم اختر 2: اضافة تطبيق الرسوم البيانية واختر (ctrl ÷)، ثم اكتب الدالّة واضغط (enter). ولتحديد نقاط الانفصال اضغط (menu) ومنها اختر 5: تتبع المسار ومنها 1: تتبع مسار التمثيل البياني، ثم تتبَّع التمثيل البياني بتحريك الأسهم، فستلاحظ أنه لا يوجد قيمة لِـ y عند $x = -4$، وتظهر فجوة عند نقطة الانفصال (−4, undef).



[−8.68, 11.32] scl:1 by [−10, 3.33] scl:1

الخطوة 2: أوجد نقاط الانفصال.

يبدو التمثيل البياني على شكل مستقيم بفجوة عندما $x = -4$ ؛ لأن المقام يساوي صفرًا عندما $x = -4$، مما يعني أن الدالّة غير معرَّفة عندما $x = -4$.

تمارين:

استعمل الحاسبة البيانية لتمثيل كلِّ دالّة مما يأتي بيانيًّا، ثم اكتب الإحداثي x لنقاط الانفصال ومعادلات خطوط التقارب (إن وجدت):

1) $f(x) = \frac{1}{x}$

2) $f(x) = \frac{x}{x + 2}$

3) $f(x) = \frac{2}{x - 4}$

4) $f(x) = \frac{2x}{3x - 6}$

5) $f(x) = \frac{4x + 2}{x - 1}$

6) $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x + 3}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي
رابط الموقع الرسمي
www.ien.edu.sa

1-5

دوالّ التغيُّر
Variation Functions

فيما سبق:
درست كتابة معادلات خطية وتمثيلها بيانيًا. (مهارة سابقة)

والآن:
- أحل مسائل التغيُّر الطردي والتغيُّر المشترك.
- أحل مسائل التغيُّر العكسي والتغيُّر المركّب.

المفردات:
التغيُّر الطردي
direct variation
ثابت التغيُّر
constant of variation
التغيُّر المشترك
joint variation
التغيُّر العكسي
inverse variation
التغيُّر المركّب
combined variation

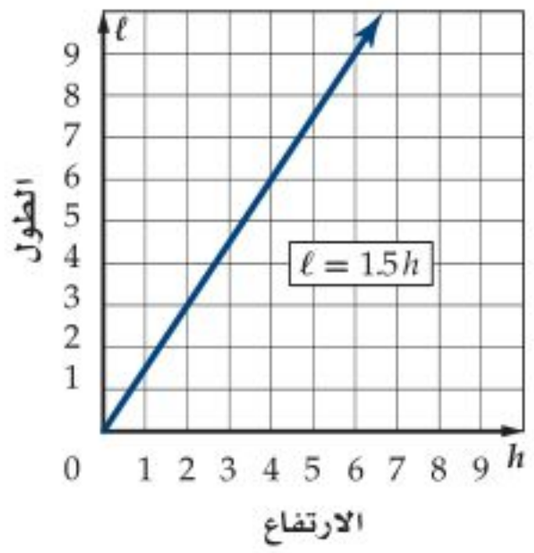
لماذا؟

وجد عبدالله خلال بنائه منحدرًا للتزحلق، أن أنسب المنحدرات هي التي يكون فيها طول المنصّة ℓ مساويًا 1.5 مرة من ارتفاعها h.

كما تلاحظ من الجدول المجاور، فإن طول المنصّة يعتمد على ارتفاعها، حيث يزداد الطول كلما ازداد الارتفاع بينما تبقى نسبة الطول إلى الارتفاع ثابتة، وعندما تكون النسبة بين كميتين متغيرتين ثابتة، تسمى العلاقة بينهما (**تغيّرًا طرديًّا**) كما درست سابقًا، وبهذا فإن طول المنصة يتغيَّر طرديًّا مع ارتفاعها.

الطول (ℓ)	الارتفاع (h)	النسبة ($\frac{\ell}{h}$)
3	2	1.5
6	4	1.5
9	6	1.5
12	8	1.5

التغيُّر الطردي والتغيُّر المشترك إن المعادلة $\frac{\ell}{h} = 1.5$ يمكن كتابتها على الصورة $\ell = 1.5h$ وهي مثال على التغيُّر الطردي، حيث يعبّر عن التغيُّر الطردي بمعادلة على الصورة $y = kx$، ويُسمى k في هذه المعادلة **ثابت التغيُّر**.



لاحظ أن التمثيل البياني للمعادلة $\ell = 1.5h$ هو مستقيم يمرُّ بنقطة الأصل، لذا فالتغيُّر الطردي حالة خاصة من معادلة مستقيم مكتوبة على الصورة $y = mx + b$، حيث $m = k$ و $b = 0$. وهذا يعني أن ميل المستقيم الممثل لمعادلة التغيُّر الطردي هو ثابت التغيُّر.

وللتعبير عن التغيُّر الطردي، فإننا نقول إن y تتغيَّر طرديًّا مع x. وبمعنى آخر كلما زادت x، فإن y تزداد بنسبة ثابتة إذا كان ثابت التغير موجبًا، وينقص بنسبة ثابتة إذا كان ثابت التغير سالبًا.

إرشادات للدراسة

ثابت التغيُّر
في التغير الطردي، المستقيم الذي له ثابت تغيُّر موجب، يكون صاعدًا إلى أعلى من اليسار إلى اليمين، بينما المستقيم الذي له ثابت تغيُّر سالب، فإنه يكون هابطًا نحو الأسفل من اليسار إلى اليمين.

مفهوم أساسي — التغيُّر الطردي

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: تتغيّر y طرديًّا مع x إذا وجد عدد $k \neq 0$، بحيث $y = kx$ ويسمى العدد k ثابت التغيُّر.

مثال: إذا كانت $y = 3x$، فإن y تتغير طرديًّا مع x. فكلما زادت x بمقدار 1، فإن y تزداد بمقدار 3، فعندما تكون قيمة $x = 1$، فإن $y = 3$، وعندما $x = 2$ فإن $y = 6$ وهكذا.

إذا كانت y تتغيَّر طرديًّا مع x، وعُلمت بعض القيم، فإنه يمكنك استعمال التناسب لإيجاد القيم الأخرى المجهولة.

$$y_2 = kx_2 \quad , \quad y_1 = kx_1$$
$$\frac{y_2}{x_2} = k \qquad \frac{y_1}{x_1} = k$$

ومن ذلك نجد أن $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$ (يسمّى هذا التناسب تناسبًا طرديًّا؛ أي أن y تتناسب طرديًّا مع x).

ويمكنك استعمال خصائص المساواة لإيجاد تناسبات أخرى تربط بين قيم x وقيم y.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

مثال 1 التغيُّر الطردي

إذا كانت y تتغيَّر طرديًّا مع x ، وكانت $y = 15$ عندما $x = 5$ ، فأوجد قيمة y عندما $x = 7$.

استعمل تناسبًا يربط بين القيم.

$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$	تناسب طردي
$\frac{15}{5} = \frac{y_2}{7}$	$y_1 = 15, x_1 = 5 , x_2 = 7$
$15(7) = 5(y_2)$	بالضرب التبادلي
$105 = 5y_2$	بسّط
$21 = y_2$	اقسم كل من الطرفين على 5

تحقق من فهمك

1) إذا كانت r تتغيَّر طرديًّا مع t ، وكانت $r = -20$ عندما $t = 4$ ، فأوجد قيمة r عندما $t = -6$.

هناك نوع آخر من التغيُّر يُسمى **التغيُّر المشترك**، ويحدث عندما تتغيَّر كمية ما طرديًّا مع حاصل ضرب كميتين أخريين أو أكثر.

إرشادات للدراسة

التغيُّر المشترك

يصنّف بعض الرياضيين التغيُّر المشترك بوصفه حالة خاصة من التغيُّر المركّب الذي ستدرسه لاحقًا.

مفهوم أساسي التغيُّر المشترك

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: تتغيَّر y تغيُّرًا مشتركًا مع x و z إذا وجد عدد $k \neq 0$ ، بحيث $y = kxz$.

مثال: إذا كانت: $x = 6, z = -2, y = -60$ ، وكانت y تتغير تغيرًا مشتركًا مع x وَ z، حيث
إن: $y = -60 = 5(6)(-2) = kxz \Rightarrow k = 5$ ، فإن قيمة y عندما $x = 4، z = -5$
تكون: $y = 5 \times 4 \times (-5) = -100$.

إذا كانت y تتغيَّر تغيُّرًا مشتركًا مع x و z ، وعلمتَ بعض القيم، فإنه يمكنك استعمال التناسب لإيجاد القيم الأخرى المجهولة.

$$y_1 = kx_1z_1 \quad , \quad y_2 = kx_2z_2$$
$$\frac{y_1}{x_1z_1} = k \qquad \frac{y_2}{x_2z_2} = k$$

ومن ذلك نجد أن $\frac{y_1}{x_1z_1} = \frac{y_2}{x_2z_2}$ (يسمى هذا التناسب تناسبًا مشتركًا، أي أن y تتناسب طرديًّا مع حاصل ضرب x ، z).

مثال 2 التغيُّر المشترك

إذا كانت y تتغيَّر تغيّرًا مشتركًا مع x و z ، وكانت $y = 20$ عندما $x = 5$ و $z = 3$، فأوجد قيمة y عندما $x = 9$ و $z = 2$.

استعمل تناسبًا يربط القيم بعضها ببعض.

$\frac{y_1}{x_1 z_1} = \frac{y_2}{x_2 z_2}$	تناسب مشترك
$\frac{20}{5(3)} = \frac{y_2}{9(2)}$	$y_1 = 20, x_1 = 5, z_1 = 3, x_2 = 9, z_2 = 2$
$20(9)(2) = 5(3)(y_2)$	بالضرب التبادلي
$360 = 15y_2$	بسّط
$24 = y_2$	اقسم كل من الطرفين على 15

تحقق من فهمك

2) إذا كانت r تتغيَّر تغيُّرًا مشتركًا مع v و t ، وكانت $r = 70$ عندما $v = 10$ و $t = 4$ ، فأوجد قيمة r عندما $v = 2$ ، و $t = 8$.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع جلول كتبي

التغيُّر العكسي والتغيُّر المركَّب هناك نوع ثالث من التغيُّر هو **التغيُّر العكسي**، فإذا تغيرت الكميتان عكسيًّا فحاصل ضربهما يساوي ثابتًا هوَ k .

تتغير كميتان موجبتان أو سالبتان معًا عكسيًّا إذا كانت إحداهما تزيد بنقصان الأخرى. وتتغير كميتان إحداهما موجبة والأخرى سالبة عكسيًّا إذا كانت إحداهما تزيد بزيادة الأخرى، فعلى سبيل المثال تتغيَّر السرعة والزمن اللازمان لقطع مسافة ثابتة تغيّرًا عكسيًّا؛ فكلما زادت السرعة قلّ الزمن اللازم لقطع المسافة.

مفهوم أساسي — **التغيُّر العكسي**

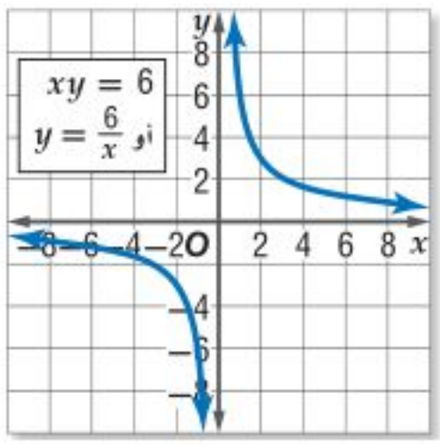
أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: تتغيَّر y عكسيًّا مع x إذا وجد عدد $k \neq 0$ ، بحيث $xy = k$ أو $y = \frac{k}{x}$، حيث $x \neq 0$ و $y \neq 0$

مثال: إذا كانت $xy = 12$ ، فإن y تتغير عكسيًّا مع x. فكلما زادت x نقصت y والعكس، فعندما $x = 2$ فإن $y = 6$، بينما عندما $x = 3$ فإن $y = 4$.

إذا كانت y تتغيَّر مع x كما في الجدول المجاور، فإنك تلاحظ أن قيم x تزداد بتناقص قيم y، وهما كميتان موجبتان؛ لذا فإن y تتغير تغيُّرًا عكسيًّا مع x بحيث $xy = 6$ أو $y = \frac{6}{x}$، ويكون التمثيل البياني لهذه المعادلة كما في الشكل المجاور.

x	6	3	2
y	1	2	3



وبما أن k عدد موجب فإن قيم y تتناقص بازدياد قيم x .

لاحظ أن التمثيل البياني للتغيُّر العكسي يشبه التمثيل البياني لدالّة المقلوب تمامًا.

يمكنك استعمال التناسب لحل مسائل تتضمن تغيّرًا عكسيًّا مُعطىً فيها بعض القيم، والتناسب الآتي هو أحد التناسبات التي يمكن تكوينها.

$$x_1 y_1 = k \text{ ، } x_2 y_2 = k$$

$$x_1 y_1 = x_2 y_2$$

ومن ذلك نجد أنَّ $\frac{x_1}{y_2} = \frac{x_2}{y_1}$ (يسمى هذا التناسب تناسبًا عكسيًّا؛ أي أن y تتناسب عكسيًّا مع x).

مثال 3 — **التغيُّر العكسي**

إذا كانت a تتغيَّر عكسيًّا مع b وكانت $a = 28$ عندما $b = 2$، فأوجد قيمة a عندما $b = 10$.

استعمل تناسبًا يربط بين القيم.

$a_1 b_1 = a_2 b_2$	تناسب عكسي
$28(2) = 10(a_2)$	$a_1 = 28, b_1 = 2, b_2 = 10$
$56 = 10(a_2)$	بسّط
$5\frac{3}{5} = a_2$	اقسم كلًّا من الطرفين على 10

تحقق من فهمك

3) إذا كانت x تتغيَّر عكسيًّا مع y ، وكانت $x = 24$ عندما $y = -4$ ، فأوجد قيمة x عندما $y = 12$.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

يُستعمل التغيُّر العكسي في كثيرٍ من التطبيقات الحياتية.

مثال 4 من واقع الحياة — كتابة التغير العكسي وحله

موجات الصوت: يتغيَّر التردد الناتج عن اهتزاز سلك مشدود f عكسيًّا مع طول السلك l. فإذا كان التردد الناتج عن اهتزاز سلك مشدود طوله 10 in يساوي 512 دورة في الثانية، فأوجد تردد سلك مشدود طوله 8 in.

افترض أن $l_2 = 8 , f_1 = 512 , l_1 = 10$. وأوجد قيمة f_2.

$l_1 f_1 = l_2 f_2$	المعادلة الأصلية
$10 \cdot 512 = 8 \cdot f_2$	$f_1 = 512, l_1 = 10, l_2 = 8$
$\frac{5120}{8} = f_2$	اقسم كل من الطرفين على 8
$640 = f_2$	بسّط

إذن تردد السلك يساوي 640 دورة في الثانية.

تحقق من فهمك

4) فضاء: يتغيَّر الطول الظاهري لجسم عكسيًّا مع بُعد الناظر إلى الجسم. إذا كان بُعد الأرض عن الشمس 93 مليون ميل تقريبًا، وبُعد المشتري عن الشمس 483.6 مليون ميل، فكم مرة سيبدو طول قطر الشمس أكبر عند النظر إليها من الأرض مقارنة بطول قطرها عند النظر إليها من المشتري؟

هناك نوع رابع من التغيُّر هو **التغيُّر المركّب**، ويحدث عندما تتغيَّر كمية ما طرديًّا أو عكسيًّا أو كليهما معًا مع كميتين أخريين أو أكثر.

إذا كانت y تتغيَّر طرديًّا مع x ، وy تتغيَّر عكسيًّا مع z ، وعلمت بعض القيم، فإنه يمكنك استعمال التناسب لإيجاد القيم الأخرى المجهولة.

$$y_1 = \frac{kx_1}{z_1} \quad , \quad y_2 = \frac{kx_2}{z_2}$$

$$\frac{y_1 z_1}{x_1} = k \qquad \frac{y_2 z_2}{x_2} = k$$

ومن ذلك نجد أن $\frac{y_1 z_1}{x_1} = \frac{y_2 z_2}{x_2}$ (يُسمّى هذا التناسب تناسبًا مركّبا، أي أن y تتناسب طرديًّا مع x وعكسيًّا مع z).

مثال 5 — التغيُّر المركّب

إذا كانت f تتغيَّر طرديًّا مع g وعكسيًّا مع h ، وكانت $g = 24$ عندما $h = 2$ و $f = 6$ ، فأوجد قيمة g عندما $f = 18$ و $h = -3$.

استعمل تناسبًا يربط القيم.

$\frac{f_1 h_1}{g_1} = \frac{f_2 h_2}{g_2}$	تناسب مركب
$\frac{6(2)}{24} = \frac{18(-3)}{g_2}$	$f_1 = 6, g_1 = 24, h_1 = 2, f_2 = 18, h_2 = -3$
$24(18)(-3) = 6(2)(g_2)$	اضرب تبادليًا
$-1296 = 12g_2$	بسّط
$-108 = g_2$	اقسم كلًا من الطرفين على 12

إرشادات للدراسة

التغيُّر المركّب

في العلاقة $y = \frac{kx}{z}$ تظهر الكميات التي تتغيَّر طرديًّا مع y في البسط. أما التي تتغيَّر عكسيًّا فتظهر في المقام.

تحقق من فهمك

5) إذا كانت p تتغيَّر طرديًّا مع r وعكسيًّا مع t ، وكانت $t = 20$ عندما $p = 4$ ، و $r = 2$ ، فأوجد قيمة t عندما $r = 10$ و $p = -5$ ؟

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

تأكد

الأمثلة 3-1

1) إذا كانت y تتغيَّر طرديًّا مع x ، وكانت $y = 12$ عندما $x = 8$، فأوجد قيمة y عندما $x = 14$.

2) إذا كانت y تتغيَّر تغيُّرًا مشتركًا مع x و z، وكانت $y = -50$ عندما $z = 5$ و $x = -10$ ، فأوجد قيمة y عندما $x = 9$ و $z = -3$.

3) إذا كانت y تتغيَّر عكسيًّا مع x ، وكانت $y = -18$ عندما $x = 16$ ، فأوجد قيمة x عندما $y = 9$.

مثال 4

4) **خرائط:** تتناسب المسافات على الخرائط تناسبًا طرديًّا مع المسافات الفعلية على سطح الأرض. إذا كانت مسافة 2 in على إحدى الخرائط تعادل 15 mi على سطح الأرض. وكانت المسافة بين نقطتين تمثلان مدينتين على الخريطة 12 in، فأوجد المسافة الحقيقية بينهما.

مثال 5

5) إذا كانت a تتغيَّر طرديًّا مع b، وعكسيًّا مع c ، وكانت $b = 16$ عندما $c = 2$ و $a = 4$ ، فأوجد قيمة b عندما $a = 8$ و $c = -3$.

تدرب وحل المسائل

مثال 1

إذا كانت x تتغيَّر طرديًّا مع y ، فأوجد قيمة x عندما $y = 8$ في كلٍّ من الحالتين الآتيتين:

6) إذا كانت $x = 6$، عندما $y = 32$.

7) إذا كانت $x = 11$، عندما $y = -3$.

8) **فضاء:** إذا كان وزن جهاز استكشاف على الأرض 360 رطلًا ، ووزنه على سطح القمر 60 رطلًا ، فاكتب معادلة تربط بين وزن جسم w على سطح الأرض ووزنه m على سطح القمر.

مثال 2

إذا كانت a تتغيَّر تغيّرًا مشتركًا مع b و c ، فأوجد قيمة a عندما $b = 4$ و $c = -3$ في كلٍّ من الحالتين الآتيتين:

9) إذا كانت $a = -108$، عندما $b = 2$ و $c = 9$.

10) إذا كانت $a = 24$، عندما $b = 8$ و $c = 12$.

مثال 3

إذا كانت f تتغيَّر عكسيًّا مع g ، فأوجد قيمة f عندما $g = -6$ في كلٍّ من الحالتين الآتيتين:

11) إذا كانت $f = -12$، عندما $g = 19$.

12) إذا كانت $f = 0.6$، عندما $g = -21$.

مثال 4

13) **طيور:** عندما يهاجر سرب من الطيور من مكان إلى آخر كل عام، فإنه يقطع مسافة تتغيَّر طرديًّا مع الزمن الذي يقضيه في الطيران.

a) إذا قطع سرب الطيور مسافة 375 mi في 7.5 h ، فاكتب معادلة تغيُّر طردي تمثل هذا الموقف.

b) إذا قطع سرب الطيور مسافة 3000 mi خلال هجرته، فأوجد عدد ساعات طيرانه.

مثال 5

14) إذا كانت x تتغيَّر طرديًّا مع y ، وعكسيًّا مع z، وكانت $z = 20$ عندما $x = 6$ و $y = 14$ ، فأوجد قيمة z عندما $x = 10$ و $y = -7$.

حدِّد إذا كانت كل علاقة ممثلة في الجداول أدناه تمثل تغيّرًا طرديًّا، أو تغيّرًا عكسيًّا، أو غير ذلك:

15)

x	y
4	12
8	24
16	48
32	96

16)

x	y
8	2
4	4
−2	−8
−8	−2

17)

x	y
2	4
3	9
4	16
5	25

18) إذا كانت x تتغيَّر عكسيًّا مع y، وكانت $x = 16$ عندما $y = 5$ فأوجد قيمة x عندما $y = 20$.

حدِّد إذا كانت المعادلة في كلٍّ مما يأتي تمثل تغيّرًا طرديًّا، أو عكسيًّا، أو مشتركًا، أو مركّبا، ثم أوجد ثابت التغيُّر (التناسب) في كلٍّ منها :

19) $a = 27b$

20) $c = \frac{7}{d}$

21) $-10 = gh$

22) $m = 20cd$

إرشادات للدراسة

التغيُّر الطردي والتغيُّر العكسي

يمكن تحديد نوع التغيُّر من خلال جدول قيم لـ x و y. فإذا كانت $\frac{y}{x}$ تساوي قيمة ثابتة فالتغيُّر طردي. أما إذا كانت xy تساوي قيمة ثابتة فالتغيُّر عكسي.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

23) كيمياء: يتغيَّر حجم غاز معين v طرديًّا مع درجة حرارته t . وعكسيًّا مع ضغطه p حيث $v=\frac{kt}{p}$.

a) هل تمثل المعادلة تغيُّرًا طرديًّا، أم عكسيًّا أم مشتركًا أم مركّبًا؟

b) عينة من الغاز حجمها 8 لترات، ودرجة حرارتها 275° كلڤن ، وضغطها 1.25 وحدة ضغط جوي، تم ضغطها ليصبح حجمها 6 لترات وتسخينها إلى درجة حرارة 300° كلڤن . كم يصبح ضغط الغاز عندئذ؟

24) جاذبية: ينص قانون الجاذبية العام على أن قوة الجذب F بالنيوتن بين أي جسمين تتغيَّر طرديًّا مع حاصل ضرب كتلتيهما بالكيلو جرام m_1 و m_2 ، وعكسيًّا مع مربع المسافة بينهما d بالمتر. وتبين المعادلة $F=\frac{Gm_1m_2}{d^2}$ هذه العلاقة، حيث G ثابت الجاذبية العام، وقيمته $6.67\times10^{-11}\ \text{Nm}^2/\text{kg}^2$.

a) إذا كانت المسافة بين الأرض والقمر $3.84\times10^8\ \text{m}$ تقريبًا، وكتلة القمر $7.36\times10^{22}\ \text{kg}$. وكتلة الأرض $5.97\times10^{24}\ \text{kg}$ ، فما مقدار قوة الجذب التي تؤثر بها كل منهما في الآخر؟

b) إذا كانت المسافة بين الأرض والشمس $1.5\times10^{11}\ \text{m}$تقريبًا، وكتلة الشمس $1.99\times10^{30}\ \text{kg}$ تقريبًا، فما مقدار قوة الجذب التي تؤثر بها كل من الشمس والأرض في الآخر؟

مسائل مهارات التفكير العليا

25) اكتشف الخطأ: يحل كل من يوسف وتركي مسألة عن التغيُّر المركّب، تتغيَّر فيها z طرديًّا مع x وعكسيًّا مع y. أيهما توصل إلى التناسب الصحيح ؟ وضِّح إجابتك.

يوسف

$$z_1=\frac{kx_1}{y_1},\ z_2=\frac{kx_2}{y_2}$$
$$k=\frac{z_1y_1}{x_1},\ k=\frac{z_2y_2}{x_2}$$
$$\frac{z_1y_1}{x_1}=\frac{z_2y_2}{x_2}$$

تركي

$$z_1=\frac{kx_1}{y_1},\ z_2=\frac{kx_2}{y_2}$$
$$k=\frac{z_1x_1}{y_1},\ k=\frac{z_2x_2}{y_2}$$
$$\frac{z_1x_1}{y_1}=\frac{z_2x_2}{y_2}$$

26) تبرير: وضِّح لماذا يعد بعض المختصين في الرياضيات التغيّر المشترك تغيُّرًا مركّبا، ولكنهم لا يعدون التغيُّر المركّب مشتركًا.

27) مسألة مفتوحة: صف ثلاث كميات من واقع الحياة تتغيَّر تغيُّرًا مشتركًا فيما بينها.

28) اكتب: حدِّد أنواع التغيُّرات التي لا يمكن أن يكون الصفر أحد قيمها. وضِّح إجابتك.

تدريب على اختبار

29) إذا كانت a تتغيَّر طرديًّا مع b ، وعكسيًّا مع c ، وكانت $b=15$ عندما $c=2,\ a=4$ فما قيمة b عندما $a=7,\ c=-8$ ؟

A $\frac{-1}{105}$ **C** $\frac{1}{105}$

B -105 **D** 105

30) ما التغيُّر الذي تمثله العلاقة الموضَّحة بالجدول المجاور؟

A طردي **C** مشترك

B عكسي **D** مركّب

x	y
15	5
18	6
21	7
24	8

مراجعة تراكمية

حدِّد خطوط التقارب الرأسية ونقط الانفصال (إن وجدت) في التمثيل البياني لكل دالّة نسبية مما يأتي: (الدرس 4-1)

31) $f(x)=\frac{1}{x^2+5x+6}$ **32)** $f(x)=\frac{x+2}{x^2+3x-4}$ **33)** $f(x)=\frac{x^2+4x+3}{x+3}$

أوجد LCM لكلٍّ ممَّا يأتي: (الدرس 2-1)

34) $a,\ 2a,\ a+1$ **35)** $8,\ 24x,\ 12$ **36)** $x^4,\ 3x^2,\ 2xy$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي
رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

1-6

حل المعادلات والمتباينات النسبية
Solving Rational Equations and Inequalities

فيما سبق:
درست تبسيط عبارات نسبية. الدرس (1-1)

والآن:
- أحل معادلات نسبية.
- أحل متباينات نسبية.

المفردات:
المعادلة النسبية
rational equation
المتباينة النسبية
rational inequality

لماذا؟
يبلغ رسم العضوية في أحد الأندية الرياضية 200 ريال شهريًّا بالإضافة إلى 10 ريالات عند كل زيارة للنادي. فإذا كان أحد الأعضاء يزور النادي x مرة شهريًّا، فإنه سيدفع مبلغًا مقداره $(200+10x)$ ريالًا في الشهر. ويمكن حساب التكلفة الفعلية لكل زيارة للعضو باستعمال العبارة :

$\frac{200+10x}{x}$، حيث x عدد مرات زيارة النادي.

ولحساب عدد مرات زيارة أحد الأعضاء للنادي إذا كانت التكلفة الفعلية للزيارة الواحدة 30 ريالًا، عليك أن تحل المعادلة $\frac{200+10x}{x} = 30$.

حل المعادلات والمتباينات النسبية : تُسمى المعادلة التي تحتوي على عبارة نسبية أو أكثر **معادلة نسبية**، ويكون حل هذه المعادلة عادة أسهل عندما تتخلص من المقامات، وذلك بضرب طرفي المعادلة في LCM لها. ومن الممكن الحصول على حلول دخيلة عند ضرب طرفي المعادلة النسبية في LCM للمقامات؛ لذا فإنه من الضروري التحقق من صحة الحل لاستثناء القيم التي تجعل أحد مقامات المعادلة صفرًا.

مراجعة المفردات
الحل الدخيل
هو الحل الذي لايحقق المعادلة الأصلية.

مثال 1 حل معادلة نسبية

حُلّ المعادلة $\frac{2x}{x+5} - \frac{x^2-x-10}{x^2+8x+15} = \frac{3}{x+3}$.

LCM للمقامات هو $(x+3)(x+5)$.

$\frac{2x}{x+5} - \frac{x^2-x-10}{x^2+8x+15} = \frac{3}{x+3}$	المعادلة الأصلية
$\frac{(x+3)(x+5)(2x)}{x+5} - \frac{(x+3)(x+5)(x^2-x-10)}{x^2+8x+15} = \frac{(x+3)(x+5)3}{x+3}$	اضرب المعادلة في LCM للمقامات
$\frac{(x+3)(\cancel{x+5}^{1})(2x)}{\cancel{x+5}^{1}} - \frac{\cancel{(x+3)}^{1}\cancel{(x+5)}^{1}(x^2-x-10)}{\cancel{x^2+8x+15}^{1}} = \frac{\cancel{(x+3)}^{1}(x+5)3}{\cancel{x+3}^{1}}$	اختصر العوامل المشتركة
$(x+3)(2x) - (x^2-x-10) = 3(x+5)$	بسّط
$2x^2+6x-x^2+x+10 = 3x+15$	خاصية التوزيع
$x^2+7x+10 = 3x+15$	بسّط
$x^2+4x-5 = 0$	اطرح $3x+15$ من كلا الطرفين
$(x+5)(x-1) = 0$	
$x+5=0$ أو $x-1=0$	خاصية الضرب الصفري
$x=-5$ أو $x=1$	

حلول إنجي عوامل
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

تحقق: اختبر $x = -5$:

$$\frac{2x}{x+5} - \frac{x^2 - x - 10}{x^2 + 8x + 15} = \frac{3}{x+3}$$ المعادلة الأصلية

$$\frac{2(-5)}{-5+5} - \frac{(-5)^2 - (-5) - 10}{(-5)^2 + 8(-5) + 15} \stackrel{?}{=} \frac{3}{-5+3}$$ $x = -5$

$$\text{✗} \quad \frac{-10}{0} - \frac{25 + 5 - 10}{25 - 40 + 15} \neq -\frac{3}{2}$$ بسّط

اختبر $x = 1$:

$$\frac{2x}{x+5} - \frac{x^2 - x - 10}{x^2 + 8x + 15} = \frac{3}{x+3}$$ المعادلة الأصلية

$$\frac{2(1)}{1+5} - \frac{1^2 - 1 - 10}{1^2 + 8(1) + 15} \stackrel{?}{=} \frac{3}{1+3}$$ $x = 1$

$$\frac{2}{6} - \frac{-10}{24} \stackrel{?}{=} \frac{3}{4}$$ بسّط

$$\frac{8}{24} + \frac{10}{24} \stackrel{?}{=} \frac{3}{4}$$ وحّد المقامات

$$\text{✓} \quad \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$ بسّط

إذا نتج عن تعويض أحد الحلول صفر في أحد مقامات المعادلة، وجب استثناء هذا الحل. وبما أن $x = -5$ ينتج عن تعويضها في المعادلة صفر في المقام فإنها تُستثنى من الحلول. لذا يكون الحل هو $x = 1$.

تحقق من فهمك

(1A $\frac{5}{y-2} + 2 = \frac{17}{6}$

(1B $\frac{2}{z+1} - \frac{1}{z-1} = \frac{-2}{z^2-1}$

(1C $\frac{7n}{3n+3} - \frac{5}{4n-4} = \frac{3n}{2n+2}$

(1D $\frac{1}{p-2} = \frac{2p+1}{p^2+2p-8} + \frac{2}{p+4}$

يمكنك استعمال المعادلة التي تربط بين المسافة d والسرعة r والزمن t لحل كثير من المعادلات النسبية. وأكثر الأشكال شيوعًا لهذه المعادلة هو $d = rt$. وكذلك يمكنك استعمال الشكلين الآخرين، وهما: $t = \frac{d}{r}$, $r = \frac{d}{t}$.

مثال 2 من واقع الحياة — استعمال المعادلات النسبية في مسائل الحركة

تجديف: **ركب سعيد قاربًا سرعته 6 mi/h في المياه الراكدة وسار به دون توقف مسافة 10 mi؛ نصفها في اتجاه التيار ونصفها الآخر عكسه، فاستغرق زمنًا قدره 3 h، أوجد سرعة التيار.**

افهم: معطيات المسألة هي: سرعة القارب في المياه الراكدة، وكذلك المسافة التي قطعها ذهابًا وإيابًا والزمن المستغرق في قطع المسافة كاملةً. والمطلوب إيجاد سرعة التيار (v).

خطط: المسافة التي قطعها سعيد هي 5 mi في اتجاه التيار، و 5 mi عكس اتجاه التيار.
والمعادلة التي تُستعمل للحل هي:
$d = rt$ أو $t = \frac{d}{r}$ ، حيث r السرعة، d المسافة، t الزمن.

الزمن الكلي	الزمن مع اتجاه التيار	الزمن عكس اتجاه التيار
3h	$\frac{5}{6+v}$	$\frac{5}{6-v}$

إرشادات للدراسة

مسائل المسافة

عندما تتضمن مسائل المسافة الذهاب والعودة، فإن المسافة في الذهاب تساوي المسافة في العودة، ما لم يذكر خلاف ذلك.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

حل:

اكتب المعادلة $\frac{5}{6+v}+\frac{5}{6-v}=3$

اضرب كل من الطرفين في LCM للمقامات $(6+v)(6-v)$ $(6+v)(6-v)\frac{5}{6+v}+(6+v)(6-v)\frac{5}{6-v}=(6+v)(6-v)(3)$

اختصر العوامل المشتركة $(\cancel{6+v}^{1})(6-v)\frac{5}{\cancel{6+v}^{1}}+(6+v)(\cancel{6-v}^{1})\frac{5}{\cancel{6-v}^{1}}=(6+v)(6-v)(3)$

بسّط $(6-v)(5)+(6+v)(5)=(36-v^2)(3)$

خاصية التوزيع $30-5v+30+5v=108-3v^2$

بسّط $60=108-3v^2$

اطرح 60 من كلا الطرفين $0=-3v^2+48$

حلّل إلى عوامل $0=-3(v+4)(v-4)$

اقسم كل من الطرفين على -3 $0=(v+4)(v-4)$

خاصية الضرب الصفري (مرفوض؛ لأن السرعة لا يمكن أن تكون سالبة) $v=-4$ أو $v=4$

تحقق:

المعادلة الأصلية $\frac{5}{6+v}+\frac{5}{6-v}=3$

$v=4$ $\frac{5}{6+4}+\frac{5}{6-4}\stackrel{?}{=}3$

بسّط $\frac{5}{10}+\frac{5}{2}\stackrel{?}{=}3$

بسّط ووَحّد المقامات ✓ $\frac{1}{2}+\frac{5}{2}=\frac{6}{2}$

لذا؛ فإن سرعة التيار هي 4 mi/h .

تحقق من فهمك

2) **طيران:** إذا قطعت طائرة مسافة 2368 mi في رحلة ذهاب وعودة دون توقف في 7h، وكانت سرعة الريح 20 mi/h ، فما سرعة الطائرة في الريح الساكنة؟

يمكنك حل المسائل الحياتية التي تتعلق بالأعمال عادة باستعمال معادلات نسبية.

مثال 3 من واقع الحياة

استعمال المعادلات والمتباينات النسبية في مسائل العمل

خدمة المجتمع: يقوم طلاب الصفين الأول الثانوي والثاني الثانوي في أحد الأحياء بحملة توعية بخطر النفايات البلاستيكية لسكان الحي. فإذا علمت أن هذا العمل يحتاج إلى 24 ساعة إذا قام به طلاب الصف الثاني الثانوي، و18 ساعة عمل إذا قام به طلاب الصفين معًا، فكم ساعةً يحتاج طلاب الصف الأول الثانوي للقيام بالعمل وحدهم؟

افهم: المعطيات هي: الزمن الذي يحتاج إليه طلاب الصف الثاني الثانوي لإتمام العمل، والزمن الذي يحتاج إليه طلاب الصفين معًا لإتمام العمل. والمطلوب إيجاد الزمن الذي يحتاج إليه طلاب الصف الأول الثانوي لإتمام العمل.

خطط: يستطيع طلاب الصف الثاني الثانوي إتمام العمل في 24h. وعليه فإن معدل عملهم يساوي $\frac{1}{24}$ من العمل في الساعة الواحدة.

في حين يبلغ معدل عمل طلاب الصف الأول الثانوي $\frac{1}{j}$ من العمل في الساعة الواحدة، أما معدل عمل طلاب الصفين معًا فهو $\frac{1}{18}$ من العمل في الساعة الواحدة.

معدل عمل طلاب الصف الأول الثانوي	معدل عمل طلاب الصف الثاني الثانوي	معدل عمل طلاب الصفين معًا
$\frac{1}{j}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{18}$

وزارة التعليم Ministry of Education 2021 - 1443

الربط بالحياة

تمثل المخلفات البلاستيكية خطورة عالية وكارثة بيئية وصحية على الإنسان والحياة البرية والبحرية؛ لما بها من مواد كيميائية لا تتحلل في التربة، وتشمل العلب البلاستيكية والأطعمة والمنظفات والمشروبات الغازية وغيرها.
وتستهلك الدول العربية منها 50 مليار علبة سنويًا.

إرشادات للدراسة

جداول

تكوين الجداول - كما في المثال 3 - يفيد في تنظيم وحل المسائل بشكل عام.

موقع حلول كتبي

حُل:

$$\frac{1}{24} + \frac{1}{j} = \frac{1}{18}$$ اكتب المعادلة

$$72j\,\frac{1}{24} + 72j\,\frac{1}{j} = 72j\,\frac{1}{18}$$ اضرب كل من الطرفين في LCM للمقامات وهو $72j$

$$\cancel{72}^{3}j\,\frac{1}{\cancel{24}_{1}} + 72\cancel{j}^{1}\,\frac{1}{\cancel{j}_{1}} = \cancel{72}^{4}j\,\frac{1}{\cancel{18}_{1}}$$ اختصر العوامل المشتركة

$$3j + 72 = 4j$$ بسّط

$$72 = j$$ اطرح $3j$ من كلا الطرفين

تحقق:

$$\frac{1}{24} + \frac{1}{j} = \frac{1}{18}$$ المعادلة الأصلية

$$\frac{1}{24} + \frac{1}{72} \stackrel{?}{=} \frac{1}{18}$$ $j = 72$

$$\frac{3}{72} + \frac{1}{72} \stackrel{?}{=} \frac{4}{72}$$ LCM للمقامات هو 72

$$\frac{4}{72} = \frac{4}{72}\ \checkmark$$ بسّط

يحتاج طلاب الصف الأول الثانوي إلى 72h لإتمام العمل وحدهم.

تحقق من فهمك

3) طلاء: يحتاج ناصر ومحمد إلى 6h لطلاء سور إذا عملا معًا، ويحتاج ناصر إلى 10h للقيام بالعمل وحده. فكم ساعة يحتاج محمد إذا قام بالعمل وحده؟

حل المتباينات النسبية: **المتباينات النسبية**، هي المتباينات التي تحتوي على عبارة نسبية أو أكثر. ولحلها اتبع الخطوات الآتية:

مفهوم أساسي — حل المتباينات النسبية

أضف مطويتك

الخطوة 1: حدّد القيم المستثناة وهي القيم التي يكون عندها المقام صفرًا.

الخطوة 2: حل المعادلة المرتبطة والتي تحصل عليها بوضع رمز المساواة بدلًا من رمز التباين في المتباينة.

الخطوة 3: استعمل القيم التي حصلت عليها في الخطوتين السابقتين؛ لتقسيم خط الأعداد إلى فترات.

الخطوة 4: اختبر قيمة من كل فترة لتحديد الفترات التي تحقق أعدادها المتباينة.

مثال 4 — حل متباينة نسبية

حل المتباينة النسبية $\frac{x}{3} - \frac{1}{x-2} < \frac{x+1}{4}$.

الخطوة 1: القيمة المستثناة في هذه المتباينة هي 2.

الخطوة 2: حل المعادلة المرتبطة:

$$\frac{x}{3} - \frac{1}{x-2} = \frac{x+1}{4}$$ المعادلة المرتبطة

$$12(x-2)\,\frac{x}{\cancel{3}_{1}} - 12\cancel{(x-2)}^{1}\,\frac{1}{\cancel{x-2}_{1}} = \cancel{12}^{3}(x-2)\,\frac{x+1}{\cancel{4}_{1}}$$ اضرب في LCM للمقامات: $12(x-2)$

$$4x^2 - 8x - 12 = 3x^2 - 3x - 6$$ خاصية التوزيع

$$x^2 - 5x - 6 = 0$$ اطرح $3x^2 - 3x - 6$ من كلا الطرفين

$$(x-6)(x+1) = 0$$ حلّل إلى عوامل

$$x = 6 \text{ أو } x = -1$$ خاصية الضرب الصفري

إرشادات للدراسة

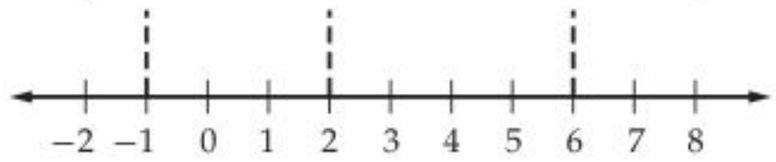
تقسيم خط الأعداد

من الضروري استعمال القيم المستثناة وحلول المعادلة المرتبطة جميعها عند تقسيم خط الأعداد إلى فترات.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

الخطوة 3: ارسم خطًّا رأسيًّا عند القيمة المستثناة، وعند حلّي المعادلة وذلك لتقسيم خط الأعداد إلى فترات.



الخطوة 4: اختبر قيمة من كل فترة لتحديد ما إذا كانت الأعداد في الفترة تحقق المتباينة.

اختبر $x = -3$	اختبر $x = 0$	اختبر $x = 4$	اختبر $x = 8$
$\frac{-3}{3} - \frac{1}{-3-2} \stackrel{?}{<} \frac{-3+1}{4}$	$\frac{0}{3} - \frac{1}{0-2} \stackrel{?}{<} \frac{0+1}{4}$	$\frac{4}{3} - \frac{1}{4-2} \stackrel{?}{<} \frac{4+1}{4}$	$\frac{8}{3} - \frac{1}{8-2} \stackrel{?}{<} \frac{8+1}{4}$
$-1 + \frac{1}{5} \stackrel{?}{<} -\frac{2}{4}$	$0 + \frac{1}{2} \stackrel{?}{<} \frac{1}{4}$	$\frac{4}{3} - \frac{1}{2} \stackrel{?}{<} \frac{5}{4}$	$\frac{32}{12} - \frac{2}{12} \stackrel{?}{<} \frac{27}{12}$
✓ $-\frac{4}{5} < -\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \not< \frac{1}{4}$	✓ $\frac{5}{6} < \frac{5}{4}$	$\frac{30}{12} \not< \frac{27}{12}$

الجملة صحيحة عندما $x = 4, x = -3$؛ لذا فإن الحل هو $x < -1$ أو $2 < x < 6$.

تحقق من فهمك

(4A $\frac{5}{x} + \frac{6}{5x} > \frac{2}{3}$

(4B $\frac{4}{3x} + \frac{7}{x} < \frac{5}{9}$

تأكـد

مثال 1 حُلَّ كلَّ معادلة ممَّا يأتي:

(1 $\frac{4}{7} + \frac{3}{x-3} = \frac{53}{56}$

(2 $\frac{7}{3} - \frac{3}{x-5} = \frac{19}{12}$

(3 $\frac{8}{x-5} - \frac{9}{x-4} = \frac{5}{x^2-9x+20}$

(4 $\frac{5}{x+2} - \frac{3}{x-2} = \frac{12}{x^2-4}$

مثال 2

(5 مسافة: قطع وليد مسافة 40 km ذهابًا وعودة مستعملًا دراجته التي سرعتها 11.5 km/h عندما تكون الريح ساكنة، فإذا سار في اتجاه الريح زمنًا قدره ساعة و 20 دقيقة، وساعتان ونصف الساعة عكس اتجاه الريح.

a) اكتب عبارة تمثل الزمن الذي استغرقه أثناء سيره في اتجاه الريح.

b) اكتب عبارة تمثل الزمن الذي استغرقه أثناء سيره عكس اتجاه الريح.

c) اكتب معادلة نسبية وحلها لإيجاد سرعة الريح.

مثال 3

(6 تبليط: يعمل كلٌّ من أحمد وعلي في التبليط، إذا كان أحمد يحتاج إلى 6 أيام لتبليط فناء منزل وحده، في حين يحتاج علي إلى 5 أيام للقيام بالعمل نفسه. فكم يومًا يحتاجان إليه إذا عملا معًا في تبليط هذا الفناء؟

مثال 4 حُلَّ كلَّ متباينة مما يأتي:

(7 $3 - \frac{4}{x} > \frac{5}{4x}$

(8 $\frac{x-2}{x+2} + \frac{1}{x-2} > \frac{x-4}{x-2}$

(9 $\frac{3}{4} - \frac{1}{x-3} > \frac{x}{x+4}$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 حُلَّ كلَّ معادلة ممَّا يأتي:

(10 $\frac{9}{x-7} - \frac{7}{x-6} = \frac{13}{x^2-13x+42}$

(11 $\frac{2}{y-5} + \frac{y-1}{2y+1} = \frac{2}{2y^2-9y-5}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

المثالان 2, 3

12) بناء: تحتاج مجموعة من العمال إلى 12 يومًا لبناء مرآب سيارات، في حين تحتاج مجموعة أخرى إلى 16 يومًا لإنجاز العمل نفسه، فكم تحتاج المجموعتان معًا لبناء المرآب نفسه؟

13) طيران: سارت طائرة مسافة معينة في عكس اتجاه الريح في 20 h ، واحتاجت إلى 16 h لقطع المسافة نفسها في رحلة العودة، ولكن في اتجاه الريح. إذا كانت سرعة الطائرة في أثناء الريح الساكنة 500 mi/h ، فما سرعة الريح خلال الرحلة؟

مثال 4

14) حُلّ المتباينة: $\frac{3}{5x}+\frac{1}{6x}>\frac{2}{3}$.

15) تمثيلات متعددة: افترض أن $\frac{2}{x-3}+\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x-3}$.

a) جبريًا: حُلّ هذه المعادلة، وهل يوجد حل دخيل؟

b) بيانيًا: مثّل: $y_2=\frac{x-1}{x-3}$ ، $y_1=\frac{2}{x-3}+\frac{1}{x}$ بيانيًّا على المستوى الإحداثي نفسه، حيث $0<x<5$.

c) تحليليًا: ما قيمة (قيم) x التي يتقاطع عندها التمثيلان البيانيان؟ وهل يتقاطعان عند الحل الدخيل للمعادلة الأصلية؟

d) لفظيًّا: استعمل المعلومات التي حصلت عليها في الفرع(c) ؛ لتصف كيف يمكنك استعمال التمثيل البياني للمعادلة لتحديد ما إذا كان أحد الحلول حلًّا دخيلًا.

16) حُلّ المعادلة: $\frac{2}{y+3}-\frac{3}{4-y}=\frac{2y-2}{y^2-y-12}$ ، وتحقق من صحة حلك.

مسائل مهارات التفكير العليا

17) مسألة مفتوحة: أعط مثالًا على معادلة نسبية يمكن حلُّها بضرب طرفَي المعادلة في $4(x+3)(x-4)$.

18) تحدٍّ: حُلّ المعادلة $\frac{1+\frac{9}{x}+\frac{20}{x^2}}{1-\frac{25}{x^2}}=\frac{x+4}{x-5}$

19) تبرير: وضِّح لماذا يجب التحقق من حلول المعادلة النسبية.

20) اكتب: عند استعمال تطبيق القوائم وجداول البيانات في الحاسبة البيانية لاستكشاف الدالّة: $f(x)=\frac{1}{x^2-x-6}$ ، فإن الحاسبة البيانية تعطي خطأ عند القيمتين $x=-2$ و $x=3$. وضِّح ماذا يعني ذلك؟

تدريب على اختبار

21) ما حل المعادلة: $\frac{11}{a+2}-\frac{10}{a+5}=\frac{36}{a^2+7a+10}$ ؟

A -1 **B** $-\frac{1}{2}$ **C** $\frac{1}{2}$ **D** 1

22) ما قيمة x في المعادلة $\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{x-1}{2}\right)=4$ ؟

A -7 **B** $-\frac{1}{2}$ **C** $-\frac{1}{7}$ **D** 7

مراجعة تراكمية

23) حدِّد إذا كانت العلاقة المجاورة تمثل تغيّرًا طرديًّا، أم تغيرًا عكسيًّا، أم غير ذلك: (الدرس 5-1)

x	14	28	56	112
y	3	1.5	0.75	0.375

24) مثِّل الدالّة $f(x)=\frac{x+4}{x^2+7x+12}$ بيانيًّا. (الدرس 4-1)

25) اكتب الحدود الثلاثة التالية في المتتابعة: 2, 8, 14, 20, ... (مهارة سابقة)

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي
رابط الموقع الرسمي
www.ien.edu.sa

توسع 1-6

معمل الحاسبة البيانية

حلُّ المعادلات والمتباينات النسبية
Solving Rational Equations and Inequalities

الهدف

أستعمل الحاسبة البيانية TI-nspire لأحلَّ معادلات ومتباينات نسبية بيانيًا أو باستعمال تطبيق القوائم وجداول البيانات.

يمكنك استعمال الحاسبة البيانية TI-nspire لحلِّ معادلات نسبية باستعمال التمثيل البياني أو باستعمال تطبيق القوائم وجداول البيانات.

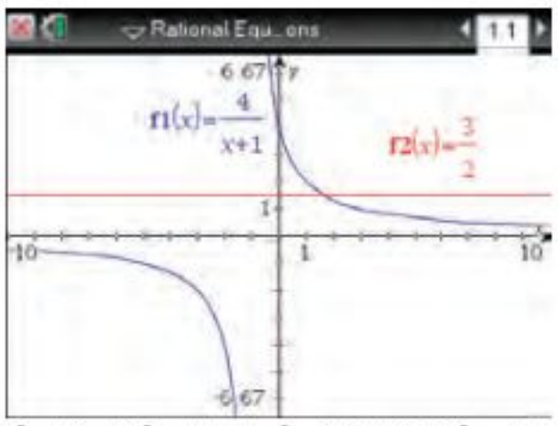
نشاط 1 معادلة نسبية

حُلَّ المعادلة $\frac{4}{x+1}=\frac{3}{2}$.

مثِّل طرفَي المعادلة النسبية بيانيًّا، ثم حدّد نقاط التقاطع.

الخطوة 1 مثّل طرفَي المعادلة بيانيًّا.

مثّل طرفَي المعادلة بيانيًّا كدالّتين مستقلتين، بأن تدخل $\frac{4}{x+1}$ في f1 ، و $\frac{3}{2}$ في f2، ثم مثّل المعادلتين بيانيًّا، وذلك بالضغط على مفتاح (on)، ومن الشاشة الظاهرة اختر 1 مستند جديد، ثم اختر 2 إضافة تطبيق الرسوم البيانية واختر (ctrl) (÷)، ثم اكتب $\frac{4}{x+1}$ واضغط (enter)، ثم اضغط المفاتيح (ctrl) (÷) (tab) واكتب $\frac{3}{2}$ واضغط (enter)

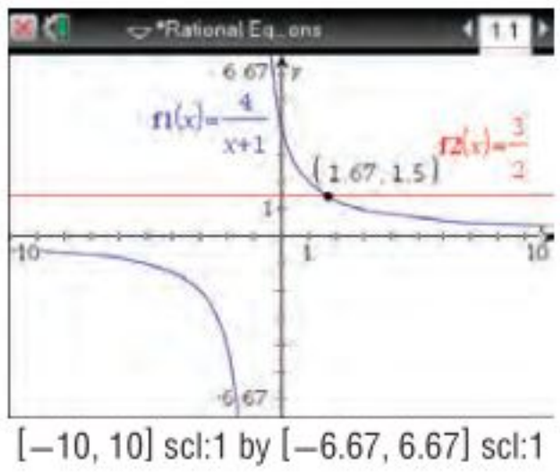


[−10, 10] scl:1 by [−6.67, 6.67] scl:1

الخطوة 2 أوجد نقاط التقاطع لإيجاد الحلِّ.

تمكِّنك ميزة نقاط التقاطع في قائمة تحليل الرسم البياني من تقدير الزوج المرتَّب الذي يمثِّل نقطة التقاطع.

اضغط على (menu) ثم اختر منها 6 تحليل الرسم البياني، ثم اختر 4 نقاط التقاطع، وقم بالضغط على أيِّ نقطة على الشاشة وحرّك المؤشر مرورًا بنقطة التقاطع، فتظهر نقطة التقاطع (1.5 ,1.67).

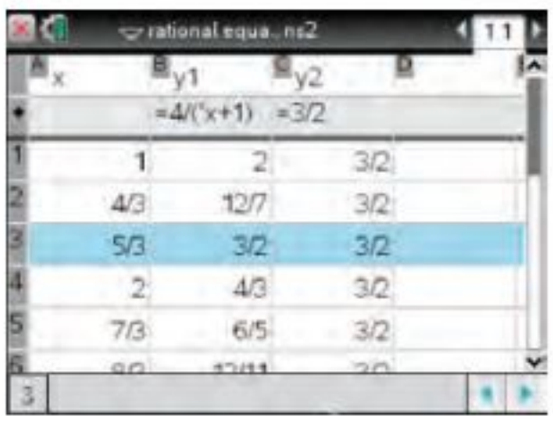


[−10, 10] scl:1 by [−6.67, 6.67] scl:1

أي أن الحل هو $x = 1.67 \approx \frac{5}{3}$.

الخطوة 3 استعمال تطبيق القوائم وجداول البيانات

تحقَّق من صحَّة حلِّك باستعمال تطبيق القوائم وجداول البيانات. اعمل جدولًا يبيِّن قيم x، على أن تتزايد القيم بمقدار $\frac{1}{3}$ كلَّ مرَّة، وذلك بالضغط على مفتاح (on)، ومن الشاشة الظاهرة اختر 1 مستند جديد ثم اختر 4 إضافة تطبيق القوائم وجداول البيانات، اكتب x في العمود الأول، واكتب قيم x ابتداءً من 1 وبزيادة قدرها $\frac{1}{3}$ (لأن الحلّ الذي سنتحقَّق منه هو $x = \frac{5}{3}$)، واكتب $y_1 = \frac{4}{x+1}$ في العمود الثاني، و $y_2 = \frac{3}{2}$ في العمود الثالث، ثم اضغط (enter) واختر مرجع المتغير، فتظهر الشاشة المجاورة.



يبيِّن الجدول قيم x وقيم y المناظرة لها لكلِّ تمثيل بياني. فعندما $x = \frac{5}{3}$، يكون للدالّتين القيمة نفسها، وهي $\frac{3}{2}$، وهذا يعني أن حلَّ المعادلة هو $\frac{5}{3} \approx 1.67$.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

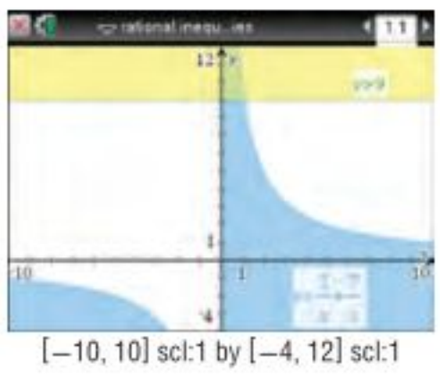
يمكنك استعمال الخطوات الآتية لحلِّ متباينات نسبية مستعملًا الحاسبة البيانية TI-nspire.

نشاط 2 متباينة نسبية

حل المتباينة $\frac{3}{x} + \frac{7}{x} > 9$.

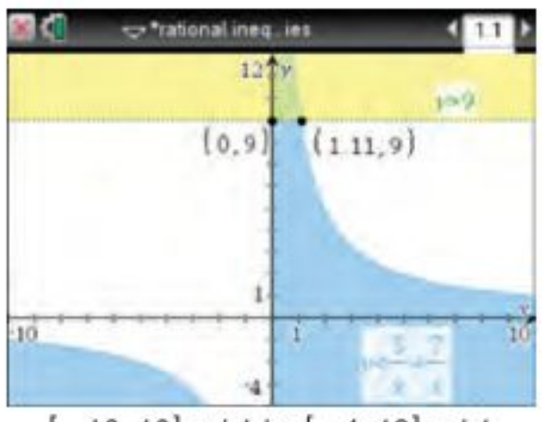
الخطوة 1 مثِّل المتباينتين

أعد كتابة المسألة على صورة نظام من متباينتين؛ المتباينة الأولى هي $y < \frac{3}{x} + \frac{7}{x}$، والثانية $y > 9$، ومثِّلهما بالضغط على مفتاح on، ومن الشاشة الظاهرة اختر 1 مستند جديد، ثم اختر 2 إضافة تطبيق الرسوم البيانية ثم $<$ del، واكتب $\frac{3}{x} + \frac{7}{x}$ ثم اضغط enter، فيظهر تظليل تحت التمثيل البياني. ولتمثيل المتباينة الثانية اضغط على المفاتيح $>$ del tab، واكتب 9، ثم اضغط enter، ولإظهار الجزء المطلوب من التمثيل البياني على الشاشة قم بالضغط على مفتاح menu، ومنها اختر 4 تكبير/ تصغير النافذة ثم 1 إعدادات النافذة لتحديد التدريج المناسب لكلٍّ من x , y، ولاحظ أن منطقة حلِّ المتباينتين قد ظُلِّلت باللون الأخضر.



[−10, 10] scl:1 by [−4, 12] scl:1

الخطوة 2 استعمل نقاط التقاطع لإيجاد الحلِّ.

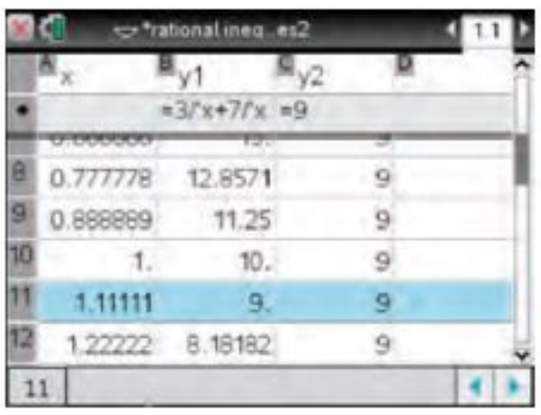


[−10, 10] scl:1 by [−4, 12] scl:1

لإيجاد نقطة (نقاط) تقاطع التمثيلين البيانيين اضغط menu ثم 8 الهندسة ومنها 1 النقاط والمستقيمات، واختر منها 3 نقطة (نقاط) التقاطع واضغط على أحد التمثيلين البيانيين، ثم اضغط على الآخر، فتظهر نقطة التقاطع (1.11 , 9)، كرِّر ذلك مرّة أخرى، واضغط على محور y، والتمثيل البياني لِـ $y = 9$؛ فتظهر نقطة التقاطع (0 , 9) لتتوصَّل إلى أن مجموعة الحلِّ هي $\{x \mid 0 < x < 1.11\}$.

الخطوة 3 استعمل تطبيق القوائم وجداول البيانات

تحقَّق من صحّة حلِّك باستعمال تطبيق القوائم وجداول البيانات.
اعمل جدولًا يبيِّن قيم x على أن تتزايد القيم بمقدار $\frac{1}{9}$ أو 0.111111 كلَّ مرَّة، وذلك بالضغط على مفتاح on، ومن الشاشة الظاهرة اختر 1 مستند جديد ومنها اختر 4 إضافة تطبيق القوائم وجداول البيانات، اكتب x في العمود الأول، واكتب قيم x ابتداءً من 0 وبزيادة قدرها $\frac{1}{9}$ (لأن الحلَّ الذي سنتحقق منه هو $x = 1.11$).
واكتب $y_1 = \frac{3}{x} + \frac{7}{x}$ في العمود الثاني، و $y_2 = 9$ في العمود الثالث.



تنقَّل بالمؤشِّر خلال الجدول. ستلاحظ أن قيم x الأكبر من 0 والأقل من $\frac{10}{9} \approx 1.11$، يكون عندها $y_1 > y_2$.
وهذا يؤكد أن مجموعة حلِّ المتباينة هي: $\{x \mid 0 < x < 1.11\}$

تمارين

حُلَّ كلَّ معادلة أو متباينة مما يأتي:

1) $\frac{1}{x} + \frac{1}{2} = \frac{2}{x}$
2) $\frac{1}{x-4} = \frac{2}{x-2}$
3) $\frac{4}{x} = \frac{6}{x^2}$
4) $\frac{1}{1-x} = 1 - \frac{x}{x-1}$
5) $\frac{1}{x+4} = \frac{2}{x^2+3x-4} - \frac{1}{1-x}$
6) $\frac{1}{x} + \frac{1}{2x} > 5$
7) $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x} < 0$
8) $1 + \frac{5}{x-1} \le 0$
9) $2 + \frac{1}{x-1} \ge 0$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

ملخص الفصل

المفاهيم الأساسية

العبارات النسبية والعمليات عليها (الدرسان 1-2 , 1-1)

- ضرب العبارات النسبية وقسمتها يشبه ضرب الكسور وقسمتها.
- لتبسيط كسر مركب بسّط البسط والمقام كل على حدة، ثم بسّط العبارة الناتجة.
- جمع العبارات النسبية وطرحها يشبه جمع الكسور وطرحها.

دوالّ المقلوب والدوالّ النسبية (الدرسان 1-4 , 1-3)

- دالّة المقلوب هي دالّة على الصورة $f(x)=\frac{1}{a(x)}$، حيث $a(x)$ دالّة خطية و $a(x) \neq 0$.
- الدالّة النسبية هي دالّة على الصورة $f(x)=\frac{a(x)}{b(x)}$، حيث $a(x)$، و$b(x)$ كثيرتا حدود، و $b(x) \neq 0$.
- يوجد لبعض دوالّ المقلوب والدوالّ النسبية مستقيمات يقترب منها التمثيل البياني للدوالّ، تسمى خطوط التقارب.
- أصفار الدالّة النسبية هي القيم التي تجعل $a(x) = 0$.

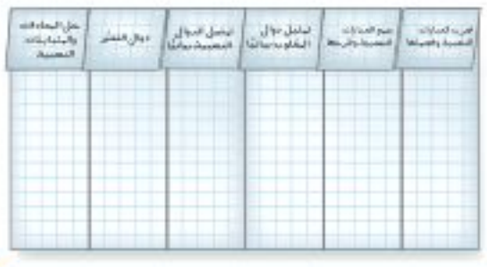
التغيُّر: الطردي، المشترك، العكسي، والمركب (الدرس 1-5)

- التغيُّر الطردي: تتغيّر y طرديًّا مع x، إذا وجد عدد $k \neq 0$ ، بحيث $y = kx$.
- التغيُّر المشترك: تتغيّر y تغيرًا مشتركًا مع x و z ، إذا وجد عدد $k \neq 0$ ، بحيث $y = kxz$.
- التغيُّر العكسي: تتغيّر y عكسيًّا مع x، إذا وجد عدد $k \neq 0$ ، بحيث $xy = k$ ، أو $y = \frac{k}{x}$ حيث $y \neq 0 , x \neq 0$.
- التغيُّر المركب: ويحدث عندما تتغير كمية ما طرديًّا أو عكسيًّا أو كليهما معًا مع كميتين أخريين أو أكثر.

حل المعادلات والمتباينات النسبية (الدرس 1-6)

- لحل المعادلات النسبية تخلص من المقامات بضرب طرفي المعادلة في LCM لها.
- لحل المتباينات النسبية، حل المعادلات المرتبطة، واستعمل القيم التي تحصل عليها لتقسيم خط الأعداد إلى فترات، واختبر قيمة من كل فترة.

المطويات منظم أفكار



تأكد من أن المفاهيم الأساسية مدونة في مطويتك.

المفردات:

العبارة النسبية ص 12
الكسر المركب ص 15
خط التقارب ص 27
خط التقارب الرأسي ص 27
خط التقارب الأفقي ص 27
دالّة المقلوب ص 27
القطع الزائد ص 27
الدالّة النسبية ص 34
نقطة الانفصال ص 36
التغيُّر الطردي ص 41
ثابت التغيُّر ص 41
التغيُّر المشترك ص 42
التغيُّر العكسي ص 43
التغيُّر المركب ص 44
المعادلة النسبية ص 47
المتباينة النسبية ص 50

اختبر مفرداتك

اختر المفردة المناسبة من القائمة السابقة لإكمال كل جملة فيما يأتي:

1) _____ هو عبارة نسبية بسطها ومقامها أو أحدهما عبارة نسبية.

2) إذا تغيَّرت كميتان _____ فإن حاصل ضربهما يساوي ثابتًا k.

3) يعبر عن _____ بمعادلة على الصورة $y = kx$.

4) تُسمى المعادلة التي تحتوي على عبارة نسبية أو أكثر _____ .

5) التمثيل البياني للمعادلة $y = \frac{x}{x+2}$ له _____ عند $x = -2$.

6) يحدث _____ عندما تتغيّر كمية ما طرديًّا مع حاصل ضرب كميتين أخريين أو أكثر.

7) تُسمى النسبة بين كثيرتَي حدود _____.

8) تظهر _____ على شكل فجوة في التمثيل البياني للدالّة؛ لأن الدالّة غير معرّفة عندها.

9) يحدث _____ عندما تتغيّر كمية ما طرديًّا أو عكسيًّا أو كليهما معًا مع كميتين أخريين أو أكثر.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

مراجعة الدروس

1-1 ضرب العبارات النسبية وقسمتها ص 20–12

بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي:

10) $\frac{-16xy}{27z} \cdot \frac{15z^3}{8x^2}$

11) $\frac{x^2-2x-8}{x^2+x-12} \cdot \frac{x^2+2x-15}{x^2+7x+10}$

12) $\frac{x^2-1}{x^2-4} \cdot \frac{x^2-5x-14}{x^2-6x-7}$

13) $\frac{x+y}{15x} \div \frac{x^2-y^2}{3x^2}$

14) $\frac{\frac{x^2+3x-18}{x+4}}{\frac{x^2+7x+6}{x+4}}$

15) هندسة: مثلَّث مساحته $(3x^2+9x-54)\text{cm}^2$، وارتفاعه $(x+6)\text{cm}$. أوجد طول قاعدته، ثم اكتبه في أبسط صورة.

مثال 1

بسّط العبارة: $\frac{4a}{3b} \cdot \frac{9b^4}{2a^2}$.

حلّل واختصر العوامل المشتركة
$$\frac{4a}{3b} \cdot \frac{9b^4}{2a^2} = \frac{\overset{1}{\cancel{2}} \cdot 2 \cdot \overset{1}{\cancel{a}} \cdot \overset{1}{\cancel{3}} \cdot 3 \cdot \overset{1}{\cancel{b}} \cdot b \cdot b \cdot b}{\underset{1}{\cancel{3}} \cdot \underset{1}{\cancel{b}} \cdot \underset{1}{\cancel{2}} \cdot \underset{1}{\cancel{a}} \cdot a}$$

بسّط
$$= \frac{6b^3}{a}$$

مثال 2

بسّط العبارة: $\frac{r^2+5r}{2r} \div \frac{r^2-25}{6r-12}$.

اضرب المقسوم في مقلوب المقسوم عليه
$$\frac{r^2+5r}{2r} \div \frac{r^2-25}{6r-12} = \frac{r^2+5r}{2r} \cdot \frac{6r-12}{r^2-25}$$

حلّل واختصر العوامل المشتركة
$$= \frac{\overset{1}{\cancel{r}(r+5)}}{\underset{1}{\cancel{2r}}} \cdot \frac{\overset{3}{\cancel{6}}(r-2)}{\underset{1}{\cancel{(r+5)}}(r-5)}$$

بسّط
$$= \frac{3(r-2)}{r-5}$$

1-2 جمع العبارات النسبية وطرحها ص 26–21

بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي:

16) $\frac{9}{4ab} + \frac{5a}{6b^2}$

17) $\frac{3}{4x-8} - \frac{x-1}{x^2-4}$

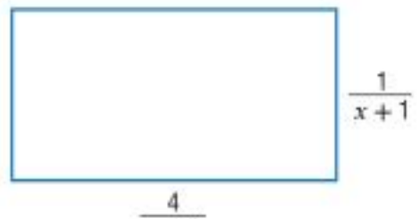
18) $\frac{y}{2x} + \frac{4y}{3x^2} - \frac{5}{6xy^2}$

19) $\frac{2}{x^2-3x-10} - \frac{6}{x^2-8x+15}$

20) $\frac{3}{3x^2+2x-8} + \frac{4x}{2x^2+6x+4}$

21) $\frac{\frac{3}{2x+3} - \frac{x}{x+1}}{\frac{2x}{x+1} + \frac{5}{2x+3}}$

22) هندسة: أوجد محيط المستطيل المرسوم أدناه ، ثم اكتبه في أبسط صورة.



مثال 3

بسّط العبارة: $\frac{3a}{a^2-4} - \frac{2}{a-2}$.

حلّل المقام a^2-4
$$\frac{3a}{a^2-4} - \frac{2}{a-2} = \frac{3a}{(a-2)(a+2)} - \frac{2}{a-2}$$

وحّد المقامين
$$= \frac{3a}{(a-2)(a+2)} - \frac{2(a+2)}{(a-2)(a+2)}$$

اطرح البسطين
$$= \frac{3a-2(a+2)}{(a-2)(a+2)}$$

خاصية التوزيع
$$= \frac{3a-2a-4}{(a-2)(a+2)}$$

بسّط
$$= \frac{a-4}{(a-2)(a+2)}$$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع
حلول كتبي

1-3 تمثيل دوالّ المقلوب بيانيًّا ص 32–27

مثِّل كلَّ دالّة ممَّا يأتي بيانيًّا، وحدد مجال ومدى كلٍّ منها:

23) $f(x) = \frac{10}{x}$

24) $f(x) = -\frac{12}{x} + 2$

25) $f(x) = \frac{3}{x+5}$

26) $f(x) = \frac{6}{x-9}$

27) $f(x) = \frac{7}{x-2} + 3$

28) $f(x) = -\frac{4}{x+4} - 8$

29) تشجير: يقوم طلاب الصف الثاني الثانوي بزراعة 28 شجرة ضمن حملة للحفاظ على البيئة. ويعتمد عدد الأشجار التي يزرعها كل طالب على عدد طلاب الصف.

a) اكتب دالّة تمثل هذا الموقف.

b) مثّل هذه الدالّة بيانيًّا.

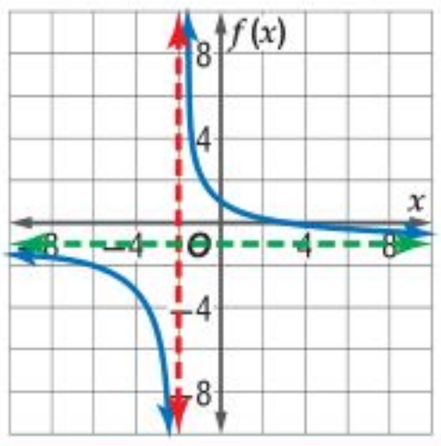
مثال 4

مثّل الدالّة $f(x) = \frac{3}{x+2} - 1$ بيانيًّا، وحدِّد مجالها ومداها.

بما أن $a = 3$: إذن يتسع التمثيل البياني للدالّة الأم رأسيًّا.

ثم $h = -2$: تعني إزاحة التمثيل البياني إلى اليسار وحدتين. وَيوجد خط تقارب رأسي عند $x = -2$.

وَ $k = -1$: تعني إزاحة التمثيل البياني إلى أسفل بمقدار وحدة. وَ يوجد خط تقارب أفقي عند $y = -1$.



المجال: $\{x \mid x \neq -2\}$

المدى: $\{f(x) \mid f(x) \neq -1\}$

1-4 تمثيل الدوالّ النسبية بيانيًّا ص 39–34

أوجد معادلات خطوط التقارب الرأسية، ونقط الانفصال (إن وجدت) للتمثيل البياني لكلِّ دالّة مما يأتي:

30) $f(x) = \frac{3}{x^2 + 4x}$

31) $f(x) = \frac{x+2}{x^2 + 6x + 8}$

32) $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x - 24}$

مثِّل كلَّ دالّة ممَّا يأتي بيانيًّا:

33) $f(x) = \frac{x+2}{(x+5)^2}$

34) $f(x) = \frac{x}{x+1}$

35) $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 4}{x+2}$

36) $f(x) = \frac{x-1}{x^2 + 5x + 6}$

37) مبيعات: يبيع عليٌّ اشتراكات في إحدى الصحف إلى مؤسسات إحدى المدن. فإذا باع 10 اشتراكات لأول 15 مؤسسة زارها، ثم زار x مؤسسة أخرى وباع لكلٍّ منها اشتراكًا. فيمكن حساب نسبة مبيعاته إلى عدد المؤسسات التي زارها باستعمال الدالّة $P(x) = \frac{10 + x}{15 + x}$.

a) مثّل هذه الدالّة بيانيًّا.

b) ما القيم المنطقية لكلٍّ من المجال والمدى في سياق المسألة؟

مثال 5

أوجد معادلات خطوط التقارب الرأسية، ونقط الانفصال (إن وجدت) للتمثيل البياني للدالّة $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x - 3}$.

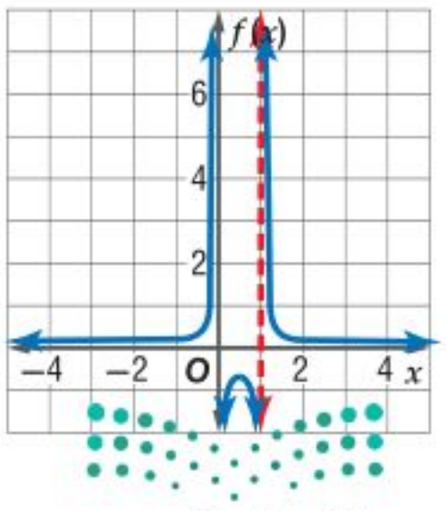
$$\frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x - 3} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+3)}$$

الدالّة غير معرّفة عندما $x = 1$، وعندما $x = -3$.

وبما أن $\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+3)} = \frac{x+1}{x+3}$، فإن $x = -3$ هي معادلة خط التقارب الرأسي وتوجد نقطة انفصال عند $x = 1$.

مثال 6

مثّل الدالّة: $f(x) = \frac{1}{6x(x-1)}$ بيانيًّا.



الدالّة غير معرفة عند $x = 0$، وعند $x = 1$.

وبما أن الدالّة في أبسط صورة، فإن $x = 0$، و $x = 1$ خطَّا تقارب رأسيَّان للدالّة.

ارسم الخطين والدالّة بيانيًّا على المستوى الإحداثي نفسه.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

1-5 دوالّ التغيُّر ص 41-46

38) إذا كانت a تتغيّر طرديًّا مع b ، وكانت $b = 18$ عندما $a = 27$ فأوجد قيمة a عندما $b = 10$.

39) إذا كانت y تتغيّر عكسيًّا مع x، وكانت $y = 15$ عندما $x = 3.5$ ، فأوجد قيمة y عندما $x = -5$.

40) إذا كانت y تتغيّر عكسيًّا مع x، وكانت $y = -3$ عندما $x = 9$، فأوجد قيمة y عندما $x = 81$

41) إذا كانت y تتغيّر تغيّرًا مشتركًا مع x و z ، وكانت $x = 8$، و $z = 3$ عندما $y = 72$ ، فأوجد قيمة y عندما $x = -2$ و $z = -5$.

42) إذا كانت x تتغيّر تغيّرًا طرديًّا مع y وعكسيًّا مع r، وكانت $y = 6$، عندما $r = 4$ و $x = 12$، فأوجد قيمة y عندما $x = 8$ و $r = 10$.

43) **مهن:** يتغيّر أجر أحد العمال طرديًّا مع عدد ساعات عمله، فإذا تقاضى 120 ريالًا مقابل 8 h، فكم ريالًا يتقاضى إذا عمل 5 h؟

مثال 7

إذا كانت y تتغيّر عكسيًّا مع x ، وكانت $x = 24$ عندما $y = -8$، فأوجد قيمة x عندما $y = 15$.

$x_1 y_1 = x_2 y_2$	تناسب عكسي
$24(-8) = x_2 \times 15$	$x_1 = 24 , y_1 = -8 , y_2 = 15$
$-192 = 15x_2$	بسّط
$-12\frac{4}{5} = x_2$	اقسم كلًا من الطرفين على 15

عندما تكون $y = 15$ ، فإن قيمة x هي $-12\frac{4}{5}$.

1-6 حل المعادلات والمتباينات النسبية ص 47-52

حُلّ كل معادلة أو متباينة مما يأتي:

44) $\frac{1}{3} + \frac{4}{x-2} = 6$

45) $\frac{6}{x+5} - \frac{3}{x-3} = \frac{6}{x^2+2x-15}$

46) $\frac{2}{x^2-9} = \frac{3}{x^2-2x-3}$

47) $\frac{4}{2x-3} + \frac{x}{x+1} = \frac{-8x}{2x^2-x-3}$

48) $\frac{x}{x+4} - \frac{28}{x^2+x-12} = \frac{1}{x-3}$

49) $\frac{x}{2} + \frac{1}{x-1} < \frac{x}{4}$

50) $\frac{1}{2x} = \frac{1}{3}$

51) **زراعة:** يستطيع سعيد وحده زراعة إحدى الحدائق في 3 h، في حين يستطيع عليٌّ زراعتها في 4 h . فكم ساعة يحتاجان إليها إذا زرعا الحديقة معًا؟

مثال 8

حُلّ المعادلة $\frac{3}{x+2} + \frac{1}{x} = 0$ ، وتحقق من صحة حلِّك.

LCM للمقامات هو $x(x+2)$.

$$\frac{3}{x+2} + \frac{1}{x} = 0$$
$$x(x+2)\left(\frac{3}{x+2} + \frac{1}{x}\right) = x(x+2)(0)$$
$$x(x+2)\left(\frac{3}{x+2}\right) + x(x+2)\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$
$$3(x) + 1(x+2) = 0$$
$$3x + x + 2 = 0$$
$$4x + 2 = 0$$
$$4x = -2$$
$$x = -\frac{1}{2}$$

تحقق:

$$\frac{3}{x+2} + \frac{1}{x} = 0$$
$$\frac{3}{-\frac{1}{2}+2} + \frac{1}{(-\frac{1}{2})} \stackrel{?}{=} 0$$
$$\frac{3}{\frac{3}{2}} - 2 \stackrel{?}{=} 0$$
$$2-2 = 0 \quad ✓$$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

اختبار الفصل

بسِّط كلَّ عبارة ممَّا يأتي:

1) $\frac{r^2+rt}{2r} \div \frac{r+t}{16r^2}$

2) $\frac{m^2-4}{3m^2} \cdot \frac{6m}{2-m}$

3) $\frac{m^2+m-6}{n^2-9} \div \frac{m-2}{n+3}$

4) $\frac{\frac{x^2+4x+3}{x^2-2x-15}}{\frac{x^2-1}{x^2-x-20}}$

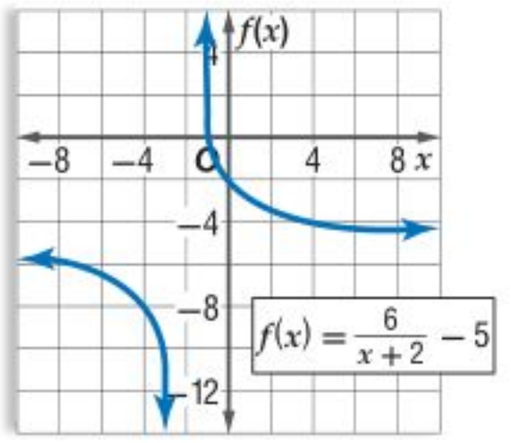
5) $\frac{x+4}{6x+3} + \frac{1}{2x+1}$

6) $\frac{x}{x^2-1} - \frac{3}{2x+2}$

7) $\frac{1}{y} + \frac{2}{7} - \frac{3}{2y^2}$

8) $\frac{2+\frac{1}{x}}{5-\frac{1}{x}}$

9) حدِّد خطوط التقارب، والمجال والمدى للدالّة الممثلة بيانيًّا أدناه.



10) **اختيار من متعدد:** ما معادلة خط التقارب الرأسي للدالّة النسبية $f(x) = \frac{x+1}{x^2+3x+2}$؟

A $x = -2$
B $x = -1$
C $x = 1$
D $x = 2$

مثِّل كلَّ دالّة ممَّا يأتي بيانيًّا:

11) $f(x) = -\frac{8}{x} - 9$

12) $f(x) = \frac{2}{x+4}$

13) $f(x) = \frac{3}{x-1} + 8$

14) $f(x) = \frac{5x}{x+1}$

15) $f(x) = \frac{x}{x-5}$

16) $f(x) = \frac{x^2+5x-6}{x-1}$

أوجد معادلات خطوط التقارب الرأسية، ونقط الانفصال (إن وجدت) للتمثيل البياني لكلِّ دالّة مما يأتي:

17) $f(x) = \frac{x+5}{x^2-2x-35}$.

18) $f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x+3}$.

حُلّ كل معادلة أو متباينة مما يأتي:

19) $\frac{-1}{x+4} = 6 - \frac{x}{x+4}$

20) $\frac{1}{3} = \frac{5}{m+3} + \frac{8}{21}$

21) $7 + \frac{2}{x} < -\frac{5}{x}$

22) $r + \frac{6}{r} < 5$

23) $\frac{6}{7} - \frac{3}{2m-1} \geq \frac{11}{7}$

24) $\frac{r+2}{3r} = \frac{r+4}{r-2} - \frac{2}{3}$

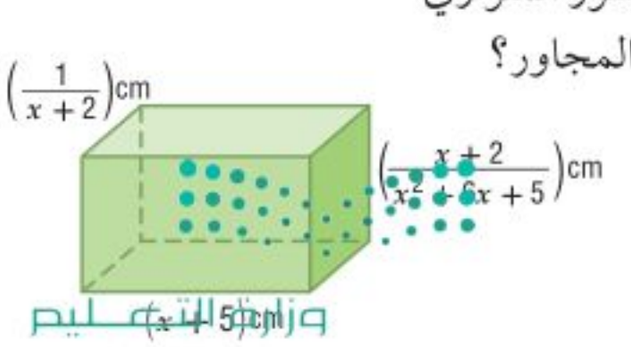
25) إذا كانت y تتغيّر عكسيًّا مع x، وكانت $y = 18$ عندما $x = -\frac{1}{2}$، فأوجد قيمة x عندما $y = -10$.

26) إذا كانت m تتغيّر طرديًّا مع n، وكانت $m = 24$ عندما $n = -3$، فأوجد قيمة n عندما $m = 30$.

27) إذا كانت r تتغيّر تغيّرًا مشتركًا مع s و t. وكانت $s = 20$ عندما $r = 140$، و $t = -5$. فأوجد قيمة s عندما $r = 7$، و $t = 2.5$.

28) **دراجات هوائية:** عندما يقود أحمد دراجته الهوائية، فإن المسافة التي يقطعها تتناسب طرديًّا مع الزمن. إذا قطع 50 mi في 2.5 h، فكم ساعة يحتاج ليقطع 80 mi إذا استمر في السير بالمعدل نفسه؟

29) **هندسة:** ما حجم المنشور المتوازي المستطيلات في الشكل المجاور؟



وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

التخمين والتحقق

من المهم جدًّا أن تأخذ الوقت المتبقي بعين الاعتبار في أثناء تقديم الاختبار المعياري. فإذا لاحظت أن الوقت سيدركك ولن تتمكن من إكمال الاختبار، أو أنك لا تعرف طريقة حل مسألة معينة في الاختيار، فإن استراتيجية التخمين والتحقق قد تساعدك على اختيار الإجابة بسرعة.

استراتيجيات التخمين والتحقق

الخطوة 1

انظر بإمعان إلى الإجابات المحتملة، وقوّم معقولية كلٍّ منها، ثم احذف الإجابات غير المعقولة،

واسأل نفسك:

- هل هناك بدائل تبدو غير صحيحة بصورة واضحة؟
- هل هناك بدائل غير مناسبة؟
- هل هناك بدائل لا تحتوي على الوحدات المناسبة للمسألة؟

الخطوة 2

استعمل استراتيجية التخمين والتحقق للخيارات المتبقية.

- **معادلات:** إذا كانت المسألة تتعلق بحل معادلة معينة، فعوِّض قيم البدائل في المعادلة، ولاحظ صحة الإجابة من خطئها.
- **أنظمة المعادلات:** عوّض كل قيم المتغيرات المعطاة في البدائل بالنسبة لنظام من المعادلات، وتأكد من تحقيقها لجميع المعادلات.

الخطوة 3

اختر أحد البدائل، وتأكد ممَّا إذا كان يحقق جميع شروط المسألة، ثمّ حدد الإجابة الصحيحة.

- إذا لم يحقق البديل الذي اخترته شروط المسألة فانتقل إلى البديل المعقول التالي، ثم خمّن وتحقق.
- توقف عندما تجد الإجابة الصحيحة.

مثال

اقرأ المسألة الآتية جيدًا وحدد المطلوب فيها، ثم استعمل المعطيات لحلها:

ما حل المعادلة $\frac{2}{x-3}-\frac{4}{x+3}=\frac{8}{x^2-9}$ ؟

A -1 **C** 5

B 1 **D** 7

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

حل المعادلة النسبية هو عدد حقيقي. وبما أن البدائل الأربعة هي أعداد حقيقية، فإن كلًّا منها إجابة محتملة الاختيار، ويجب التحقق من كلٍّ منها. ابدأ بالبديل الأول، وتأكد مما إذا كان يحقق المعادلة النسبية أم لا، ثم انتقل إلى البديل التالي حتى تصل إلى الإجابة الصحيحة.

	تحقق:
خمن: -1	$\frac{2}{(-1)-3}-\frac{4}{(-1)+3}=\frac{8}{(-1)^2-9}$ ✗ $-\frac{5}{2}\neq -1$

	تحقق:
خمن: 1	$\frac{2}{1-3}-\frac{4}{1+3}=\frac{8}{(1)^2-9}$ ✗ $-2\neq -1$

	تحقق:
خمن: 5	$\frac{2}{5-3}-\frac{4}{5+3}=\frac{8}{(5)^2-9}$ ✓ $\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

يكون الناتج جملة عددية صحيحة عندما $x=5$ ؛ لذا فالإجابة الصحيحة هي C.

تمارين ومسائل

اقرأ كل مسألة مما يأتي، وحدِّد المطلوب فيها، ثم استعمل المعطيات لحلها:

1) ما حل المعادلة $\frac{2}{5x}-\frac{1}{2x}=-\frac{1}{2}$ ؟

A $\frac{1}{10}$ B $\frac{1}{5}$

C $\frac{1}{4}$ D $\frac{1}{2}$

2) أعمار: مجموع أعمار علي ومحمد ومحمود يساوي 40 سنة. إذا كان عُمر محمد يزيد على مثلَي عُمر محمود بسنة واحدة، وعُمر علي أكبر من عُمر محمد بثلاث سنوات، فما عُمر محمد؟

A 7 B 15

C 14 D 18

3) ما مقطع المحور x للتمثيل البياني للدالّة $f(x)=\frac{2}{x-1}-\frac{x+4}{3}$ ؟

A -5 B 4

C 3 أو 2 D 2 أو -5

4) مبيعات: تُباع النسخة الواحدة من إحدى المجلات بسعر 10 ريالات. وقد بيع من المجلة 400 نسخة بهذا السعر . فإذا زاد سعر النسخة الواحدة، فإن عدد النسخ المبيعة ينقص بمقدار 40 نسخة مقابل كل ريالين زيادة. فما سعر النسخة الواحدة الذي يحقق أكبر دخل؟

A 10 ريالات B 15 ريالًا

C 13 ريالًا D 20 ريالًا

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

اختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممَّا يأتي :

1) فنادق: تتغيّر تكلفة استئجار غرفة في أحد الفنادق طرديًّا مع عدد أيام استئجارها كما هو موضَّح في الجدول الآتي:

عدد الأيام	التكلفة (بالريال)
1	150
2	300
3	450
4	600

أيُّ المعادلات الآتية تمثل ذلك التغيُّر الطردي؟

A $y = x + 150$

B $y = 150x$

C $y = \frac{150}{x}$

D $y = 600x$

2) في أيِّ اتجاه يجب إزاحة التمثيل البياني للدالّة $y = \frac{1}{x}$، للحصول على التمثيل البياني للدالّة $y = \frac{1}{x} + 2$ ؟

A إلى أعلى

B إلى أسفل

C إلى اليمين

D إلى اليسار

3) أيٌّ مما يأتي ليس خط تقارب للدالّة النسبية $f(x) = \frac{1}{x^2 - 49}$؟

A $y = 0$

B $x = -7$

C $x = 7$

D $y = 1$

4) ما أبسط صورة للكسر المركّب $\frac{\frac{(x+3)^2}{x^2-16}}{\frac{x+3}{x+4}}$ ؟

A $\frac{x+3}{x+4}$

B $\frac{1}{x-4}$

C $\frac{x+3}{x-4}$

D $\frac{x-4}{x+3}$

5) قيمة محددة المصفوفة $\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 9 & 8 \end{vmatrix}$ تساوي:

A 77

B 45

C 13

D −77

6) ما حل المعادلة: $\frac{2}{x-3} - \frac{4}{x+3} = \frac{8}{x^2-9}$ ؟

A −13

B $\frac{7}{3}$

C 5

D 7

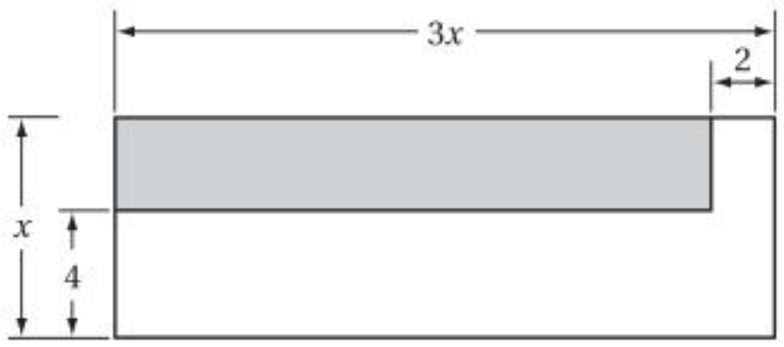
وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

إجابة قصيرة

أجب عن كلٍّ مما يأتي:

7) أوجد مساحة المنطقة المظللة في الشكل أدناه على صورة كثيرة حدود في أبسط صورة.



8) إذا كانت y تتغيَّر طرديًّا مع x، وكانت $y = 12$ عندما $x = -3$، فأوجد قيمة y عندما $x = 16$.

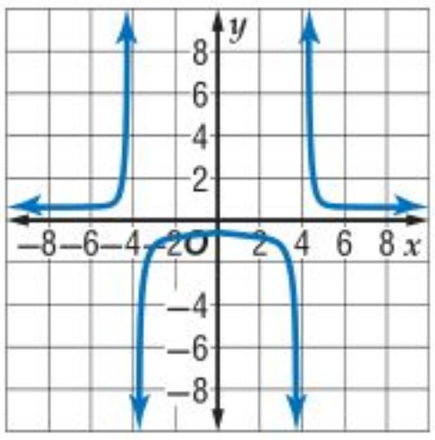
9) إذا كانت x تتغيَّر طرديًّا مع y وعكسيًّا مع z، وكانت $z = 26$ عندما $x = 8$ و $y = 13$، فأوجد قيمة z عندما $x = 8$ و $y = -6$.

10) إذا كانت y تتغيَّر عكسيًّا مع x، وكانت $y = 4$ عندما $x = 12$، فأوجد قيمة y عندما $x = 5$.

إجابة طويلة

أجب عن كلٍّ مما يأتي موضِّحا خطوات الحل :

11) استعمل التمثيل البياني للدالّة النسبية المجاور، وأوجد خطوط التقارب الرأسية والأفقية للدالّة النسبية.



12) أوجد $(f+g)(x)$, $(f-g)(x)$, $(f \cdot g)(x)$, $(\frac{f}{g})(x)$ للدالّتين $g(x)$, $f(x)$ في كلٍّ مما يأتي:

a $f(x) = x^2$

$g(x) = x - 5$

b $f(x) = 6 - x^2$

$g(x) = 2x^2 + 3x - 5$

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟											
إذا لم تستطع حل سؤال...	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
فعد إلى الدرس ...	1-5	1-3	1-3	1-1	مهارة سابقة	1-6	مهارة سابقة	1-5	1-5	1-5	1-4	مهارة سابقة

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

الفصل 2

المتتابعات والمتسلسلات
Sequences and Series

فيما سبق:
درست الأنماط الجبرية، والمتتابعات الحسابية بوصفها دوالّ خطية.

والآن:
- أستعمل المتتابعات والمتسلسلات الحسابية والهندسية.
- أجد مفكوك القوى باستعمال نظرية ذات الحدَّين.
- أبرهن جملًا رياضية باستعمال الاستقراء الرياضي.

لماذا؟
بذور: تظهر المتتابعات بأشكال شتَّى، وطرائق مدهشة، كما في بعض البذور والأزهار والفواكه والخضراوات، فمثلًا تظهر متتابعة فيبوناشي الشهيرة في بذور تبّاع الشمس، بحيث يتكوّن الشكل الحلزوني المعروف بدوّامة فيبوناشي.

المطويات منظِّم أفكار

المتتابعات والمتسلسلات: اعمل هذه المطوية لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك حول المتتابعات والمتسلسلات، مبتدئًا بورقة واحدة A4.

1. **اطوِ** الورقة من المنتصف كما في الشكل.
2. **أعد** الورقة إلى وضعها ثم اطوِ الجانب الأطول بمقدار $5\ \text{cm}$ لعمل جيبٍ كما في الشكل.
3. **ألصق** الطرفين لعمل الجيب.
4. **ضع** عنوانًا لكل جانب كما في الشكل، استعمل أوراقًا أو بطاقات لتسجيل الملاحظات والأمثلة.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي
رابط الحل الرسمي
www.ien.edu.sa

التهيئة للفصل الثاني

أجب عن الاختبار الآتي، وارجع إلى "المراجعة السريعة"؛ لمساعدتك على ذلك.

اختبار سريع

حُلّ كلًّا من المعادلات الآتية: (تستعمل مع الدروس 1-2 إلى 3-2)

1) $-6 = 7x + 78$

2) $768 = 3x^4$

3) $23 - 5x = 8$

4) $2x^3 + 4 = -50$

5) **نباتات:** يريد أحمد أن يزرع 48 شتلة ورد في حديقته، بحيث يزرع في أحد جزأيها 12 شتلة، وفي الجزء الثاني يزرع كل أربع شتلات من الشتلات المتبقية في صف واحد. فما عدد الصفوف التي سيزرعها؟

مثّل كلًّا من الدوالّ الآتية بيانيًّا: (تستعمل مع الدروس 1-2 إلى 4-2)

6) $\{(1, 3), (2, 5), (3, 7), (4, 9), (5, 11)\}$

7) $\{(1, -15), (2, -12), (3, -9), (4, -6), (5, -3)\}$

8) $\left\{(1, 27), (2, 9), (3, 3), (4, 1), \left(5, \frac{1}{3}\right)\right\}$

9) $\left\{(1, 1), (2, 2), \left(3, \frac{5}{2}\right), \left(4, \frac{11}{4}\right), \left(5, \frac{23}{8}\right)\right\}$

10) **حضانة:** تبلغ المصروفات الشهرية لإحدى دور الحضانة 14000 ريال، وتتقاضى الدار عن كل طفل 1000 ريال شهريًّا. والمعادلة $P(c) = 1000c - 14000$ تعبّر عن ربح الحضانة الشهري عندما تضمُّ c طفلًا. فما ربح الحضانة الشهري عندما يكون فيها 30 طفلًا؟

أوجد قيمة كلٍّ من العبارات الآتية عند قيم المتغيّرات المُعطَاة. (تستعمل مع الدروس 1-2 إلى 4-2)

11) $\frac{a}{3}(b + c)$ إذا كان $a = 9, b = -2, c = -8$

12) $r + (n - 2)t$ إذا كان $r = 15, n = 5, t = -1$

13) $x \cdot y^{z+1}$ إذا كان $x = -2, y = \frac{1}{3}, z = 5$

14) $\frac{a(1 - bc)^2}{1 - b}$ إذا كان $a = -3, b = -4, c = 1$

مراجعة سريعة

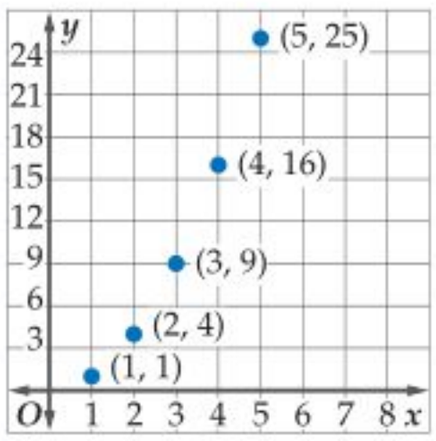
مثال 1

حُلّ المعادلة: $25 = 3x^3 + 400$

$25 = 3x^3 + 400$	المعادلة الأصلية
$-375 = 3x^3$	اطرح 400 من الطرفين
$-125 = x^3$	اقسم الطرفين على 3
$\sqrt[3]{-125} = \sqrt[3]{x^3}$	خُذ الجذر التكعيبي للطرفين
$-5 = x$	بسّط

مثال 2

مثّل الدالّة: $\{(5, 25), (4, 16), (3, 9), (2, 4), (1, 1)\}$ بيانيًّا. ثم حدِّد كلًّا من المجال والمدى.



مجال الدالّة هو القيم الممكنة جميعها للمتغيّر المستقل (x). لذلك يكون مجال الدالّة هو المجموعة: $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. أمّا مدى الدالّة فهو القيم الممكنة جميعها للمتغيّر التابع (y) إذن مدى الدالّة هو المجموعة: $\{1, 4, 9, 16, 25\}$.

مثال 3

إذا كانت $x = -2, y = -3$، فأوجد قيمة: $2 \cdot 3^{x+y}$

$2 \cdot 3^{x+y} = 2 \cdot 3^{-2+(-3)}$	عوّض
$= 2 \cdot 3^{-5}$	بسّط
$= \frac{2}{3^5} = \frac{2}{243}$	تعريف القوّة السالبة

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي
امسح الرمز لفتح الدرس
www.ien.edu.sa

2-1

المتتابعات بوصفها دوالّ
Sequences as Functions

فيما سبق:
درست الدوالّ الخطية والدوالّ الأسيّة. (مهارة سابقة)

والآن:
- أتعرّف المتتابعة الحسابية باعتبارها دالّة خطية.
- أتعرّف المتتابعة الهندسية باعتبارها دالّة أُسّية.

المفردات:
المتتابعة sequence
الحدّ term
المتتابعة المنتهية finite sequence
المتتابعة غير المنتهية infinite sequence
المتتابعة الحسابية arithmetic sequence
أساس المتتابعة الحسابية (الفرق المشترك) common difference
المتتابعة الهندسية geometric sequence
أساس المتتابعة الهندسية (النسبة المشتركة) common ratio

لماذا؟
خلال أحد المهرجانات الكشفية، دخل المشاركون إلى الملعب في صفوف، بحيث كان عدد الأفراد في كلِّ صفٍّ كما يأتي: مشارك واحد في الصفِّ الأول، وثلاثة في الصفِّ الثاني، وخمسة في الصفِّ الثالث، وهكذا تستمر أعداد المشاركين على هذا النمط.

المتتابعات الحسابية: **المتتابعة** مجموعة من الأعداد مرتّبة في نمطٍ محدّدٍ أو ترتيب معين، ويُسمّى كلُّ عدد في المتتابعة **حدًّا**.
ويمكن للمتتابعة أن تكون **منتهية** أي لها عدد محدّد من الحدود مثل: $2, 0, 2, 4, 6-$، أو **غير منتهية**، حيث تستمر إلى مالانهاية مثل $0, 1, 2, 3, \ldots$. ويُرمز للحدّ الأول في المتتابعة بالرمز a_1، وللحدّ الثاني بالرمز a_2، وهكذا.

مفهوم أساسي — **المتتابعات بوصفها دوالّ**

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: المتتابعة دالّة مجالها مجموعة الأعداد الطبيعية أو مجموعة جزئية منها، ومداها مجموعة جزئية من الأعداد الحقيقية.

الرموز:
عناصر المجال: $1 \quad 2 \quad 3 \quad \ldots \quad n$ — ترتيب الحدّ
عناصر المدى: $a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \cdots \quad a_n$ — حدود المتتابعة

أمثلة:

متتابعة منتهية	متتابعة غير منتهية
3, 6, 9, 12, 15	3, 6, 9, 12, 15, ...
المجال: {1, 2, 3, 4, 5}	المجال: مجموعة الأعداد الطبيعية جميعها
المدى: {3, 6, 9, 12, 15}	المدى: مجموعة المضاعفات الطبيعية للعدد 3

يُحدّد كلُّ حدّ في **المتتابعة الحسابية**، بإضافة قيمة ثابتة إلى الحدّ الذي يسبقه مباشرة. وتُسمَّى القيمة الثابتة **الفرق المشترك** أو **الأساس**. فالمتتابعة: $3, 6, 9, 12, 15$ هي متتابعة حسابية؛ لأن لحدودها فرقًا مشتركًا (ثابتًا) حيث يزيد كلُّ حدٍّ على الحدّ الذي يسبقه بمقدار 3 .

$$3 \underset{+3}{\rightarrow} 6 \underset{+3}{\rightarrow} 9 \underset{+3}{\rightarrow} 12 \underset{+3}{\rightarrow} 15$$

مثال 1 — **تحديد المتتابعة الحسابية**

بيِّن ما إذا كانت كلّ من المتتابعتين الآتيتين حسابية أم لا:

a) $5, -6, -17, -28, \ldots$

$$5 \underset{-11}{\rightarrow} -6 \underset{-11}{\rightarrow} -17 \underset{-11}{\rightarrow} -28$$

الفرق الثابت هو -11
المتتابعة حسابية

b) $-4, 12, 28, 42, \ldots$

$$-4 \underset{+16}{\rightarrow} 12 \underset{+16}{\rightarrow} 28 \underset{+14}{\rightarrow} 42$$

الفرق غير ثابت
المتتابعة ليست حسابية

تحقق من فهمك

1A) $7, 12, 16, 20, \ldots$

1B) $-6, 3, 12, 21, \ldots$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

يمكنك استعمال أساس المتتابعة الحسابية لإيجاد حدودها.

إرشادات للدراسة

أساس المتتابعة الحسابية

هو الفرق بين كلّ حدّين متتاليين (الحدّ – سابقه) ابتداءً من الحدّ الثاني .

مثال 2 تمثيل المتتابعة الحسابية بيانيًّا

في المتتابعة الحسابية: ... ,18, 14, 10

a) أوجد الحدود الأربعة التالية في هذه المتتابعة.

الخطوة 1: لحساب أساس المتتابعة، اطرح أيَّ حدّ من حدود المتتابعة من الحدّ السابق له مباشرة. فأساس المتتابعة المعطاة هو $14 - 10 = -4$. ويُمثّل هذا العدد الفرق المشترك بين حدود المتتابعة.

الخطوة 2: لإيجاد الحدّ التالي، أضف 4– للحدّ الأخير المُعطَى.

وهكذا أضف 4– لكل حدّ من الحدود التالية.

$$10 \xrightarrow{+(-4)} 6 \xrightarrow{+(-4)} 2 \xrightarrow{+(-4)} -2 \xrightarrow{+(-4)} -6$$

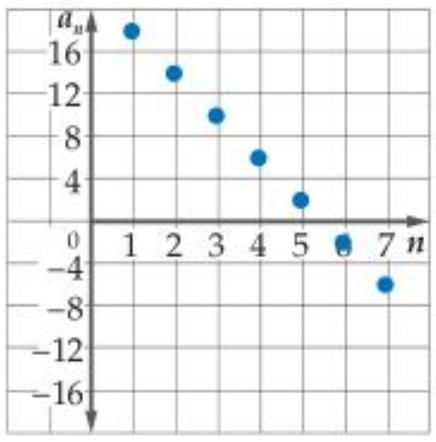
إذن الحدود الأربعة التالية للمتتابعة هي: 6– ,2– ,2, 6

b) مثّل الحدود السبعة الأولى من المتتابعة بيانيًّا.

مجال المتتابعة هو المجموعة: {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ,....}

ومدى المتتابعة هو المجموعة: {18, 14, 10, 6, 2, –2, –6 ,....}

ولذلك تُمثَّل هذه الحدود من المتتابعة بيانيًّا بالشكل المجاور.



تحقق من فهمك

2) أوجد الحدود الأربعة التالية في المتتابعة الحسابية ... ,4 ,11 ,18
ثم مثّل الحدود السبعة الأولى بيانيًّا.

لاحظ أن النقاط التي تُمثّل حدود المتتابعة الحسابية تقع على مستقيم واحد، ممّا يعني أن المتتابعة الحسابية هي دالّة خطية مجالها أو متغيّرها المستقل هو رقم الحدّ n، ومداها أو متغيّرها التابع هو الحدّ a_n، والميل هو أساسها الذي هو الفرق الثابت.

الربط بالحياة

في أغلب الاحتفالات العسكرية، يقوم المنظّمون بعمل ترتيبات خاصّة عند الافتتاح، ومنها على سبيل المثال دخول الفرق بطرق مختلفة.

مثال 3 من واقع الحياة إيجاد حدود المتتابعة الحسابية

المهرجانات الكشفية: بالعودة إلى بداية الدرس. أوجد عدد المشاركين الموجودين في الصف الرابع عشر.

افهم: بما أن الفرق الثابت بين كلِّ حدّ والحدّ السابق له هو 2، فإن أساس المتتابعة هو 2.

خطّط: اكتب قاعدة المتتابعة باستعمال صيغة الميل والنقطة.

افترض أن $(x_1, y_1) = (3, 5)$ ، $m = 2$. ثم حُلّ المعادلة عندما $x = 14$

حُلّ:

$(y - y_1) = m(x - x_1)$	صيغة الميل والنقطة
$(y - 5) = 2(x - 3)$	$m = 2$, $(x_1, y_1) = (3, 5)$
$y - 5 = 2x - 6$	اضرب
$y = 2x - 1$	اجمع 5 إلى كلّ من طرفَي المعادلة
$y = 2(14) - 1$	عوّض 14 مكان x
$y = 28 - 1 = 27$	بسّط

إذن عدد المشاركين في الصف الرابع عشر هو 27 مشاركًا.

تحقّق: يمكن إيجاد حدود المتتابعة بإضافة 2 لكل صفٍّ، بدءًا من الصفِّ الأول حتى نصل إلى الصفِّ الرابع عشر.

تحقق من فهمك

3) نقود: ادّخر عامل في يوم ما 20 ريالًا من أجره اليومي، فإذا علمت أنه يدّخر في كل يوم 5 ريالات زيادة على اليوم السابق، فكم ريالًا يدَّخر في اليوم الثاني عشر؟

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

المتتابعة الهندسية: **المتتابعة الهندسية** نوع آخر من المتتابعات، ويمكن الحصول على أيّ حدّ من حدودها بضرب الحدّ السابق له مباشرة في عدد ثابت يُسمّى **أساس المتتابعة الهندسية** أو **النسبة المشتركة** للمتتابعة.

لاحظ أن المتتابعة $\frac{1}{16}, \frac{1}{4}, 1, 4, 16$ متتابعة هندسية؛ لأن النسبة بين كل حدّ والحدّ السابق له مباشرة هي نسبة ثابتة، أيْ أنَّ كلَّ حدّ في المتتابعة هو 4 أمثال الحدّ السابق له مباشرة.

$\frac{1}{16}$ $\xrightarrow{\times 4}$ $\frac{1}{4}$ $\xrightarrow{\times 4}$ 1 $\xrightarrow{\times 4}$ 4 $\xrightarrow{\times 4}$ 16

تنبيه!

النسب

إذا وجدت نسبة أحد الحدود إلى الحدّ السابق له، فأوجد بقية النسب بالطريقة نفسها.

إرشادات للدراسة

أساس المتتابعة الهندسية

هو النسبة بين كل حدّين متتاليين، الحدّ ÷ سابقه ابتداءً من الحدّ الثاني.

مثال 4 تحديد المتتابعة الهندسية

بيِّن ما إذا كانت كلٌّ من المتتابعتين الآتيتين هندسية أم لا:

a) $-2, 6, -18, 54, \ldots$

أوجد النسبة بين كل حدّين متتاليين.

$\frac{54}{-18} = -3$, $\frac{-18}{6} = -3$, $\frac{6}{-2} = -3$

بما أن النسب متساوية، فإن المتتابعة هندسية.

b) $8, 16, 24, 32, \ldots$

$\frac{24}{16} = 1.5$, $\frac{16}{8} = 2$

بما أن النسبتين غير متساويتين؛ فإن المتتابعة ليست هندسية.

تحقق من فهمك

4A) $-8, 2, -0.5, 0.125, \ldots$ **4B)** $1, 3, 7, 15, \ldots$

يمكنك استعمال أساس المتتابعة الهندسية (النسبة المشتركة) لإيجاد حدود أخرى من حدود المتتابعة.

مثال 5 تمثيل المتتابعة الهندسية بيانيًّا

المتتابعة: $\ldots, 2, 8, 32$ متتابعة هندسية.

a) أوجد الحدود الثلاثة التالية في هذه المتتابعة.

الخطوة 1: أوجد أساس المتتابعة أو النسبة المشتركة: $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

الخطوة 2: لإيجاد الحدّ التالي، اضرب الحدّ السابق في العدد $\frac{1}{4}$

وهكذا بضرب كلِّ حدّ في العدد $\frac{1}{4}$ نحصل على الحدود الآتية.

2 $\xrightarrow{\times \frac{1}{4}}$ $\frac{1}{2}$ $\xrightarrow{\times \frac{1}{4}}$ $\frac{1}{8}$ $\xrightarrow{\times \frac{1}{4}}$ $\frac{1}{32}$

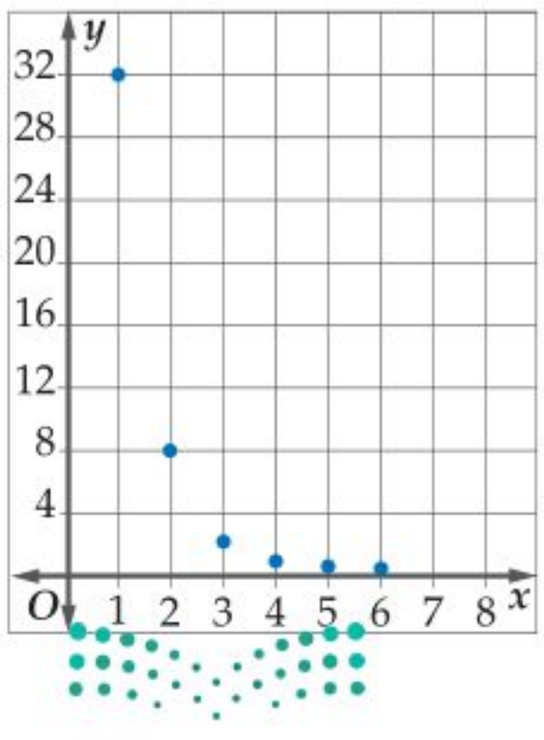
إذن الحدود الثلاثة التالية هي: $\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{32}$

b) مثّل الحدود الستة الأولى في المتتابعة بيانيًّا.

مجال المتتابعة هو: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots.\}$

مدى المتتابعة هو: $\left\{32, 8, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{32}, \ldots.\right\}$

ولذلك تُمثَّل هذه الحدود من المتتابعة بيانيًّا كما في الشكل المجاور.



تحقق من فهمك

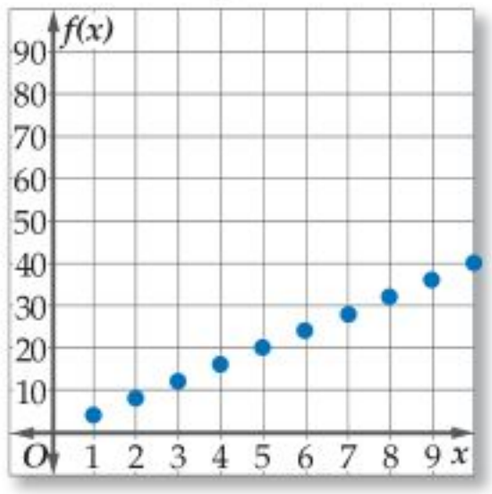
5) أوجد الحدّين التاليين في المتتابعة الهندسية: $\ldots, 7, 21, 63$ ، ثم مثّل الحدود الخمسة الأولى بيانيًّا.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

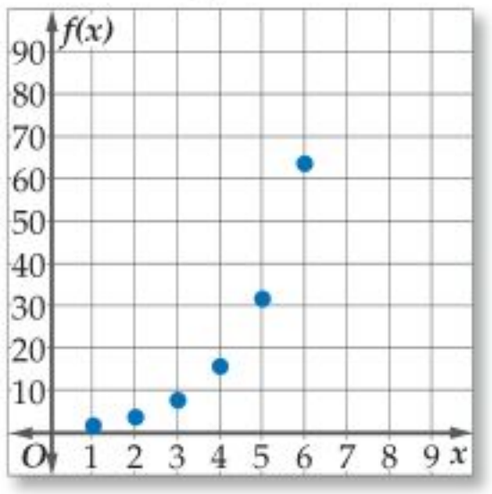
تفحَّص الشكل في المثال 5. تلاحظ أن التمثيل البياني للمتتابعة الهندسية أسّيٌّ وليس خطيًّا كما في المتتابعة الحسابية، وبالتالي فإنه يمكن تمثيل المتتابعة الهندسية بوصفها دالّة أسّية في الصورة $f(x) = r^x$، حيث r أساس المتتابعة الهندسية، و $r > 0$ و $r \neq 1$

حسابية



x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x)$	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40

هندسية



x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	2	4	8	16	32	64

ويمكنك استعمال خصائص المتتابعات الحسابية والمتتابعات الهندسية في تصنيف المتتابعات.

مثال 6 تصنيف المتتابعات

حدّد نوع المتتابعة في كلٍّ مما يأتي، هل هي حسابية، أم هندسية، أم غير ذلك. ووضّح إجابتك:

a) 16, 24, 36, 54, ...

أوجد الفرق بين كلِّ حدّين متتاليين.

$54 - 36 = 18$ $36 - 24 = 12$ ✗

أوجد النسبة بين كلِّ حدّين متتاليين.

$\frac{54}{36} = \frac{3}{2}$ $\frac{36}{24} = \frac{3}{2}$ $\frac{24}{16} = \frac{3}{2}$ ✓

بما أن النسبة بين كلِّ حدّين متتاليين ثابتة؛ فإن المتتابعة هندسية.

b) 1, 4, 9, 16, ...

أوجد الفرق بين كلِّ حدّين متتاليين.

$16 - 9 = 7$ $9 - 4 = 5$ ✗

أوجد النسبة بين كلِّ حدّين متتاليين.

$\frac{16}{9} = 1.\overline{7}$ $\frac{9}{4} = 2.25$ ✗

بما أن الفرق بين كلِّ حدّين متتاليين ليس عددًا ثابتًا، وكذلك النسبة بين كلِّ حدّين متتاليين ليست ثابتة أيضًا؛ فإن المتتابعة ليست حسابية ولا هندسية.

c) 23, 17, 11, 5, ...

أوجد الفرق بين كلِّ حدّين متتاليين.

$5 - 11 = -6$ $11 - 17 = -6$ $17 - 23 = -6$ ✓

بما أن الفرق بين كلِّ حدّين متتاليين ثابت؛ فإن المتتابعة حسابية.

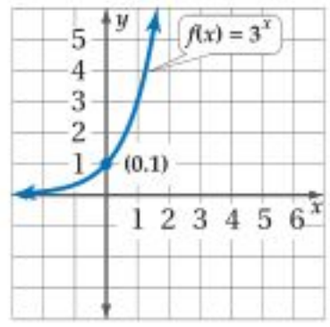
تحقق من فهمك

6A) $\frac{5}{3}, 2, \frac{7}{3}, \frac{8}{3}, \ldots$ **6B)** $2, -\frac{3}{2}, \frac{9}{8}, -\frac{27}{32}, \ldots$ **6C)** $1, 4, 5, -5, \ldots$

إرشادات للدراسة

الدالّة الأسّية

هي الدالّة التي تكون على الصورة $f(x) = b^x$، حيث $b > 0$, $b \neq 1$، وهي متصلة ومتباينة، ومجالها مجموعة الأعداد الحقيقية، ومداها مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة، ولها خطُّ تقارب أفقي هو المحور x، ويمرُّ منحناها بالنقطة $(0, 1)$ دائمًا، فمثلًا $f(x) = 3^x$ دالّة أسّيّة تمثيلها البياني هو



وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

تأكد

مثال 1 بيِّن ما إذا كانت كلّ متتابعة فيما يأتي متتابعة حسابية أم لا.

1) $8, -2, -12, -22, \ldots$ **2)** $-19, -12, -5, 2, 9$

مثال 2 أوجد الحدود الأربعة التالية في كلٍّ من المتتابعتين الحسابيتين الآتيتين، ثم مثّل الحدود السبعة الأولى بيانيًّا:

3) $6, 18, 30, \ldots$ **4)** $15, 6, -3, \ldots$

مثال 3 **5) توفير:** يوفِّر سعيد 250 ريالًا شهريًّا، فإذا كان معه 1000 ريال في البداية، فأوجد ما يلي:

a) المبلغ الذي سيصبح معه بعد مرور 8 أشهُرٍ.

b) الوقت الذي يحتاج إليه ليصبح معه 7250 ريالًا، إذا استمر في التوفير بالطريقة ذاتها.

مثال 4 بيّن ما إذا كانت المتتابعة في كلٍّ مما يأتي متتابعة هندسية أم لا:

6) $4, 12, 36, 108, \ldots$ **7)** $7, 14, 21, 28, \ldots$

مثال 5 أوجد الحدود الثلاثة التالية في كلٍّ من المتتابعات الهندسية الآتية، ثم مثّل الحدود السبعة الأولى بيانيًّا:

8) $250, 50, 10, 2, \ldots$ **9)** $9, -3, 1, -\frac{1}{3}, \ldots$

مثال 6 حدّد نوع المتتابعة في كلٍّ مما يأتي، هل هي حسابية، أم هندسية، أم غير ذلك. ووضّح إجابتك:

10) $5, 1, 7, 3, 9, \ldots$ **11)** $200, -100, 50, -25, \ldots$ **12)** $12, 16, 20, 24, \ldots$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 بيّن ما إذا كانت كل متتابعة فيما يأتي متتابعة حسابية أم لا.

13) $-9, -3, 0, 3, 9, \ldots$ **14)** $\frac{2}{9}, \frac{5}{9}, \frac{8}{9}, \frac{11}{9}, \ldots$

مثال 2 أوجد الحدود الأربعة التالية في كلٍّ من المتتابعات الحسابية الآتية، ثم مثّل الحدود السبعة الأولى بيانيًّا:

15) $-5, -11, -17, -23, \ldots$ **16)** $\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{7}{5}, \ldots$ **17)** $\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, \ldots$

مثال 3 **18) تنظيم قاعات:** يوجد 28 مقعدًا في الصف الأول في إحدى قاعات المحاضرات، وعدد المقاعد في كلِّ صفٍّ تالٍ يزيد بمقدار مقعدين عن الصف السابق. إذا كان في هذه القاعة 24 صفًّا من المقاعد، فكم مقعدًا يوجد في الصف الأخير؟

19) تمارين قوة: يقوم عليٌّ ببعض التمارين الرياضية لاستعادة لياقته البدنية. ويُخطّط لاستعمال أحد الأجهزة الرياضية مدَّة 5 دقائق في اليوم الأول، ثم زيادة مدَّة الاستعمال بمعدَّل دقيقة وثلاثين ثانية يوميًّا.

a) ما مدَّة استعمال عليٍّ للجهاز في اليوم الثامن عشر؟

b) ما أول يوم سيستعمل فيه الجهاز مدَّة ساعة أو أكثر؟

c) هل يُعدّ استمرار عليٍّ في هذا النمط إلى مالا نهاية منطقيًّا؟ لماذا؟

مثال 4 بيّن ما إذا كانت المتتابعة في كلٍّ مما يأتي متتابعة هندسية أم لا:

20) $21, 14, 7, \ldots$ **21)** $-27, 18, -12, \ldots$ **22)** $\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 1, -\frac{1}{2}, \ldots$

مثال 5 أوجد الحدود الثلاثة التالية في كلٍّ من المتتابعات الهندسية الآتية، ثم مثّل الحدود السبعة الأولى بيانيًّا:

23) $81, 108, 144, \ldots$ **24)** $\frac{1}{3}, 1, 3, 9, \ldots$ **25)** $1, 0.1, 0.01, 0.001, \ldots$

مثال 6 حدد نوع المتتابعة في كلٍّ مما يأتي، هل هي حسابية، أم هندسية، أم غير ذلك. ووضّح إجابتك:

26) $3, 12, 27, 48, \ldots$ **27)** $1, -2, -5, -8, \ldots$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

28) $12, 36, 108, 324, \ldots$

29) $-\frac{2}{5}, -\frac{2}{25}, -\frac{2}{125}, -\frac{2}{625}, \ldots$

30) $\frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4, \ldots$

31) $6, 9, 14, 21, \ldots$

32) قراءة: أرادت ندى إتمام قراءة كتاب يضمُّ 800 صفحة خلال العطلة الصيفية. فإذا قرأت 112 صفحة حتى بداية العطلة، وأرادت إنهاء قراءة الكتاب في 8 أيام، فما عدد الصفحات التي عليها قراءتها يوميًّا، إذا كانت تقرأ العدد نفسه من الصفحات يوميًّا؟

33) نقص القيمة: تنقص قيمة سيَّارة ماجد بمعدل 15% سنويًّا. إذا كانت القيمة الحالية لسيارته 50000 ريال، فكم تكون قيمتها بعد 5 سنوات مقرّبًا الجواب إلى أقرب ريال؟

الربط بالحياة

تنقص قيمة السيارة عادة بمعدَّل 15% إلى 20% سنويًّا؛ وذلك اعتمادًا على نوع السيارة وعلى السائق.

34) طيُّ الأوراق: عند طيِّ ورقة على نفسها، يتضاعف سُمكُها. فإذا كان سُمك ورقة 0.1 mm، وأمكن طيُّها 37 مرَّة، فكم يصبح سمكها؟

مسائل مهارات التفكير العليا

35) تحدٍّ: إذا كان مجموع ثلاثة حدود متتالية في متتابعة حسابية يساوي 6، وحاصل ضربها يساوي 42−، فما هذه الحدود؟

36) مسألة مفتوحة: أوجد ثلاث متتابعات تبدأ كلٌّ منها كما يأتي ... ,9 ,3 . بحيث تكون إحداها حسابية، والثانية هندسية، والثالثة لا حسابية ولا هندسية.

37) تبرير: إذا كان أساس متتابعة هندسية يساوي r حيث $|r| < 1$، فماذا يحدث لحدود المتتابعة عندما تزداد قيمة n؟ ما الذي يحدث للحدود إذا كانت $|r| \geq 1$؟

38) اكتب: صِفْ ما يحدث لحدود متتابعة هندسية عندما يصبح أساسها مثلَي قيمته، وما يحدث للحدود عندما يصبح الأساس نصف قيمته؟ وضّح إجابتك.

تدريب على اختبار

39) إجابة قصيرة: صالة مستطيلة الشكل بُعدَاها 13 مترًا، و11 مترًا. أردنا وضع سجادة تغطِّيها كاملة، فأوجد سعر السجادة إذا كان سعر المتر المربع الواحد منها 60 ريالًا.

40) ما الحدّ التالي في المتتابعة الهندسية التالية:

$8, 6, \frac{9}{2}, \frac{27}{8}, \ldots$ ؟

A $\frac{11}{8}$ **B** $\frac{27}{16}$ **C** $\frac{9}{4}$ **D** $\frac{81}{32}$

مراجعة تراكمية

41) حُلّ المعادلة: $\frac{3}{x-3} + 9 = 10$ (الدرس 6-1)

أوجد معادلة المستقيم في كلٍّ ممَّا يأتي: (مهارة سابقة)

42) المارّ بالنقطة (6, 4)، وميله 0.5 .

43) المارّ بالنقطتين $(1, 3), (8, -\frac{1}{2})$.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

2-2 المتتابعات والمتسلسلات الحسابية
Arithmetic Sequences and Series

فيما سبق:
درست تمييز المتتابعة الحسابية. (الدرس 1-2)

والآن:
- أجد حدود متتابعة حسابية، وحدّها النوني.
- أجد أوساطًا حسابية.
- أجد مجموع حدود متسلسلة حسابية منتهية.

المفردات:
الأوساط الحسابية arithmetic means
المتسلسلة series
المتسلسلة الحسابية arithmetic series
المجموع الجزئي partial sum
رمز المجموع sigma notation

لماذا؟

في القرن الثامن عشر، طلب معلمٌ للرياضيات من طلابه في المرحلة الابتدائية أن يجدوا مجموع الأعداد الصحيحة من 1 إلى 100. فقام أحد الطلاب واسمه كارل جاوس (Karl Gauss) بإعطاء الإجابة الصحيحة خلال ثوانٍ، مما أثار استغراب المعلم. وقد أصبح هذا الطالب "كارل جاوس" أحد أفضل علماء الرياضيات على مرِّ العصور.

لقد حلَّ جاوس هذا السؤال باستعمال المتسلسلات الحسابية.

المتتابعات الحسابية: لقد استعملت صيغة النقطة والميل في الدرس 1 – 6؛ لإيجاد قيمة حدّ معيّن في متتابعة حسابية. ويمكنك إيجاد معادلة تستطيع من خلالها إيجاد أيّ حدّ من حدود متتابعة حسابية باستعمال الأسلوب نفسه.

ففي المتتابعة الحسابية $a_1 , a_2 , a_3 , \dots , a_n$ التي أساسها d يكون:

$(y - y_1) = m(x - x_1)$ صيغة الميل والنقطة

$(a_n - a_1) = d(n - 1)$ $(x, y) = (n, a_n), (x_1, y_1) = (1, a_1), m = d$

$a_n = a_1 + d(n - 1)$ اجمع a_1 للطرفين

ويمكنك استعمال هذه الصيغة لإيجاد قيمة أي حدّ من حدود المتتابعة الحسابية، وذلك بمعرفة الحدّ الأول والأساس.

مفهوم أساسي الحدّ النوني في المتتابعة الحسابية

أضف إلى مطويتك

تستعمل الصيغة الآتية للتعبير عن الحدّ النوني في متتابعة حسابية حدّها الأول a_1 ، وأساسها d ، حيث n عدد طبيعي.

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

ستشتق هذه الصيغة في السؤال (58)

مثال 1 إيجاد حدّ معيَّن في متتابعة حسابية

أوجد قيمة الحدّ الثاني عشر في المتتابعة الحسابية: $9 , 16 , 23 , 30 , \dots$

الخطوة 1: أوجد أساس المتتابعة.

الفرق بين أيّ حدّين متتاليين: $16 - 9 = 7$

إذن $d = 7$

الخطوة 2: أوجد قيمة الحدّ الثاني عشر.

$a_n = a_1 + (n - 1)d$ الحدّ النوني في المتتابعة الحسابية

$a_{12} = 9 + (12 - 1)(7)$ $a_1 = 9 , d = 7 , n = 12$

$= 9 + 77 = 86$ بسّط

تحقق من فهمك

أوجد قيمة الحدّ المطلوب في كلٍّ من المتتابعتين الحسابيتين الآتيتين:

(1A) a_n علمًا بأن: $a_1 = -4 , d = 6 , n = 9$

(1B) a_{20} علمًا بأن: $a_1 = 15 , d = -8$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

إذا أعطيت مجموعة من الحدود في متتابعة حسابية، فإنه يمكنك كتابة صيغةٍ للحدّ النوني في هذه المتتابعة.

مثال 2 كتابة صيغة الحدّ النوني لمتتابعة حسابية

اكتب صيغة للحدّ النوني للمتتابعة الحسابية في كلٍّ ممَّا يأتي:

a) $5 , -13 , -31 , \ldots$

$d = -13 - 5 = -18$ والحدّ الأول 5

$a_n = a_1 + (n-1)d$ — الحدّ النوني في المتتابعة الحسابية

$a_n = 5 + (n-1)(-18)$ — $a_1 = 5$ و $d = -18$

$a_n = -18n + 23$ — استعمل خاصية التوزيع، ثم بسّط

b) $a_5 = 19 , \ d = 6$

الخطوة 1: أوجد قيمة a_1

$a_n = a_1 + (n-1)d$ — الحدّ النوني في المتتابعة الحسابية

$19 = a_1 + (5-1)(6)$ — $a_5 = 19 , \ n = 5 , \ d = 6$

$-5 = a_1$ — اضرب، ثم اطرح 24 من الطرفين

الخطوة 2: كتابة الصيغة.

$a_n = a_1 + (n-1)d$ — الحدّ النوني في المتتابعة

$a_n = -5 + (n-1)(6)$ — $a_1 = -5$ و $d = 6$

$a_n = 6n - 11$ — استعمل خاصية التوزيع، ثم بسّط

تحقق من فهمك

2A) $12, 3, -6, \ldots$

2B) $a_6 = 12, \ d = 8$

إرشادات للدراسة

التحقق من صحة الحلّ

تحقّق من صحة الحلّ، باستعمال صيغة الحدّ النوني التي أوجدتها لحساب الحدود الثلاثة الأولى في المتتابعة.

تنبيه!

أساس المتتابعة الحسابية

لا تخطئ في تحديد إشارة أساس المتتابعة الحسابية، وتحقّق دائمًا من أن صيغة الحدّ النوني تعطي حدود المتتابعة جميعها.

في بعض الأحيان يُعطى في المسألة حدَّان غير متتاليين في متتابعة حسابية. وتُسمّى جميع الحدود الواقعة بين هذين الحدّين **أوساطًا حسابية**، ويمكنك استعمال هذا المفهوم في إيجاد الحدود المفقودة بينهما.

مثال 3 إيجاد الأوساط الحسابية

أوجد الأوساط الحسابية في المتتابعة: $22 , \underline{?} , \underline{?} , \underline{?} , \underline{?} , \underline{?} , -8$

الخطوة 1: بما أنه يوجد 4 حدود بين الحدّ الأول والحدّ الأخير؛ فإن عدد حدود المتتابعة هو $4 + 2 = 6$، إذن $n = 6$.

الخطوة 2: أوجد قيمة d

$a_n = a_1 + (n-1)\,d$ — الحدّ النوني في المتتابعة الحسابية

$22 = -8 + (6-1)\,d$ — $a_1 = -8 , \ a_6 = 22 , \ n = 6$

$30 = 5d$ — أضف 8 إلى الطرفين، ثم بسّط

$6 = d$ — اقسم الطرفين على 5

الخطوة 3: استعمل d لإيجاد الأوساط الحسابية الأربعة المطلوبة.

$-8 \xrightarrow{+6} -2 \xrightarrow{+6} 4 \xrightarrow{+6} 10 \xrightarrow{+6} 16 \xrightarrow{+6} 22$

إذن الأوساط الحسابية هي $-2, 4, 10 , 16$

تحقق من فهمك

3) أوجد خمسة أوساط حسابية بين العددين $-18 , 36$

قراءة الرياضيات

الوسط الحسابي

هو معدَّل عددين أو أكثر. الوسط الحسابي بين العددين a, b يساوي $\frac{a+b}{2}$

الأوساط الحسابية

هي الحدود الواقعة بين أيّ حدّين غير متتاليين في متتابعة حسابية.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

المتسلسلات الحسابية : يمكنك الحصول على **المتسلسلة** بوضع إشارة الجمع (+) بين حدود المتتابعة. لذا فالمتسلسلة الحسابية هي مجموع حدود متتابعة حسابية. ويُسمّى ناتج جمع الحدود n الأولى من المتسلسلة **المجموع الجزئي**، ويُرمز له بالرمز S_n.

مفهوم أساسي — **المجموع الجزئي في متسلسلة حسابية**

أضف إلى مطويتك

القانون (المعادلة)	المعطيات	مجموع أول n حدًّا (S_n) هو:
بالصيغة العامة	a_1 , a_n , n	$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$
بالصيغة البديلة	a_1 , d , n	$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$

في بعض الأحيان، لابد من إيجاد إحدى القيم a_1, a_n, n ، قبل إيجاد مجموع المتسلسلة الحسابية. وفي هذه الحالة استعمل صيغة الحدّ النوني.

إرشادات للدراسة

صيغتا المجموع الجزئي في متسلسلة حسابية

سُمّيت الصيغة $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ بالصيغة العامة؛ لأنه تم التوصل إليها اعتمادًا على تعريف المتتابعة الحسابية، وباستعمال حدودها بشكل عام، بينما سُمّيت الصيغة $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$ بالصيغة البديلة؛ لأنها تشتق من الصيغة العامة، ويمكن استعمالها بديلًا عن الصيغة العامة.

مثال 4 **استعمال صيغ المجموع**

أوجد مجموع حدود المتسلسلة الحسابية $12 + 19 + 26 + \ldots + 180$

الخطوة 1: $a_1 = 12 , \ a_n = 180 , \ d = 19 - 12 = 7$

يجب إيجاد قيمة n أولًا كي نجد المجموع.

$a_n = a_1 + (n-1)d$	الحدّ النوني في المتتابعة الحسابية
$180 = 12 + (n-1)(7)$	$a_n = 180, a_1 = 12, d = 7$
$168 = 7n - 7$	استعمل خاصية التوزيع، ثم بسّط
$25 = n$	حُلَّ المعادلة

الخطوة 2: استعمل إحدى الصيغتين لحساب S_n .

$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$	صيغة المجموع
$S_{25} = \frac{25}{2}[2(12) + (25-1)(7)]$	$n = 25, a_1 = 12, d = 7$
$S_{25} = 12.5(192) = 2400$	بسّط

تحقق من فهمك

(4A $2 + 4 + 6 + \cdots + 100$

(4B $n = 16 , a_n = 240, d = 8$

يمكنك استعمال صيغة المجموع في إيجاد حدود المتتابعة الحسابية.

مثال 5 **إيجاد الحدود الثلاثة الأولى لمتتابعة حسابية**

أوجد الحدود الثلاثة الأولى لمتتابعة حسابية فيها $a_1 = 7, a_n = 79, \ S_n = 430$

الخطوة 1: أوجد قيمة n .

$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$	صيغة المجموع
$430 = \frac{n}{2}(7 + 79)$	$S_n = 430, a_1 = 7, a_n = 79$
$430 = \frac{n}{2}(86)$	اجمع
$430 = n(43)$	بسّط
$10 = n$	اقسم طرفَي المعادلة على 43

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

الخطوة 2: أوجد قيمة d .

الحدّ النوني للمتتابعة الحسابية	$a_n = a_1 + (n-1)d$
$a_n = 79,\ a_1 = 7,\ n = 10$	$79 = 7 + (10-1)d$
اطرح 7 من طرفي المعادلة	$72 = 9d$
اقسم طرفي المعادلة على 9	$8 = d$

الخطوة 3: استعمل d لحساب كلٍّ من a_2 , a_3 .

$a_2 = 7 + 8 = 15$ ، $a_3 = 15 + 8 = 23$

إذن الحدود الثلاثة الأولى هي 7, 15 , 23

تحقق من فهمك

(5A $S_n = 120,\ n = 8,\ a_n = 36$ **(5B** $a_1 = -24,\ a_n = 288,\ S_n = 5280$

يمكنك التعبير عن المتسلسلة بصورة مختصرة باستعمال **رمز المجموع**.

مفهوم أساسي — **رمز المجموع**

أضف إلى مطويتك

الرموز: $\sum_{k=1}^{n} f(k)$ — $f(k)$: صيغة حدود المتسلسلة؛ $k=1$: أول قيمة لـ k؛ n: آخر قيمة لـ k

مثال:
$$\sum_{k=1}^{12}(4k+2) = [4(1)+2]+[4(2)+2]+[4(3)+2]+\ldots+[4(12)+2]$$
$$= 6 + 10 + 14 + \ldots + 50$$

قراءة الرياضيات

رمز المجموع

يقرأ الرمز $\sum$ "سيجما"، وهو اسم لأحد الحروف اليونانية الكبيرة.

مثال 6 على اختبار

أوجد مجموع حدود المتسلسلة: $\sum_{k=4}^{18}(6k-1)$

A 846 **B** 910 **C** 975 **D** 1008

المتسلسلة المعطاة حسابية؛ لأن كلَّ حدّ يزيد على الحدّ السابق له بمقدار 6،
ويوجد فيها 15 حدًّا ($n = 15$)؛ لأن $n = 18 - 4 + 1$

$a_1 = 6(4) - 1 = 23$ ، $a_n = 6(18) - 1 = 107$

أوجد المجموع

صيغة المجموع	$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$
$n = 15,\ a_1 = 23,\ a_n = 107$	$S_{15} = \frac{15}{2}(23 + 107)$
بسّط	$S_{15} = \frac{15}{2}(130) = 975$

إذن رمز الإجابة الصحيحة هو **C** .

تحقق من فهمك

(6 أوجد مجموع حدود المتسلسلة $\sum_{m=9}^{21}(5m+6)$

A 972 **B** 1053 **C** 1281 **D** 1701

إرشادات للدراسة

عدد الحدود

المتسلسلة المكتوبة باستعمال رمز المجموع $\sum_{k=a}^{b} f(k)$ عدد حدودها يساوي $b - a + 1$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

تأكد

مثال 1 أوجد قيمة الحدّ المطلوب في كلٍّ من المتتابعتين الحسابيتين الآتيتين :

1) a_n علماً بأن: $a_1 = 14, d = 9, n = 11$ **2)** a_{18} في المتتابعة: $12, 25, 38, \ldots$

مثال 2 اكتب صيغة الحدّ النوني لكلٍّ من المتتابعتين الحسابيتين الآتيتين :

3) $13, 19, 25, \ldots$ **4)** $a_5 = -12, d = -4$

مثال 3 أوجد الأوساط الحسابية في كلٍّ من المتتابعتين الآتيتين:

5) $6, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, 42$ **6)** $-4, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, 8$

مثال 4 أوجد مجموع حدود كل متسلسلة حسابية فيما يأتي:

7) أول 50 عددًا طبيعيًّا **8)** $4 + 8 + 12 + \cdots + 200$

9) $a_1 = 12, a_n = 188, d = 4$ **10)** $a_n = 145, d = 5, n = 21$

مثال 5 أوجد الحدود الثلاثة الأولى في كلٍّ من المتتابعتين الحسابيتين الآتيتين:

11) $a_1 = 8, a_n = 100, S_n = 1296$ **12)** $n = 18, a_n = 112, S_n = 1098$

مثال 6 **13) اختيار من متعدد:** أوجد مجموع حدود المتسلسلة: $\sum_{k=1}^{12} (3k + 9)$.

A 45 B 78

C 342 D 410

تدرب وحل المسائل

مثال 1 أوجد قيمة الحدّ المطلوب في كلّ من المتتابعات الحسابية الآتية:

14) a_n علمًا بأن: $a_1 = -18, d = 12, n = 16$ **15)** a_n علمًا بأن: $a_1 = -12, n = 66, d = 4$

16) a_{15} في المتتابعة $-5, -12, -19, \ldots$ **17)** a_{24} في المتتابعة $8.25, 8.5, 8.75, \ldots$

مثال 2 اكتب صيغة الحدّ النوني في كلٍّ متتابعة حسابية فيما يأتي:

18) $24, 35, 46, \ldots$ **19)** $a_5 = 1.5, d = 4.5$ **20)** $9, 2, -5, \ldots$

21) $a_6 = 22, d = 9$ **22)** $a_8 = -8, \mathrm{d} = -2$ **23)** $-12, -17, -22, \ldots$

مثال 3 أوجد الأوساط الحسابية في كلٍّ من المتتابعات الآتية:

24) $24, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, -1$

25) $-6, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, 49$

26) $-28, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, 7$

27) $84, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, 39$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

مثال 4 أوجد مجموع حدود كلٍّ من المتسلسلات الحسابية الآتية:

28) أول 100 عدد زوجي في مجموعة الأعداد الطبيعية.

29) أول 200 عدد فردي في مجموعة الأعداد الطبيعية.

30) $-18 + (-15) + (-12) + \ldots + 66$

31) $-24 + (-18) + (-12) + \ldots + 72$

32) $a_1 = -16, d = 6, n = 24$

33) $n = 19, a_n = 154, d = 8$

34) مسابقات ثقافية: في إحدى المسابقات الثقافية تم تخصيص جوائز تصاعدية للإجابة الصحيحة عن أسئلة المسابقة، فخُصِّص للسؤال الأول 100 ريال، وتزيد قيمة الجائزة 50 ريالًا للسؤال التالي، وهكذا. إذا شارك سعد في المسابقة، وأجاب عن 11 سؤالًا بصورة صحيحة، فما مجموع مبلغ الجائزة الذي يستحقُّه؟

مثال 5 أوجد الحدود الثلاثة الأولى في كلٍّ من المتتابعات الحسابية الآتية:

35) $a_1 = 48, a_n = 180, S_n = 1368$

36) $a_1 = 3, a_n = 66, S_n = 759$

37) $n = 28, a_n = 228, S_n = 2982$

38) $a_1 = -33, n = 36, S_n = 6372$

مثال 6 أوجد مجموع حدود كلٍّ من المتسلسلات الآتية:

39) $\sum_{k=1}^{16}(4k - 2)$

40) $\sum_{k=4}^{13}(4k + 1)$

41) $\sum_{k=5}^{16}(2k + 6)$

42) $\sum_{k=0}^{12}(-3k + 2)$

43) قرض حسن: اقترض عليٌّ مبلغًا من المال من أحد أصدقائه، واتفقا على أن يقوم بتسديده مقسَّطًا كما يأتي: القسط الأول 50 ريالًا، وكل قسط تالٍ يزيد على القسط السابق بمقدار 25 ريالًا. فإذا علمت أن عدد الأقساط هو 12، فما قيمة القرض؟

الربط بالحياة

يجب على الإنسان أن يكتب عقدًا بينه وبين من يقرضه المال، عملًا بقوله تعالى في سورة البقرة: ﴿يَٰٓأَيُّهَا ٱلَّذِينَ ءَامَنُوٓاْ إِذَا تَدَايَنتُم بِدَيۡنٍ إِلَىٰٓ أَجَلٖ مُّسَمّٗى فَٱكۡتُبُوهُۚ ... ﴿٢٨٢﴾﴾

استعمل المعلومات المعطاة في كلٍّ من الأسئلة الآتية؛ لكتابة معادلة تُمثّل الحدّ النوني لكل متتابعة حسابية:

44) الحدّ رقم 100 في المتتابعة يساوي 245، وأساس المتتابعة يساوي 13 .

45) الحدّ الحادي عشر في المتتابعة يساوي 78، وأساس المتتابعة يساوي 9− .

46) الحدّ الخامس والعشرون في المتتابعة يساوي 121، والحدّ الثمانون يساوي 506 .

47) تنظيم: تُصفّ الطاولات المستطيلة الشكل في قاعات الاحتفالات متجاورةً لتُشكّل طاولة كبيرة. ويُبيّنُ الشكل المجاور عدد الأشخاص الذين يمكن توزيعهم على التشكيلين الأول والثاني من الطاولات.

a) ارسم شكلًا يُبيّن عدد الأشخاص على الطاولات في كلٍّ من الحدود الثلاثة التالية (بإضافة طاولة كلَّ مرَّة).

b) اكتب معادلة تُمثّل الحدّ النوني في هذا النمط.

c) هل من الممكن ترتيب الطاولات بهذه الطريقة، بحيث يستطيع 100 شخص الجلوس؟ وضّح إجابتك.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

48) جاذبية: عندما يسقط جسم سقوطًا حرًّا تحت تأثير الجاذبية الأرضية ومع إهمال مقاومة الهواء، فإنه يقطع مسافة 16 قدمًا في الثانية الأولى، و48 قدمًا إضافية في الثانية الثانية، و80 قدمًا إضافية في الثانية الثالثة، وهكذا. ما المسافة التي يقطعها هذا الجسم في 10 ثوانٍ؟

49) دخل سنوي: إذا كان الدخل السنوي لمؤسسة في السنة الأولى 92000 ريال، ويزيد سنويًّا بمقدار 16000 ريال، ففي أيّ سنة يصبح دخلها 380000 ريال؟

50) رياضة: خلال استعداده لأحد سباقات الجري لمسافات طويلة، يُخطّط فيصل للتدرّب على الجري لمسافة 3 أميال يوميًّا في الأسبوع الأول، ومن ثَمَّ يقوم بزيادة المسافة بمقدار نصف ميل أسبوعيًّا.

a) اكتب معادلة للحدّ النوني لهذه المتتابعة.

b) إذا استمر فيصل بالتدرّب على هذا النمط، ففي أيِّ أسبوع يصل إلى قطع مسافة 10 أميال يوميًّا؟

c) هل يُعدّ الاستمرار على هذا النمط إلى ما لا نهاية منطقيًّا؟ وضّح إجابتك.

الربط بالحياة

رياضة الجري تفيد في إنقاص الوزن، وتقوية المفاصل والعضلات، وتحسين عمل القلب والأوعية الدموية، والتخلص من الإرهاق والتوتر، ورفع مستوى اللياقة البدنية والصحة العامة.

51) تمثيلات متعددة: معتبرًا $\sum_{k=1}^{n}(2k+2)$ أجب عما يأتي:

a) جدوليًّا: اعمل جدولًا للمجاميع الجزئية للمتسلسلة، حيث $1 \le k \le 10$.

b) بيانيًّا: مثّل بيانيًّا المجاميع الجزئية التي أوجدتها في الفرع **a**، وذلك بتمثيل النقاط (k, S_k) .

c) بيانيًّا: مثّل الدالّة $f(x) = x^2 + 3x$ بيانيًّا على المستوى الإحداثي نفسه، حيث $0 \le x \le 10$.

d) لفظيًّا: ماذا تلاحظ حول التمثيلين البيانيين؟

e) تحليليًّا: ماذا تستنتج حول العلاقة بين التمثيل البياني للدالّة التربيعية والتمثيل البياني لمجموع المتسلسلة الحسابية؟

f) جبريًّا: أوجد المتسلسلة الحسابية التي يكون فيها التمثيل البياني للمجاميع الجزئية (k, S_k) هو نفسه للدالّة $g(x) = x^2 + 8x$

أوجد قيمة x في كلٍّ ممّا يأتي:

52) $\sum_{k=3}^{x}(6k-5) = 928$

53) $\sum_{k=5}^{x}(8k+2) = 1032$

مسائل مهارات التفكير العليا

54) تبرير: إذا كان a هو الحدّ الثالث في متتابعة حسابية، وb هو الحدّ الخامس، وc هو الحدّ الحادي عشر، فعبّر عن c بدلالة a, b .

55) تحدٍّ: يوجد ثلاثة أوساط حسابية بين العددين a, b في متتابعة حسابية. إذا كان الوسط الحسابي للأوساط الثلاثة 16، فأوجد الوسط الحسابي للعددين a, b.

56) مسألة مفتوحة: اكتب متسلسلة حسابية فيها 8 حدود، ومجموعها 324 .

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

57) اكتب: بيِّن أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين المتتابعات الحسابية والمتسلسلات الحسابية.

58) صيغ: اشتق صيغة الحدّ النوني للمتتابعة الحسابية.

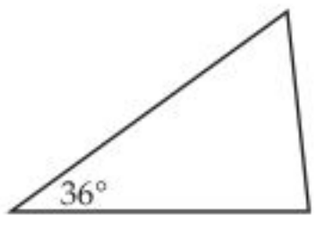
59) صيغ: اشتقّ قاعدة لإيجاد مجموع المتسلسلة الحسابية، بحيث لا تحتوي على a_1.

60) صيغ: اشتقّ الصيغة البديلة لإيجاد مجموع المتسلسلة الحسابية؛ باستعمال الصيغة العامة للمجموع.

61) تحدَّ: بالعودة إلى فقرة "لماذا ؟" ما الطريقة التي استعملها كارل جاوس في إيجاد مجموع الأعداد الصحيحة من 1 إلى 100؟ (يمكنك البحث في الإنترنت).

تدريب على اختبار

62) تُشكّل قياسات زوايا المثلَّث أدناه متتابعة حسابية. إذا كان قياس الزاوية الصغرى °36، فما قياس الزاوية الكبرى؟



A 75°
B 84°
C 90°
D 97°

63) العبارة $1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ تكافئ:

A $\sum_{k=1}^{3} k^{\frac{1}{k}}$
B $\sum_{k=1}^{3} k^{k}$
C $\sum_{k=1}^{3} k^{-k}$
D $\sum_{k=1}^{3} \sqrt{k}$

مراجعة تراكمية

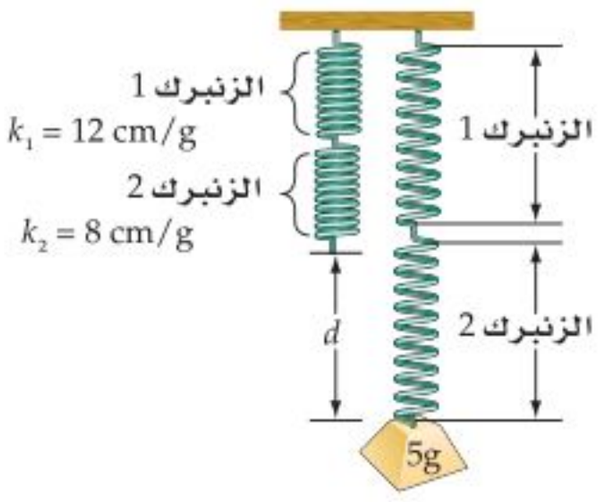
حدّد ما إذا كانت كلٌّ من المتتابعات الآتية حسابية أم لا. أجب "بنعم" أو "لا": (الدرس 1-2)

64) $-6, 4, 14, 24, \ldots$

65) $2, \frac{7}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{5}, \ldots$

66) $10, 8, 5, 1, \ldots$

67) فيزياء: ترتبط المسافة التي يستطيل فيها الزنبرك بالكتلة المعلّقة فيه. ويعبَّر عن هذه العلاقة بالقاعدة $d = km$، حيث d المسافة، وm الكتلة، وk ثابت الزنبرك. وعند وصل زنبركين لهما الثابتان k_1, k_2 على التوالي، فإن ثابت الزنبرك k الناتج، يُحسب باستعمال المعادلة $\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$. (الدرس 1-6)



a) إذا وُصِل زنبركان على التوالي، وكان ثابت الزنبرك الأول $12\,cm/g$، وثابت الزنبرك الثاني $8\,cm/g$، فأوجد ثابت الزنبرك الناتج.

b) إذا عُلّقت كتلة مقدارها 5 جرامات (كما في الشكل) فما مقدار استطالة الزنبركين؟

أوجد قيمة كلٍّ مما يأتي: (مهارة سابقة)

68) $2 \cdot 3^6$
69) $\left(\frac{1}{2}\right)^5$
70) $\left(-\frac{1}{3}\right)^4$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

2-3

المتتابعات والمتسلسلات الهندسية
Geometric Sequences and Series

فيما سبق:
درست تمييز المتتابعة الهندسية. (الدرس 1-2)

والآن:
- أجد حدود متتابعة هندسية، وحدّها النوني.
- أجد أوساطًا هندسية.
- أجد مجموع حدود متسلسلة هندسية منتهية.

المفردات:
الأوساط الهندسية
geometric means
المتسلسلة الهندسية
geometric series

لماذا؟

خلال بحثه في الإنترنت، وجد "أحمد" موضوعًا عن العلاج بالأعشاب، فقام بإرساله إلى خمسة من أصدقائه عن طريق البريد الإلكتروني، ومن ثم قام كلٌّ واحد منهم بإرسال الموضوع إلى خمسة أصدقاء آخرين، وهكذا قام كلٌّ من استلم البريد بإرساله إلى خمسة أصدقاء جُدُدٍ. إذا استمر إرسال الموضوع بهذا النمط، فما عدد الأشخاص الذين سيصلهم هذا الموضوع في المرحلة الثامنة؟

المتتابعات الهندسية: كما هو الحال في المتتابعات الحسابية، فإن للمتتابعات الهندسية صيغة للحدِّ النوني تُستعمل لإيجاد قيمة أيِّ حدٍّ من حدودها.

مفهوم أساسي — الحد النوني في المتتابعة الهندسية

أضف إلى مطويتك

تُستعمل الصيغة الآتية للتعبير عن الحدّ النوني في متتابعة هندسية حدّها الأول a_1، وأساسها r، حيث n عدد طبيعي:

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

ستتحقق صحة هذه الصيغة في السؤال (39)

مثال 1 من واقع الحياة — إيجاد الحدّ النوني في متتابعة هندسية

بريد إلكتروني: في المسألة الواردة في فقرة "لماذا؟"، ما عدد رسائل البريد الإلكتروني المرسَلة في المرحلة الثامنة؟

افهم: تريد إيجاد عدد الرسائل في المرحلة الثامنة، حيث أرسل أحمد خمس رسائل في المرحلة الأولى، وفي المرحلة الثانية أرسل كلُّ شخص من الخمسة الرسالة إلى خمسة أشخاص آخرين، وهكذا (مع مراعاة أن كلَّ شخص استلم رسالة واحدة).

خطط: يُشكّل عدد الرسائل المرسلة في كلِّ مرحلة متتابعة هندسية أساسها $r = 5$، لذا استعمل صيغة الحدّ النوني للمتتابعة الهندسية.

حُلّ:

الحدّ النوني في المتتابعة الهندسية — $a_n = a_1 r^{n-1}$

$a_1 = 5, r = 5, n = 8$ — $a_8 = 5(5)^{8-1}$

$5^7 = 78125$ — $a_8 = 5(78125) = 390625$

وعليه فإن عدد الرسائل المرسلة في المرحلة الثامنة هو 390625 رسالة.

تحقّق: اكتب الحدود الثمانية الأولى من المتتابعة، بالضرب في أساس المتتابعة.

$5, 25, 125, 625, 3125, 15625, 78125, 390625$

تحقق من فهمك

1) أمطار: في أثناء هطول الأمطار ونزولها من أعلَى تلّةٍ إلى أحد الوديان، صنعت الأمطار مجرًى لها في الوادي طوله 40 in، إذا كان هذا المجرى يتسع كلّ يومٍ ثلاثة أمثال اليوم السابق له، فكم سيبلغ اتساع المجرى في اليوم الخامس في حالة استمرار هطول الأمطار بهذا المنوال؟

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

إذا علمت بعض حدود المتتابعة الهندسية، فإنه يمكنك إيجاد صيغة الحدّ النوني لها.

مثال 2 كتابة صيغة الحد النوني لمتتابعة الهندسية

اكتب صيغة الحدّ النوني لكل من المتتابعتين الهندسيتين الآتيتين:

a) $0.5, 2, 8, 32, \ldots$

الحدّ الأول 0.5، والأساس r يُستخرج كما يأتي: $r = \frac{8}{2} = 4$

$a_n = a_1 r^{n-1}$	الحدّ النوني في المتتابعة الهندسية
$a_n = 0.5\,(4)^{n-1}$	$a_1 = 0.5,\ r = 4$

b) $a_4 = 5,\ r = 6$

الخطوة 1: إيجاد a_1

$a_n = a_1 r^{n-1}$	الحد النوني في المتتابعة الهندسية
$5 = a_1 (6^4 - 1)$	$a_n = 5,\ r = 6,\ n = 4$
$\frac{5}{216} = a_1$	أوجد قيمة 6^3 ثم اقسم عليها

الخطوة 2: كتابة الصيغة

$a_n = a_1 r^{n-1}$	الحد النوني في المتتابعة الهندسية
$a_n = \frac{5}{216}(6)^{n-1}$	$a_1 = \frac{5}{216},\ r = 6$

تحقق من فهمك

2A) $-0.25, 2, -16, 128, \ldots$

2B) $a_3 = 16,\ r = 4$

وكما في الأوساط الحسابية، فإن **الأوساط الهندسية** هي الحدود الواقعة بين حدَّين غير متتاليين في متتابعة هندسية، ويمكنك استعمال أساس المتتابعة الهندسية لإيجاد الأوساط الهندسية.

مثال 3 إيجاد الأوساط الهندسية

أوجد ثلاثة أوساط هندسية بين العددين 2, 1250

الخطوة 1: بما أنه يوجد ثلاثة أوساط هندسية بين الحدِّ الأول والحدِّ الأخير، فإن عدد حدود المتتابعة هو $5 = 2 + 3$، ولذلك يكون $n = 5$.

الخطوة 2: أوجد قيمة r

$a_n = a_1 r^{n-1}$	الحدّ النوني في المتتابعة الهندسية
$1250 = 2r^{5-1}$	$a_n = 1250,\ a_1 = 2,\ n = 5$
$\pm 5 = r$	اقسم الطرفين على 2، ثم أوجد الجذر الرابع

الخطوة 3: استعمل r لإيجاد الأوساط الهندسية الثلاثة:

$2 \xrightarrow{\times 5} 10 \xrightarrow{\times 5} 50 \xrightarrow{\times 5} 250 \xrightarrow{\times 5} 1250$ أو $2 \xrightarrow{\times -5} -10 \xrightarrow{\times -5} 50 \xrightarrow{\times -5} -250 \xrightarrow{\times -5} 1250$

إذن الأوساط الهندسية هي : $-10, 50, -250$ أو $10, 50, 250$

تحقق من فهمك

3) أوجد أربعة أوساط هندسية بين العددين 512 ,0.5

إرشادات للدراسة

أساس المتتابعة الهندسية

يمكن بسهولة استنتاج قاعدة تساعد على إيجاد أساس المتتابعة الهندسية (r) إذا عُلم حدَّان من حدودها a_m ، a_n

$r^{n-m} = \frac{a_n}{a_m}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

المتسلسلات الهندسية : يمكنك الحصول على **المتسلسلة الهندسية** بوضع إشارة الجمع (+) بين حدود المتتابعة الهندسية. ويُرمز لمجموع أول n حدًّا في المتسلسلة بالرمز S_n. ويمكنك إيجاده باستعمال أي من الصيغتين الآتيتين:

مفهوم أساسي — **المجموع الجزئي في متسلسلة هندسية**

أضف إلى مطويتك

القانون (المعادلة)	المعطيات	مجموع أول n حدًّا من المتسلسلة S_n
بالصيغة العامة	a_1, n, r	$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}, r \neq 1$
بالصيغة البديلة	a_1, a_n, r	$S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1-r}, r \neq 1$

مثال 4 من واقع الحياة — **إيجاد مجموع متسلسلة هندسية**

بريد إلكتروني: بالعودة إلى المسألة الواردة في فقرة "لماذا؟"، إذا استمر النمط، فما مجموع رسائل البريد الإلكتروني المُرسَلة حتى نهاية المرحلة الثامنة؟

أُرسلت خمس رسائل إلكترونية في المرحلة الأولى، ولدينا 8 مراحل من الرسائل.

إذن $a_1 = 5, r = 5, n = 8$

$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$ صيغة المجموع

$S_8 = \frac{5(1-5^8)}{1-5}$ $a_1 = 5, r = 5, n = 8$

$S_8 = 488280$ بسّط

إذن مجموع الرسائل المرسَلة حتى 8 مراحل هو : 488280 .

تحقق من فهمك

4) **بكتيريا:** ينمو أحد أنواع البكتيريا في وسط غذائي، بحيث ينقسم إلى جزأين ثم إلى أربعة، ثم إلى ثمانية وهكذا. إذا بدأ مجتمع هذا النوع من البكتيريا بعدد 10، فما مجموع البكتيريا فيه بعد 8 انقسامات؟

وكما في المتسلسلات الحسابية، فإنه يمكنك استعمال رمز المجموع للتعبير عن المتسلسلات الهندسية.

مثال 5 — **المجموع باستعمال رمز المجموع**

أوجد مجموع حدود المتسلسلة $\sum_{k=3}^{10} 4(2)^{k-1}$

لاحظ أن المتسلسلة المُعطاة هندسية؛ لأن صيغة حدودها $4(2)^{k-1}$ مُعطاة بدالّة أُسيّة، إذن $r = 2$ ، والآن أوجد قيمة كلٍّ من n ، a_1 ، ولإيجاد الحدّ الأول عوِّض العدد 3 مكان k، ويستخرج كما يأتي:

$a_1 = 4 \cdot 2^{3-1} = 16$ ، وأساس المتسلسلة الهندسية هو r ، حيث $r = 2$.

وعدد الحدود هو : $10 - 3 + 1 = 8$ إذن $n = 8$.

$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$ صيغة المجموع

$S_8 = \frac{16(1-2^8)}{1-2}$ $a_1 = 16, r = 2, n = 8$

$= 4080$ استعمل الآلة الحاسبة

تحقق من فهمك

(5A $\sum_{k=4}^{12} \frac{1}{4} \cdot 3^{k-1}$

(5B $\sum_{k=2}^{9} \frac{2}{3} \cdot 4^{k-1}$

تنبيه!

رمز المجموع

لاحظ في المثال 5 أنه طُلب إيجاد المجموع من الحدّ الثالث إلى الحدّ العاشر.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

يمكنك استعمال صيغة مجموع حدود المتسلسلة الهندسية لإيجاد قيمة حدٍّ معين من حدود المتسلسلة.

مثال 6 إيجاد الحدّ الأول في المتسلسلة الهندسية

أوجد a_1 في المتسلسلة الهندسية التي فيها $S_n = 13116,\ n = 7,\ r = 3$

$S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r}$ صيغة المجموع

$13116 = \frac{a_1 - a_1(3^7)}{1 - 3}$ $S_n = 13116,\ r = 3,\ n = 7$

$13116 = \frac{a_1(1 - 3^7)}{1 - 3}$ استعمل خاصية التوزيع

$13116 = \frac{-2186a_1}{-2}$ اطرح

$13116 = 1093a_1$ بسّط

$12 = a_1$ اقسم الطرفين على 1093

تحقق من فهمك

6) أوجد a_1 في المتسلسلة الهندسية التي فيها $S_n = -26240,\ n = 8,\ r = -3$

تأكـد

مثال 1

1) فيروسات: اخترق فيروس حاسوبًا، فأتلف أحد ملفاته، فإذا كانت الملفات التي يُتلفها الفيروس تتضاعف كلَّ دقيقة، فما مجموع الملفات التي سيُتلفها الفيروس بعد 15 دقيقة، إذا لم تتمّ السيطرة عليه؟

مثال 2 اكتب صيغة الحدّ النوني في كلٍّ من المتتابعات الهندسية الآتية:

2) $2, 4, 8, \ldots$ **3)** $-4, 16, -64, \ldots$ **4)** $a_2 = 4,\ r = 3$

مثال 3 أوجد الأوساط الهندسية المطلوبة في كلٍّ من المتتابعتين الآتيتين:

5) $0.25, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, 64$ **6)** $0.20, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, 125$

مثال 4

7) تدريب: قامت شركة تعمل في مجال التطوير بإرسال 4 من خبرائها إلى بعض الدوائر التعليمية؛ لتدريب العاملين في هذه الدوائر على كيفية استخدام وتوظيف التكنولوجيا في تدريس المناهج، فقام كلٌّ خبيرٍ منهم بتدريب 3 من مشرفي هذه الإدارات، وبدورهم قام كلُّ مشرفٍ منهم بتدريب 30 آخرين وهكذا ...
إذا استمر هذا النمط، فما مجموع المتدرِّبين الذين سيتم تدريبهم حتى المرحلة السادسة؟

مثال 5 أوجد مجموع حدود كلٍّ من المتسلسلتين الهندسيتين الآتيتين:

8) $\sum_{k=1}^{6} 3(4)^{k-1}$ **9)** $\sum_{k=1}^{8} 4\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$

مثال 6 أوجد a_1 في كلٍّ من المتسلسلتين الهندسيتين الآتيتين:

10) $S_n = 85\frac{5}{16},\ r = 4,\ n = 6$ **11)** $S_n = 1020,\ a_n = 4,\ r = \frac{1}{2}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

تدرب وحل المسائل

مثال 1

12) طقس: نتيجة للأمطار الغزيرة، ارتفع منسوب المياه في بركة في اليوم الأول 3 cm ، فإذا كانت الزيادة في كلّ يوم ضعف الزيادة في اليوم السابق لمنسوب المياه في كلٍّ من الأيام الأربعة التالية، فكم سنتمترًا ارتفع منسوب المياه في البركة في اليوم الخامس؟

أوجد a_n في كلٍّ من المتتابعتين الهندسيتين الآتيتين:

13) $a_1 = 2400, r = \frac{1}{4}, n = 7$

14) $a_1 = -4, r = -2, n = 8$

مثال 2 اكتب صيغة الحدّ النوني في كلٍّ من المتتابعات الهندسية الآتية:

15) $-3, 6, -12, \ldots$

16) $-1, 1, -1, \ldots$

17) $\frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{4}{27}, \ldots$

18) $a_3 = 28, r = 2$

19) $a_4 = -8, r = 0.5$

20) $a_6 = 0.5, r = 6$

مثال 3 أوجد الأوساط الهندسية المطلوبة في كلٍّ من المتتابعات الهندسية الآتية:

21) $810, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, 10$

22) $\frac{7}{2}, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, \frac{56}{81}$

23) أوجد وسطين هندسيين بين العددين -2 , 16

مثال 4

24) بندول: يقطع بندول مسافة 30 cm في الاهتزازة الأولى، وبعد ذلك يقطع 95% من الاهتزازة السابقة، ويستمر على هذا المنوال. أوجد المسافة الكلية التي يقطعها البندول في 30 اهتزازة.

الربط بالحياة

يستعمل البندول البسيط في الساعات البندولية، ويهتزُّ اهتزازات منتظمة تقريبًا.

والاهتزازة الواحدة تعني حركة البندول جيئة وذهابًا حول موضع اتزانه.

مثال 5

أوجد مجموع حدود كلٍّ من المتسلسلات الهندسية الآتية:

25) $a_1 = 36, r = \frac{1}{3}, n = 8$

26) $a_1 = 16, r = \frac{1}{2}, n = 9$

27) $a_1 = 240, r = \frac{3}{4}, n = 7$

أوجد مجموع حدود كلٍّ من المتسلسلات الهندسية الآتية:

28) $\sum_{k=1}^{7} 4(-3)^{k-1}$

29) $\sum_{k=1}^{8} (-3)(-2)^{k-1}$

30) $\sum_{k=1}^{10} 5(-1)^{k-1}$

مثال 6 أوجد قيمة a_1 في كلٍّ من المتسلسلتين الهندسيتين الآتيتين:

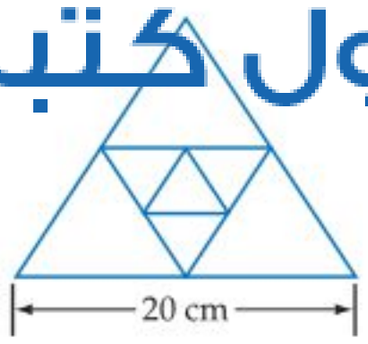
31) $S_n = -2912, r = 3, n = 6$

32) $S_n = 1330, a_n = 486, r = \frac{3}{2}$

33) علوم: ارتفع منطاد مملوء بغاز بعد دقيقة واحدة من إطلاقه مسافة 100 ft. وكان ارتفاعه بعد كلّ دقيقة إضافية يزيد بمقدار 50% على ارتفاعه في الدقيقة السابقة. أوجد ارتفاع المنطاد بعد 5 دقائق.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي



34) هندسة: في الشكل المجاور، طول ضلع المثلَّث الخارجي المتطابق الأضلاع يساوي ضعف طول ضلع المثلَّث الداخلي الذي تنصِّف رؤوسه أضلاع المثلَّث الخارجي. إذا استمر هذا النمط نحو الداخل، فما مجموع أطوال محيطات المثلَّثات الثمانية الأولى في النمط؟

35) معالجة المياه: يقوم نظام معيَّن لفلترة وتنقية المياه بإزالة 70% من الشوائب في أثناء مرور عيّنة مياه خلاله. فإذا مرّت عيّنة مياه تحتوي 900 mg من الشوائب في النظام أربع مرات، فما كمية الشوائب المتبقّية في العيّنة؟

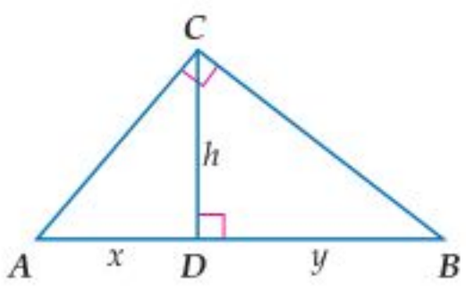
مسائل مهارات التفكير العليا

36) برهان: اشتقّ الصيغة البديلة للمجموع الجزئي في متسلسلة هندسية.

37) برهان: اشتقّ صيغة للمجموع الجزئي **لا** تتضمّن a_1

38) تبرير: وضّح التغيير الذي يجب أن تجريه على $\sum_{k=1}^{10} 3(2)^{k-1}$، للحصول على المتسلسلة نفسها إذا غيّرت $k = 1$ إلى $k = 0$. ووضّح إجابتك.

39) صيغ: اشتق صيغة الحدّ النوني للمتتابعة الهندسية.



40) تحدٍّ: استعمل حقيقة أن h هي الوسط الهندسي بين x, y في الشكل المجاور في إيجاد قيمة h^4 بدلالة x, y

41) مسألة مفتوحة: اكتب متسلسلة هندسية فيها 6 حدود، ومجموعها 252 .

42) اكتب: وضّح كيف يمكنك تحديد ما إذا كانت المتسلسلة هندسية، أم حسابية، أم أنها لا حسابية و لا هندسية، أم كليهما.

تدريب على اختبار

43) إذا كان الحدّ الأول في متسلسلة هندسية 5، وأساسها 2، ومجموعها 1275، فما عدد حدودها؟

A 5 **B** 6 **C** 7 **D** 8

44) إجابة قصيرة: عند أحمد مبلغ من المال، يصرف نصفه في الشهر الأول، ونصف المبلغ الباقي في الشهر الثاني وهكذا. إذا كان المبلغ الباقي بعد 4 أشهر هو 2000 ريال، فما المبلغ الأصلي؟

مراجعة تراكمية

45) نقود: اشترى عبدالعزيز جهاز تلفاز ودفع 400 ريال مقدمًا، على أن يدفع الباقي على أقساط شهرية مدة سنة ونصف. فإذا كانت قيمة القسط الواحد 200 ريال، فما المبلغ الذي سيدفعه ثمنًا للجهاز؟ (الدرس 2-2)

حدّد ما إذا كانت كلٌّ من المتتابعات الآتية حسابية، أم هندسية، أم غير ذلك، ووضّح إجابتك: (الدرس 2-1)

46) $\frac{1}{10}, \frac{3}{5}, \frac{7}{20}, \frac{17}{20}, \ldots$

47) $-\frac{7}{25}, -\frac{13}{50}, -\frac{6}{25}, -\frac{11}{50}, \ldots$

48) $-\frac{22}{3}, -\frac{68}{9}, -\frac{208}{27}, -\frac{632}{81}, \ldots$

49) إذا كانت y تتغير تغيرًا مشتركًا مع x و z، فأوجد قيمة y عندما $x = 9, z = -5$، علمًا بأن $y = -90$ عندما $x = -6, z = 15$. (الدرس 5-1)

50) أوجد قيمة المقدار $\frac{a-c}{a+c}$ إذا علمت أن $a = -2, c = -12$. (مهارة سابقة)

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

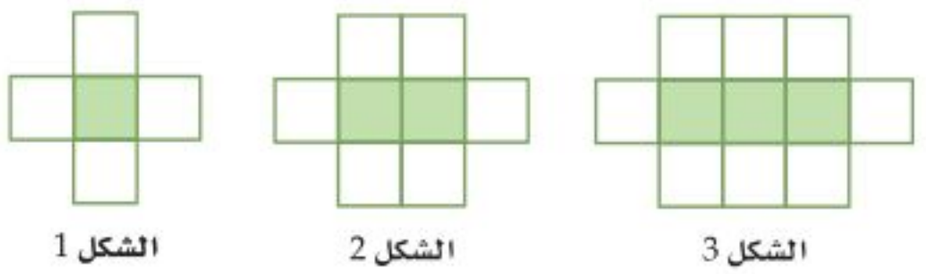
موقع حلول كتبي

حدّد نوع المتتابعة وهل هي حسابية، أم هندسية، أم غير ذلك في كلٍّ مما يأتي، ووضّح إجابتك:

1) $5, -3, -12, -22, -33 \ldots$

2) $\frac{1}{5}, \frac{7}{10}, \frac{6}{5}, \frac{17}{10}, \frac{11}{5} \ldots$

3) هندسة: الأشكال أدناه تُمثّل نمطًا من المربعات المظللة والمربعات غير المظلّلة.



a) اكتب معادلة تُمثّل عدد المربعات غير المظللة (الحدّ النوني) في هذا النمط.

b) هل يمكن الحصول على 84 مربعًا (غير مظلَّل) بالضبط في هذا النمط؟

أوجد الحدّ التاسع في كلٍّ من المتسلسلتين الحسابيتين الآتيتين:

4) $a_1 = 10, d = -5$

5) $a_1 = -8, d = 4$

أوجد مجموع حدود كلٍّ من المتسلسلتين الحسابيتين الآتيتين:

6) $-15 + (-11) + (-7) + \cdots + 53$

7) $a_1 = -12, d = 8, n = 22$

8) ما مجموع حدود المتسلسلة الحسابية $\sum_{k=11}^{50} (-3k + 1)$ ؟

9) اختيار من متعدد: ما مجموع أول 50 عددًا فرديًّا في الأعداد الطبيعية؟

A 625

B 2500

C 2499

D 2401

أوجد الحدّ المطلوب في كلٍّ من المتتابعتين الهندسيتين الآتيتين:

10) $a_2 = 8, r = 2, a_8 = ?$

11) $a_3 = 0.5, r = 8, a_{10} = ?$

12) اختيار من متعدد: ما الأوساط الهندسية في المتتابعة أدناه؟

$0.5, __?__, __?__, __?__, 2048$

A 512.375, 1024.25, 1536.125

B 683, 1365.5, 2048 أو $-683, 1365.5, -2048$

C 2, 8, 32 أو $-2, 8, -32$

D 4, 32, 256 أو $-4, 32, -256$

13) دخل: يعمل فريد في شركة بناء مدة 4 أشهر في السنة. إذا كان راتبه في البداية 5200 ريال في الشهر، وتزيد الشركة راتبه بمعدل 5% شهريًّا. فما المبلغ الذي سيحصل عليه في هذه الأشهر الأربعة؟

أوجد مجموع حدود كلٍّ من المتسلسلتين الهندسيتين الآتيتين:

14) $\sum_{k=1}^{8} 3 \cdot 2^{k-1}$

15) $\sum_{k=1}^{9} 4 \cdot (-1)^{k-1}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي
رابط الموقع الرسمي
www.ien.edu.sa

2-4

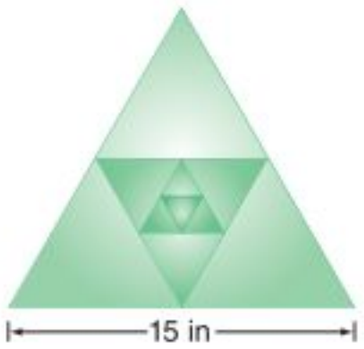
المتسلسلات الهندسية اللانهائية
Infinite Geometric Series

فيما سبق:
درست إيجاد مجموع حدود متسلسلة هندسية منتهية. (الدرس 2-3)

والآن:
- أجد مجموع حدود متسلسلة هندسية غير منتهية (لانهائية).
- أكتب الكسر العشري الدوري في صورة كسر اعتيادي.

المفردات:
المتسلسلة الهندسية اللانهائية
infinite geometric series
المجموع الجزئي لمتسلسلة لا نهائية
partial sum
المتسلسلة المتقاربة
convergent series
المتسلسلة المتباعدة
divergent series
مالانهاية
infinity

لماذا؟



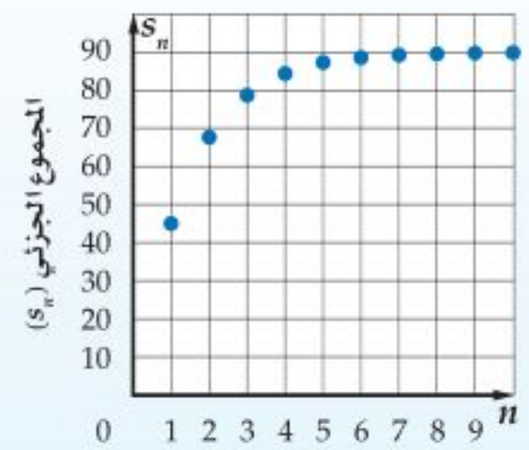
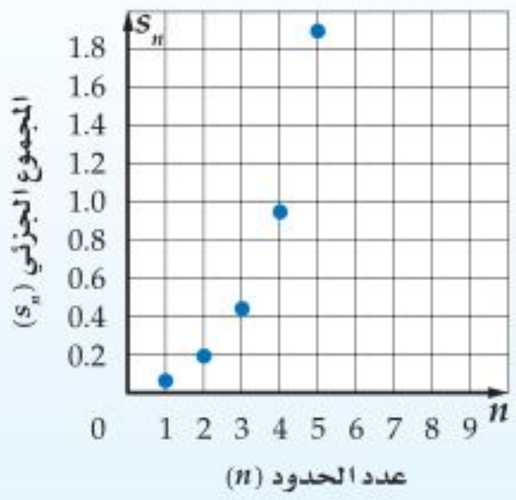
أنشأ رسامٌ لوحةً فنيةً هندسيةً مستعملًا المثلَّثات المتطابقة الأضلاع فقط كما في الشكل المجاور، إذا كان طول ضلع المثلَّث الخارجي 15 in، والمثلَّث الذي يليه من الداخل ينتج عن توصيل منتصفات أضلاع المثلَّث الخارجي، إذا استمر في عملية رسم المثلَّثات الداخلية بهذا النمط، فكم سيكون مجموع محيطات كلِّ المثلَّثات المكوّنة للشكل؟ يمكن الإجابة عن مثل هذه الأسئلة، بدراسة المتسلسلات الهندسية غير المنتهية (اللانهائية).

المتسلسلة الهندسية اللانهائية: المتسلسلة الهندسية التي لها عدد لا نهائي من الحدود تُسمى **المتسلسلة الهندسية اللانهائية**، و**المجموع الجزئي لمتسلسلة لا نهائية** (S_n) هو مجموع عدد محدد (n) من حدودها، وليس مجموع كل حدودها، والمتسلسلة الهندسية اللانهائية تكون **متقاربة** عندما تقترب مجاميعها الجزئية (S_n) من عدد ثابت كلما زادت قيمة n، وعندما لا تقترب هذه المجاميع من عدد ثابت مع زيادة قيمة n، فإن المتسلسلة الهندسية اللانهائية تكون **متباعدة**.

أوجدت في الدرس السابق مجموع أول n حدًّا من متسلسلة هندسية لا نهائية، ويمكنك أيضًا إيجاد مجموع كل حدودها. ففي فقرة "لماذا؟" أعلاه تجد أن مجموع محيطات المثلَّثات المكوّنة للشكل تُعطَى بالمتسلسلة اللانهائية $45 + 22.5 + 11.25 + \ldots$، وكلما زاد عدد حدودها، فإن مجموعها يقترب من 90 in (وهو المجموع الفعلي لها عندما يزداد عدد حدودها إلى **مالا نهاية**). والشكل أدناه يظهر التمثيل البياني للمجموع S_n، حيث $1 \le n \le 10$

مفهوم أساسي
المتسلسلات الهندسية المتقاربة والمتباعدة

أضف إلى مطويتك

المتسلسلات الهندسية المتقاربة	المتسلسلات الهندسية المتباعدة
التعبير اللفظي: إذا كانت النسبة المشتركة (الأساس) $\lvert r \rvert < 1$ ؛ فإن المجموع الجزئي يقترب من عدد ثابت.	**التعبير اللفظي:** إذا كانت النسبة المشتركة (الأساس) $\lvert r \rvert \ge 1$ ؛ فإن المجموع الجزئي لا يقترب من عدد ثابت.
مثال: $45 + 22.5 + 11.25 + \ldots$	**مثال:** $\frac{1}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \ldots$
	

إرشادات للدراسة

المجاميع الجزئية
يمكن توضيح التمثيل البياني للمجاميع الجزئية للمتسلسلة الواردة في فقرة "لماذا؟" بإنشاء الجدول التالي:

عدد الحدود n	المجموع الجزئي S_n
1	$s_1 = 45$
2	$s_2 = 45 + 22.5 = 67.5$
3	$s_3 = 45 + 22.5 + 11.25 = 78.75$
⋮	⋮

مثال 1
المتسلسلات المتقاربة والمتسلسلات المتباعدة

حدّد أيّ المتسلسلتين الهندسيتين الآتيتين متقاربة، وأيّهما متباعدة:

a) $54 + 36 + 24 + \ldots$

أوجد قيمة r

$r = \frac{36}{54} = \frac{2}{3}$، وبما أن $-1 < \frac{2}{3} < 1$ فإن المتسلسلة متقاربة.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

إرشادات للدراسة

القيمة المطلقة

تذكّر أن $|r| < 1$ تعني أن $-1 < r < 1$

أما $|r| \geq 1$ فتعني أن $r \geq 1$ أو $r \leq -1$

b) $8 + 12 + 18 + \ldots$

$r = \frac{12}{8} = 1.5$ ، وبما أن $1.5 > 1$، فإن المتسلسلة متباعدة.

تحقق من فهمك

1A) $2 + 3 + 4.5 + \ldots$ **1B)** $100 + 50 + 25 + \ldots$

إذا كانت $|r| < 1$ ، فإن قيمة r^n تقترب من الصفر كلما زادت قيمة n ، ولذلك فإن المجاميع الجزئية للمتسلسلة الهندسية اللانهائية تقترب من: $\frac{a_1 (1-0)}{1-r} = \frac{a_1}{1-r}$

مفهوم أساسي — **مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية المتقاربة**

أضف إلى مطويتك

مجموع حدود المتسلسلة الهندسية اللانهائية المتقاربة يُرمز له بالرمز S حيث $|r| < 1$

ويُعطى بالصيغة $S = \frac{a_1}{1-r}$

ستتشتق صحة هذه الصيغة في السؤال (36)

وعندما تكون المتسلسلة الهندسية اللانهائية متباعدة، $(|r| \geq 1)$، فإنه لا يوجد مجموع لحدود المتسلسلة؛ لأن قيمة r^n تزداد بلا حدود مع زيادة n .

والجدول المجاور يوضّح المجاميع الجزئية للمتسلسلة الهندسية المتباعدة $4 + 16 + 64 + \ldots$ ، حيث إنه كلما زادت قيمة n، فإن S_n تزداد بسرعة كبيرة جدًّا.

n	S_n
5	1364
10	1398100
15	1431655764

مثال 2 — **مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية**

أوجد مجموع حدود كلٍّ من المتسلسلتين الهندسيتين الآتيتين إن وجد:

a) $\frac{2}{3} + \frac{6}{15} + \frac{18}{75} + \ldots$

الخطوة 1: أوجد قيمة r للتأكد من وجود المجموع من عدمه.

$r = \frac{6}{15} \div \frac{2}{3} = \frac{3}{5}$ — اقسم الحدَ على الحدَ السابق له مباشرة

بما أن $\frac{3}{5} < 1$ ، فإن للمتسلسلة مجموعًا.

الخطوة 2: استعمل المعادلة لإيجاد المجموع.

$S = \frac{a_1}{1-r}$ — صيغة المجموع

$= \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{3}{5}}$ — $a_1 = \frac{2}{3}, r = \frac{3}{5}$

$= \frac{2}{3} \div \frac{2}{5} = \frac{5}{3}$ — بسّط

b) $6 + 9 + 13.5 + 20.25 + \ldots$

$r = \frac{9}{6} = 1.5$؛ وبما أن $1.5 > 1$ ، فإن المتسلسلة متباعدة وليس لها مجموع.

إرشادات للدراسة

التقارب والتباعد

تتقارب المتسلسلة الهندسية اللانهائية عندما تكون القيمة المطلقة لأيّ حدٌ فيها أقلّ من القيمة المطلقة للحدَ السابق له. وتكون المتسلسلة الحسابية اللانهائية متباعدة دائمًا.

تحقق من فهمك

2A) $4 - 2 + 1 - 0.5 + \ldots$ **2B)** $16 + 20 + 25 + \ldots$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

يمكنك استعمال رمز المجموع لكتابة المتسلسلات الهندسية اللانهائية، وهي التي تستمر حدودها إلى اللانهاية؛ أي أنها تستمر دون توقف، ويُستعمل الرمز ∞ فوق رمز المجموع للدلالة على ذلك.

إرشادات للدراسة

رمز المجموع للمتسلسلة الهندسية اللانهائية

$$a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \ldots + a_1 r^{k-1} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} a_1 r^{k-1}$$

مثال 3 رمز المجموع والمتسلسلة اللانهائية

أوجد قيمة: $\sum_{k=1}^{\infty} 18\left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}$

$S = \frac{a_1}{1-r}$ صيغة المجموع

$= \frac{18}{1-\frac{4}{5}}$ $a_1 = 18, r = \frac{4}{5}$ ، ثم بسّط

$= \frac{18}{\frac{1}{5}} = 90$ بسّط

تحقق من فهمك

3) أوجد قيمة: $\sum_{k=1}^{\infty} 12\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}$

الكسور الدورية: الكسر العشري الدوري هو مجموع متسلسلة هندسية لانهائية. فعلى سبيل المثال $0.\overline{45} = 0.454545\ldots = 0.45 + 0.0045 + 0.000045 + \ldots$. ويمكن استعمال صيغة مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية لتحويل هذا الكسر العشري الدوري إلى كسر اعتيادي.

إرشادات للدراسة

الكسور الدورية

الكسر العشري الدوري هو عدد نسبي، ويمكن كتابته في صورة كسر اعتيادي.

مثال 4 تحويل الكسر العشري الدوري إلى كسر اعتيادي

اكتب الكسر العشري الدوري $0.\overline{63}$ في صورة كسر اعتيادي.

الطريقة 1: باستعمال مجموع متسلسلة هندسية لانهائية

$$0.\overline{63} = 0.63 + 0.0063 + \ldots = \frac{63}{100} + \frac{63}{10000} + \ldots$$

$S = \frac{a_1}{1-r}$ صيغة المجموع

$= \frac{\frac{63}{100}}{1-\frac{1}{100}}$ $a_1 = \frac{63}{100}, r = \frac{1}{100}$

$= \frac{63}{99} = \frac{7}{11}$ بسّط

الطريقة 2: باستعمال الخواص الجبرية

$x = 0.\overline{63}$ افترض $x = 0.\overline{63}$

$x = 0.636363\ldots$ اكتب في صورة كسر عشري دوري

$100x = 63.636363\ldots$ اضرب كلا الطرفين في 100

$99x = 63$ اطرح x من $100x$ و $0.\overline{63}$ من $63.\overline{63}$

$x = \frac{63}{99} = \frac{7}{11}$ اقسم الطرفين على 99

إرشادات لحل المسألة

اختيار الأسلوب الأفضل للحساب

في كثير من الأحيان يمكن حلُّ المسألة بأكثر من طريقة، ولذلك استعمل الطريقة التي تفضلها.

تحقق من فهمك

4) اكتب الكسر العشري الدوري $0.\overline{21}$ في صورة كسر اعتيادي.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

تأكد

مثال 1 حدّد أيّ المتسلسلتين الهندسيتين الآتيتين متقاربة، وأيّهما متباعدة:

1) $16 - 8 + 4 - \ldots$ **2)** $1 + 1 + 1 + \ldots$

مثال 2 أوجد مجموع حدود كلٍّ من المتسلسلتين الهندسيتين الآتيتين إن وجد:

3) $440 + 220 + 110 + \ldots$ **4)** $\frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{9}{16} + \ldots$

مثال 3 أوجد قيمة كلٍّ مما يأتي إن وجدت:

5) $\sum_{k=1}^{\infty} 5 \cdot 4^{k-1}$ **6)** $\sum_{k=1}^{\infty} (-2) \cdot (0.5)^{k-1}$

مثال 4 اكتب كلًّا من الكسرين العشريين الدوريين الآتيين في صورة كسر اعتيادي:

7) $0.\overline{35}$ **8)** $0.\overline{642}$

تدرب وحل المسائل

مثال 1 حدّد أيّ المتسلسلات الهندسية الآتية متقاربة، وأيّها متباعدة:

9) $21 + 63 + 189 + \ldots$ **10)** $\frac{3}{4} + \frac{9}{8} + \frac{27}{16} + \ldots$

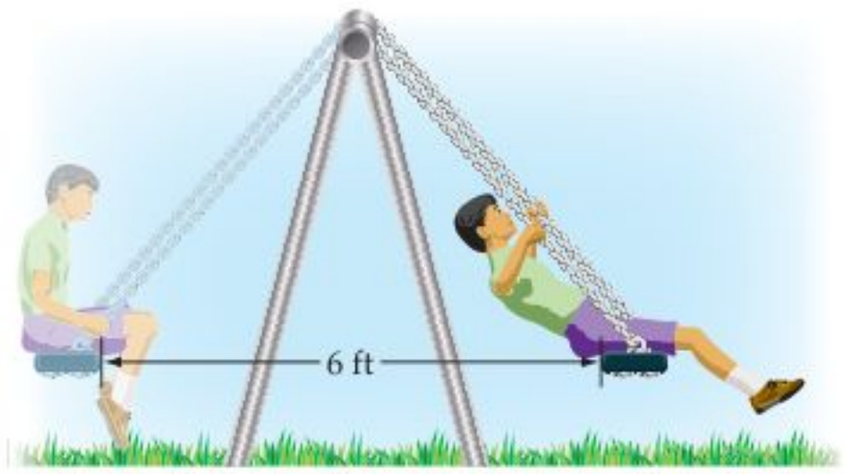
11) $0.1 + 0.01 + 0.001 + \ldots$ **12)** $0.008 + 0.08 + 0.8 + \ldots$

مثال 2 أوجد مجموع حدود كلٍّ من المتسلسلات الهندسية الآتية إن وجد:

13) $18 + 21.6 + 25.92 + \ldots$ **14)** $-3 - 4.2 - 5.88 - \ldots$

15) $\frac{12}{5} + \frac{6}{5} + \frac{3}{5} + \ldots$ **16)** $32 + 40 + 50 + \ldots$

17) أراجيح: انطلق سعيد من نقطة البداية الموضَّحة في الشكل المجاور، تاركًا نفسه بعد ذلك من دون دفع منه، فبدأت مسافة التأرجح تتناقص بمقدار 10% في كل تأرجح، أوجد المسافة الكلية التي يكون سعيد قد قطعها عندما تتوقّف الأرجوحة تمامًا.



مثال 3 أوجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي إن وجدت:

18) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^{k-1}$ **19)** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5}{3} \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^{k-1}$ **20)** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{3} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$

مثال 4 اكتب كلًّا من الكسور العشرية الدورية الآتية في صورة كسر اعتيادي:

21) $0.3\overline{21}$ **22)** $4.\overline{96}$ **23)** $0.12\overline{14}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

الربط بالحياة

استُعملت البطاريات في العالم منذ أكثر من 100 عام، وهي مطلوبة الآن أكثر من أي وقت مضى، ولذلك فإن أكثر من 3 بلايين بطارية تتلف في كلّ عام. ويمكن استعمال بطارية واحدة من البطاريات القابلة للشحن بدلًا من 100 بطارية عادية.

24) بطاريات قابلة للشحن: أعلنت إحدى شركات صناعة البطاريات القابلة للشحن عن بطارية شحن بفاعلية نسبتها 99.9% من الفاعلية السابقة بعد كل مرة يتم فيها شحن البطارية. إذا كانت شحنتها في البداية تكفي للعمل 8 ساعات، فما أكبر عدد من الساعات يمكن أن تُستعمل فيه البطارية؟

أوجد مجموع حدود كلٍّ من المتسلسلات الآتية إن وجد:

25) $\frac{15}{4}+\frac{5}{2}+\frac{5}{3}+\ldots$

26) $-\frac{16}{9}+\frac{4}{3}-1+\ldots$

27) $\frac{21}{16}+\frac{7}{4}+\frac{7}{3}+\ldots$

28) تمثيلات متعددة ستحتاج في هذه المسألة إلى بطاقة مربعة الشكل طول ضلعها لا يقل عن 8 بوصات.

a) حسيًّا: افترض أن مساحة البطاقة تُمثّل وحدة مربعة. قُصّ البطاقة نصفين، خذ أحدهما واعتبره الحدّ الأول، ثم قُصَّ النصف الآخر نصفين واعتبر أحدهما الحدّ الثاني. استمر في هذه العملية، واكتب المتسلسلة اللانهائية، التي تعبِّر عن الأجزاء لديك.

b) عدديًّا: إذا أمكن تقسيم البطاقة بهذه الطريقة إلى مالانهاية، فما مجموع المتسلسلة التي أوجدتها في الفرع a ؟

c) ما العلاقة بين مجموع المتسلسلة ومساحة البطاقة الأصلية؟

29) فيزياء: في تجربة فيزيائية دُحرجت كرة من الفولاذ على مسار أفقي، وتركت لتتدحرج تلقائيًّا، فإذا قطعت الكرة في الدقيقة الأولى 120 ft ، ثم بدأت تقطع في كلّ دقيقة 40% فقط من المسافة التي قطعتها في الدقيقة السابقة، فما المسافة الكلية التي تقطعها الكرة حتى تقف؟

30) بندول: يقطع بندول مسافة 12 cm في الاهتزازة الأولى، وبعد ذلك يقطع 95% من الاهتزازة السابقة، ويستمر على هذا المنوال. أوجد المسافة الكلية التي يقطعها البندول حتى يتوقّف عن الحركة.

31) كرات: أُسقطت كرة مطاطية من ارتفاع 30 ft، فكانت ترتدّ في كلّ مرة مسافة تعادل 95% من المسافة السابقة. إذا استمرت الكرة في الحركة على هذا المنوال، فأوجد المسافة التي تقطعها حتى تقف.

32) متحف العلوم: يُتيح أحد المعارض في متحف للعلوم الفرصة للزوار لتجربة حركة الأجسام على زنبرك. فإذا قام أحدّ الزوار بسحب جسم معلّق بزنبرك إلى أسفل، ثم تركه ليقطع مسافة 1.2 ft إلى أعلى قبل أن يُغيّر اتجاه حركته، وفي كلّ مرة يغيّر الجسم اتجاه حركته تنقص المسافة التي يقطعها بمقدار 20% بالمقارنة مع المسافة في الاتجاه الآخر السابق، فأوجد المسافة الكلية التي يقطعها الجسم.

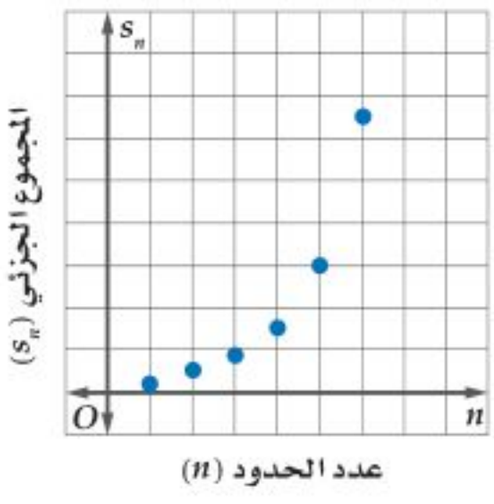
إرشادات للدراسة

أساس المتسلسلة

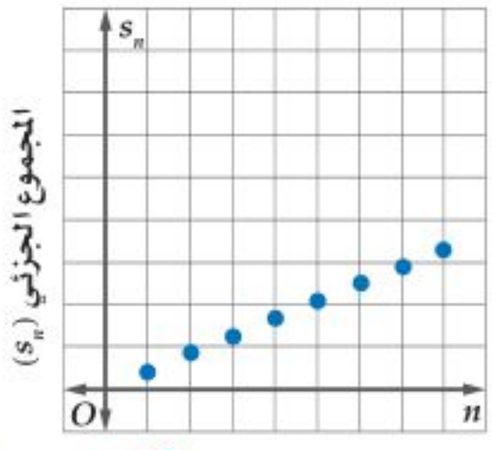
في السؤال 32 تنقص المسافة التي يقطعها الجسم المعلّق بالزنبرك 20%، أي أن المسافة التي يقطعها الجسم تمثّل 80% من المسافة السابقة لها قبل أن يغيّر اتجاه حركته.

اربط بين كلِّ شكل والوصف المناسب له:

33)



34)



a) متسلسلة هندسية متقاربة.

b) متسلسلة هندسية متباعدة.

c) متسلسلة حسابية متقاربة.

d) متسلسلة حسابية متباعدة.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

مسائل مهارات التفكير العليا

35) اكتشف الخطأ: طُلِب إلى كلٍّ من عليٍّ وأحمد أن يجد مجموع المتسلسلة $\ldots - 1 + 1 - 1$ فكانت إجابتاهما كما يأتي. فهل إجابة أيٍّ منهما صحيحة؟ وضّح تبريرك.

علي

المجموع صفر؛ لأن مجموع كلّ زوج من الحدود في المتسلسلة هو الصفر.

أحمد

لا يمكن إيجاد المجموع؛ لأن $|r| \geq 1$، والمتسلسلة متباعدة.

36) صيغ: اشتقّ معادلة مجموع متسلسلة هندسية لا نهائية.

37) تحدٍّ: ما قيم b التي يمكن عندها إيجاد مجموع المتسلسلة $\ldots + 81b^3 + 27b^2 + 9b + 3$ ؟

38) تبرير: متى يكون للمتسلسلة الهندسية مجموع، ومتى لا يكون؟ وضّح تبريرك.

39) مسألة مفتوحة: اكتب المتسلسلة $\ldots - 12 + 6 - 3$ باستعمال رمز المجموع وبطريقتين مختلفتين.

40) اكتب: وضّح لماذا تكون المتسلسلة الحسابية متباعدة دائمًا.

تدريب على اختبار

41) مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية التي حدُّها الأول 27، وأساسها $\frac{2}{3}$ هو :

A 81

B 65

C 34

D 18

42) هندسة: ضُرب نصف قطر كرة كبيرة في العدد $\frac{1}{3}$ للحصول على كرة أصغر. ما حجم الكرة الصغيرة بالمقارنة مع حجم الكرة الكبيرة؟

A $\frac{1}{9}$ حجم الكبيرة

B $\frac{1}{\pi^3}$ حجم الكبيرة

C $\frac{1}{27}$ حجم الكبيرة

D $\frac{1}{3}$ حجم الكبيرة

مراجعة تراكمية

43) مسابقات: تُقيم إحدى محطات التلفاز مسابقة ثقافية، وبعد نهاية كلّ جولة من المسابقة، يتم إقصاء نصف عدد المشاركين. فإذا كان عدد المشاركين في الجولة الأولى 512 شخصًا، فاكتب معادلة لإيجاد عدد المشاركين المتبقّي في المسابقة بعد مرور n جولة. (الدرس 3-2)

44) حياكة: مشْغَلٌ فيه 9 عاملات، تنتج كلٌّ منهن فستانًا واحداً يوميًّا. أوجد الحدود الثمانية الأولى من المتتابعة التي تبيِّن مجموع الفساتين التي ينتجها المشغل بعد كلِّ يوم. (الدرس 2-2)

أوجد ناتج الضرب في كلٍّ مما يأتي: (مهارة سابقة)

45) $(y + 4)(y + 3)$

46) $(9p - 1)(3p - 2)$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي
رابط الموقع الرسمي
www.ien.edu.sa

توسع 2-4

معمل الحاسبة البيانية

نهاية المتتابعة
Sequence Limit

الهدف أستعمل الحاسبة البيانية TI-nspire لأستكشف نهاية متتابعة.

لعلك لاحظت في بعض المتتابعات الهندسية أنه كلما زاد ترتيب الحدّ في المتتابعة اقتربت قيمته من العدد صفر، وبطريقة أخرى كلما زادت قيمة n فإن قيمة a_n تقترب من الصفر. ويُسمّى "الصفر" في هذه الحالة نهايةَ المتتابعة.

توجد أنواع مختلفة من المتتابعات اللانهائية التي يوجد لها نهاية، ولكن إذا لم تقترب حدود المتتابعة من عدد وحيد، فإننا نقول: إن المتتابعة ليس لها نهاية، أو إن نهاية المتتابعة غير موجودة.

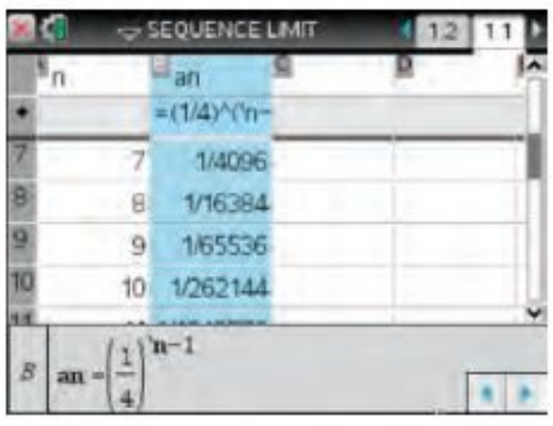
نشاط

أوجد نهاية المتتابعة الهندسية $1, \frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \ldots$

الخطوة 1: أدخل المتتابعة.

صيغة الحد النوني في هذه المتتابعة هي: $a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

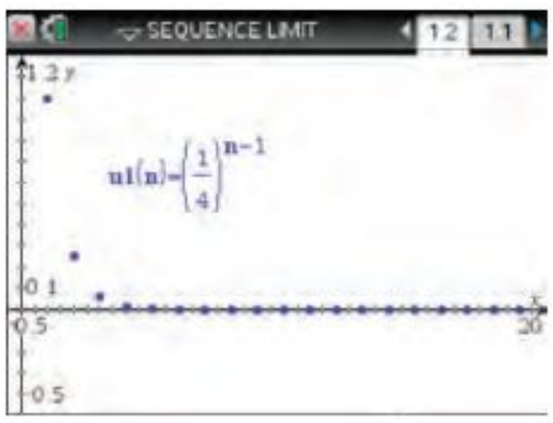
- افتح الآلة الحاسبة بالضغط على (on).
- من الشاشة الظاهرة اختر 1: مستند جديد، ومنها اختر 4: إضافة تطبيق الفواصل وجداول البيانات فيظهر جدول إلكتروني.
- اكتب في أعلى العمود A الرمز n ثم اضغط enter، واكتب في أعلى العمود B الرمز a_n ثم اضغط enter.
- أدخل قيم n في العمود n بالترتيب، وفي العمود الثاني اكتب صيغة الحدِّ النوني $a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ ثم اضغط enter واختر مرجع المتغير فتظهر الشاشة المجاورة.



لاحظ أنه كلما زادت قيمة n، فإن قيم الحدود تقترب من العدد 0، وإذا نزلت إلى أسفل ستلاحظ أنه عندما $n \geq 7$، فإن قيمة كلِّ حدٍّ تكون قريبة من 0، مما يشير إلى أن نهاية المتتابعة هي 0.

الخطوة 2: مثِّل المتتابعة.

- اضغط المفتاح (on) واختر من الشاشة الظاهرة ، ثم اضغط enter فيظهر أمامك مستوى إحداثي، ثم اضغط على (menu) واختر منها 3: إدخال/تحرير الرسم البياني ومنها اختر 1: متتابعة ومنها 6: متتابعة، فتظهر شاشة أدخل فيها صيغة الحدّ النوني والحدّ الأول للمتتابعة واضغط enter.
- لإظهار الشكل كاملًا اضغط (menu) ومنها 4: تكبير/تصغير النافذة واختر منها 6: تكبير/تصغير الربع الاول.



ستلاحظ أن التمثيل البياني أيضًا يوضّح أن قيم الحدود تقترب من 0. وفي الواقع عندما $n \geq 3$، فإن النقاط تظهر كأنها على المحور الأفقي، ممّا يعني أن نهاية المتتابعة هي 0.

تمارين:

أوجد نهاية كلٍّ من المتتابعات الآتية:

1) $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$
2) $a_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n$
3) $a_n = 5^n$
4) $a_n = \frac{1}{n^2}$
5) $a_n = \frac{3^n}{3^n + 1}$
6) $a_n = \frac{n^2}{n + 2}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي
ابحث الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

2-5

نظرية ذات الحدَّين
The Binomial Theorem

فيما سبق: درست التوافيق واستعمالاتها. (مهارة سابقة)

والآن:
- أستعمل مثلَّث باسكال في إيجاد معاملات مفكوك المقدار $(a+b)^n$.
- أستعمل نظرية ذات الحدَّين في إيجاد مفكوك المقدار $(a+b)^n$.

المفردات:
مثلَّث باسكال
Pascal's triangle
نظرية ذات الحدَّين
Binomial Theorem

لماذا؟

يريد مدير معمل للتحاليل الطبية أن يستأجر 6 متخصِّصين من منطقتين مختلفتين بشكل عشوائي. فإذا كان عدد المتخصصين في المنطقتين متساويًا، فما احتمال أن يختار 4 متخصِّصين من المنطقة الأولى، واثنين من المنطقة الثانية؟

مثلَّث باسكال: يُنسبُ **مثلَّث باسكال** إلى العالم الفرنسي بليز باسكال (1662–1623)، على الرغم من قيام العديد من العلماء بدراسته قبله في بلاد المسلمين والهند وبلاد فارس والصين وإيطاليا، ويتكون المثلَّث من صفوف يكون بداية كل صف فيه ونهايته العدد 1، وكل عدد من الأعداد الأخرى في الصف، يكون ناتج جمع العددين اللذين فوقه على اليمين واليسار مباشرة، ويمكن استعماله لإيجاد معاملات مفكوك المقدار: $(a+b)^n$.

$(a+b)^0$ 1
$(a+b)^1$ 1 1
$(a+b)^2$ 1 2 1
$(a+b)^3$ 1 3 3 1
$(a+b)^4$ 1 4 6 4 1

1 + 3 = 4 ، 3 + 3 = 6 ، 3 + 1 = 4

فيكون مفكوك $(a+b)^4$ هو

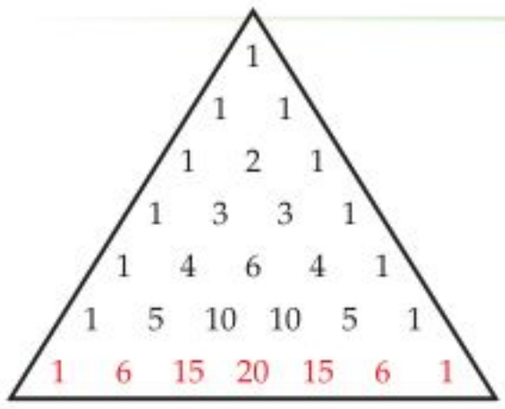
الأُسس تبدأ من 4 وتتناقص إلى صفر

$$(a+b)^4 = 1a^4b^0 + 4a^3b^1 + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + 1a^0b^4$$

الأُسس تبدأ من صفر وتتزايد إلى 4

$$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

لاحظ أن عدد الحدود في مفكوك $(a+b)^4$ هو 5 حدود، ومجموع الأسس في كل حدٍّ هو 4



مثال 1 من واقع الحياة — **استعمال مثلَّث باسكال**

بالعودة إلى فقرة "لماذا؟"، أوجد احتمال اختيار 4 متخصِّصين من المنطقة الأولى، واثنين من المنطقة الثانية، وذلك بإيجاد مفكوك $(a+b)^6$.

استعمل النمط أعلاه في كتابة مثلَّث باسكال لـ $(a+b)^6$.

$$(a+b)^6 = 1a^6b^0 + 6a^5b^1 + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6a^1b^5 + 1a^0b^6$$

$$= a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

عند جمع قيم معاملات كثيرة الحدود، نجد أنه يوجد 64 توفيقًا من متخصِّصي المنطقتين يمكن استئجارهم، وبما أن العدد 15 في المقدار $15a^4b^2$ يُمثِّل عدد التوافيق التي فيها 4 متخصِّصين من المنطقة الأولى واثنان من المنطقة الثانية، لذلك فإن احتمال استئجار 4 متخصِّصين من المنطقة الأولى، واثنين من المنطقة الثانية يساوي $\frac{15}{64}$ أو 23% تقريبًا، وذلك بحسب تعريف الاحتمال النظري لحادثة، حيث إن عدد الطرائق الممكنة للحادثة هو 15، وعدد الطرائق جميعها 64.

تحقق من فهمك

2) بالعودة إلى فقرة **"لماذا"**، إذا أراد مدير معمل التحاليل الطبية أن يستأجر 8 متخصِّصين، فما احتمالات أن يختار 6 متخصِّصين من المنطقة الأولى واثنين من المنطقة الثانية؟

تاريخ الرياضيات

أبو بكر محمد بن الحسن الكرخي
عالم رياضي مسلم، وهو أول من أوجد المثلَّث المشهور الذي يُسمى الآن مثلَّث باسكال.

مراجعة المفردات
التوافيق يسمى عدد طرق التشكيل الممكنة لمجموعة عناصر ليس لترتيبها أهمية بالتوافيق.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

نظرية ذات الحدَّين: يمكن استعمال **نظرية ذات الحدَّين**؛ لإيجاد مفكوك ذات الحدَّين بدلًا من استعمال مثلَّث باسكال.

مفهوم أساسي — نظرية ذات الحدين

أضف إلى مطويتك

إذا كان n عددًا طبيعيًّا، فإن :

$$(a+b)^n = {}_nC_0\, a^n b^0 + {}_nC_1\, a^{n-1} b^1 + {}_nC_2\, a^{n-2} b^2 + \ldots + {}_nC_n\, a^0 b^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\, a^{n-k}\, b^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}\, a^{n-k}\, b^k$$

عند استعمال النظرية عوِّض عن n بقيمة الأُسّ. ولاحظ كيف ستتبع الحدود النمطَ نفسَه في مثلَّث باسكال، وكيف تتماثل المعاملات، وإذا كانت الإشارة بين الحدّين سالبة $(a-b)^n$، فاكتبها بالشكل $(a+(-b))^n$ قبل إيجاد المفكوك.

مثال 2 — استعمال نظرية ذات الحدين

أوجد مفكوك $(a+b)^7$.

الطريقة الأولى: استعمال التوافيق .

استبدل 7 مكان n في نظرية ذات الحدَّين .

$$(a+b)^7 = a^7 + {}_7C_1\, a^6 b + {}_7C_2\, a^5 b^2 + {}_7C_3\, a^4 b^3 + {}_7C_4\, a^3 b^4 + {}_7C_5\, a^2 b^5 + {}_7C_6\, a b^6 + b^7$$

$$= a^7 + \frac{7!}{6!}a^6 b + \frac{7!}{2!5!}a^5 b^2 + \frac{7!}{3!4!}a^4 b^3 + \frac{7!}{4!3!}a^3 b^4 + \frac{7!}{5!2!}a^2 b^5 + \frac{7!}{6!}a b^6 + b^7$$

$$= a^7 + 7a^6 b + 21a^5 b^2 + 35a^4 b^3 + 35a^3 b^4 + 21a^2 b^5 + 7a b^6 + b^7$$

الطريقة الثانية: استعمال مثلَّث باسكال

استعمل نظرية ذات الحدَّين لإيجاد القوى، وبدلًا من إيجاد المعاملات باستعمال التوافيق، استعمل الصف السابع من مثلَّث باسكال.

6		1	6	15	20	15	6	1
7	1	7	21	35	35	21	7	1

$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6 b + 21a^5 b^2 + 35a^4 b^3 + 35a^3 b^4 + 21a^2 b^5 + 7a b^6 + b^7$$

تحقق من فهمك

2) أوجد مفكوك $(x+y)^{10}$.

عندما يكون معاملا الحدَّين في ذات الحدَّين يختلف عن العدد 1، فإن المعاملات لن تكون متماثلة. وفي مثل هذه الحالة استعمل نظرية ذات الحدَّين.

مثال 3 — استعمال نظرية ذات الحدَّين عندما يختلف المعاملان عن 1

أوجد مفكوك $(5a-4b)^4$.

$$(5a-4b)^4 = (5a)^4 + {}_4C_1\,(5a)^3(-4b) + {}_4C_2\,(5a)^2(-4b)^2 + {}_4C_3\,(5a)(-4b)^3 + {}_4C_4\,(-4b)^4$$

$$= 625a^4 + \frac{4!}{3!}(125a^3)(-4b) + \frac{4!}{2!2!}(25a^2)(16b^2) + \frac{4!}{3!}(5a)(-64b^3) + 256b^4$$

$$= 625a^4 - 2000a^3 b + 2400a^2 b^2 - 1280a b^3 + 256b^4$$

تحقق من فهمك

3) أوجد مفكوك $(3x-2y)^5$.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

قراءة الرياضيات

كُتب عدد التوافيق لعناصر عددها ن مأخوذ ر عنصرًا كل مرَّة سابقًا بالرمز ${}^{ن}ق_{ر}$ ، وسيُرمز له في هذا الكتاب بالرمز ${}_nC_r$.

إرشادات للدراسة

توافيق

- $0! = 1$
- ${}_nC_r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$
- ${}_nC_0 = \frac{n!}{0!\,(n-0)!} = \frac{1}{1} = 1$
- ${}_nC_n = 1$
- ${}_nC_n = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{1}{1} = 1$

إرشادات للدراسة

الحاسبة العلمية

يمكن حساب قيمة ${}_nC_r$ باستعمال الحاسبة العلمية. اضغط على العدد n ثم ÷ ثم SHIFT ثم العدد r ثم = مثال

$6C_3$: 6 SHIFT ÷ 3 = 20

إرشادات للدراسة

إشارات حدود مفكوك $(a+b)^n$

عند إيجاد مفكوك $(a+b)^n$، تكون إشارة كلّ حدٍّ في المفكوك تعتمد على إشارة كلٍّ من a ، b. فتكون إشارة الحدود كلها موجبة إذا كانت إشارة a وإشارة b موجبتين، وتكون إشارة الحدود الزوجية سالبة إذا كانت إشارة b فقط سالبة.

موقع حلول كتبي

تحتاج في بعض الأحيان إلى إيجاد قيمة أحد الحدود في المفكوك، ويمكنك عندها استعمال الحد العام في صيغة المجموع لنظرية ذات الحدَّين بحيث تجد الحدَّ الذي ترتيبه $k+1$ أو t_{k+1} في مفكوك $(a+b)^n$ باستعمال الصيغة $t_{k+1} = {}_nC_k\, a^{n-k}\, b^k$

مثال 4 إيجاد قيمة حدّ معيّن

أوجد قيمة الحدّ الخامس في مفكوك $(y+z)^{11}$.

استعمل صيغة الحدِّ العام لإيجاد الحدِّ الخامس في مفكوك $(y+z)^{11}$

$$t_{k+1} = {}_nC_k\, a^{n-k}\, b^k$$

حيث $n = 11$، وبما أن الحدَّ المطلوب هو الحدُّ الخامس

أي $t_{k+1} = t_5$ ؛ لذا $k = 4$

عند الحد الخامس تكون $k = 4$

إذن $t_5 = t_{4+1} = {}_{11}C_4\, y^{11-4}\, z^4$

${}_{11}C_4 = \frac{11!}{4!\,7!} = 330$

$= 330\, y^7\, z^4$

تحقق من فهمك

4) أوجد قيمة الحدِّ السادس في مفكوك $(c+d)^{10}$.

ملخص المفاهيم

أضف إلى مطويتك

مفكوك ذات الحدّين

في مفكوك ذات الحدَّين $(a+b)^n$:

- عدد الحدود $n+1$.
- أسُّ a في الحدّ الأول هو n، وكذلك أسُّ b في الحدّ الأخير هو n .
- يقلُّ أسُّ a بمقدار واحد، ويزيد أسُّ b بمقدار واحد في أيّ حدَين متتاليين.
- مجموع الأسس في أي حدٍّ يساوي n دائمًا.
- المعاملات في المفكوك متماثلة.

تأكد

الأمثلة 3–1 أوجد مفكوك كلٍّ مما يأتي:

1) $(g+h)^7$ **2)** $(x+3)^5$ **3)** $(y-4z)^4$

4) ولادة: إذا كان احتمال ولادة ذكر يساوي احتمال ولادة أنثى عند المرأة، فاستعمل نظرية ذات الحدَّين لإيجاد احتمال أن يكون عدد الإناث 5 في ست ولادات. (لا تحسب التوائم).

مثال 4 أوجد قيمة الحدِّ المطلوب في مفكوك كلٍّ ممّا يأتي:

5) الحدّ السادس في مفكوك $(2c-3d)^8$

6) الحدّ الأخير في مفكوك $(5x+y)^5$

7) الحدّ الأول في مفكوك $(3a+8b)^5$

تدرب وحل المسائل

الأمثلة 3–1 أوجد مفكوك كلٍّ ممّا يأتي:

8) $(c-d)^7$ **9)** $(2a+4b)^4$ **10)** $(3a-4b)^5$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

11) لجان: إذا أردنا تكوين لجنة من 10 طلاب من طلاب الصفَّين الأول الثانوي والثاني الثانوي في مدرسة، فما احتمال أن يكون في اللجنة 7 طلاب من الصف الأول الثانوي، علمًا بأن عدد طلّاب الصفين متساوٍ، وأن الاختيار يتم عشوائيًّا.

مثال 4 **أوجد قيمة الحدّ المطلوب في كلٍّ ممَّا يأتي:**

12) الحدّ الرابع في مفكوك $(y - 3x)^6$.

13) الحدّ السادس في مفكوك $(4x + 5y)^6$.

14) الحدّ الخامس في مفكوك $(x - 4)^9$.

15) الحدّ الرابع في مفكوك $(c + 6)^8$.

أوجد مفكوك كلٍّ ممّا يأتي:

16) $\left(x - \frac{1}{3}\right)^4$

17) $\left(2b + \frac{1}{4}\right)^5$

18) كرة سلّة: إذا كان احتمال النجاح في رمي كرة السلَّة لأحد اللاعبين يساوي احتمال الفشل عند رميها من مسافة محدَّدة، فأوجد احتمال أن ينجح هذا اللاعب في إصابة الهدف في 11 مرَّة من بين 12 محاولة.

19) كرة قدم: إذا كان احتمال أن يسجِّل خالد هدفًا من ضربة جزاء هو 70% ، فأوجد احتمال أن يسجِّل 9 أهداف من 10 ضربات.

إرشادات لحل المسألة

نظرية ذات الحدَّين والاحتمال

يمكنك استعمال نظرية ذات الحدَّين في حساب نتائج التجارب المستقلَّة المتكرِّرة. فإذا كان p يمثل احتمال النجاح، و $(q = 1 - p)$ يمثّل احتمال الفشل، فإن احتمال أن تكون x محاولة ناجحة من بين n محاولة تُعطى بالصيغة التالية

$$p(x) = {}_nC_x\, p^x\, q^{n-x}$$

مسائل مهارات التفكير العليا

20) تحدٍّ: أوجد قيمة الحدّ السادس في مفكوك $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^{12}$، ووضّح إجابتك .

21) تبرير: وضّح كيف تتشابه الحدود في مفكوك كلٍّ من $(x - y)^n$, $(x + y)^n$ ، وكيف تختلف.

22) مسألة مفتوحة: اكتب قوة لذات حدَّين، الحدّ الثاني في مفكوكها يساوي $6x^4y$.

23) اكتب: وضّح كيف يمكنك كتابة حدود مثلَّث باسكال.

تدريب على اختبار

24) احتمال: يحتوي صندوق على 7 أقلام رصاص حمراء مبرية، و5 أقلام رصاص صفراء مبرية، و5 أقلام صفراء غير مبرية. إذا تمَّ سحب قلم من الصندوق بصورة عشوائية، فما احتمال أن يكون القلم أصفر، علمًا بأنه من الأقلام المبرية؟

A $\frac{5}{12}$ **B** $\frac{7}{15}$ **C** $\frac{5}{10}$ **D** $\frac{1}{5}$

25) أيُّ العلاقات التالية تُمثّل دالّة خطِّية؟

A $y = \frac{x + 3}{x + 2}$ **B** $y = (3x + 2)^2$

C $y = \frac{x + 3}{2}$ **D** $y = |3x| + 2$

مراجعة تراكمية

أوجد الحدود الخمسة الأولى في كلٍّ من المتتابعتين الحسابيتين الآتيتين: (الدرس 2-2)

26) $a_1 = -2,\ a_{n+1} = a_n + 5$

27) $a_6 = -7,\ a_7 = -1$

28) أوجد مجموع المتسلسلة $-6 + 3 - \frac{3}{2} + \ldots$. (الدرس 2-4)

29) بيّن ما إذا كانت الجملة $\frac{(n+1)(n+1)}{2} = 2$ صحيحة عندما $n = 1$ ، أم لا، وفسّر إجابتك. (مهارة سابقة)

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

توسع

معمل الجبر

2-5 التوافيق ومثلّث باسكال
Combinations and Pascal's Triangle

الهدف أستعمل التوافيق ومثلّث باسكال لإيجاد عدد طرق اختيار الجوائز في الألعاب.

تذكّر أن اختيار مجموعة من العناصر بحيث يكون الترتيب غير مهمّ يُسمّى توفيقًا. فعلى سبيل المثال، اختيار قطعتين من الشطائر من بين 6 قطع هو توافيق 6 عناصر مأخوذة مثنى مثنى في كل مرّة. ويمكن كتابة عدد التوافيق في هذه الحالة في الصورة: ${}_6C_2$ أو $C(6, 2)$.

نشاط

مسابقة ثقافية تتكون من 5 مراحل، للفائز في كل مرحلة جائزة (يختارها من بين جوائز المسابقة الخمس). فإذا اشترك مهند في المسابقة، فإن عدد الجوائز التي يمكن الحصول عليها هو 5 أو 4 أو 3 أو 2 أو 1 أو 0 جوائز. أوجد عدد الطرق الممكنة لاختيار الجوائز.

الخطوة 1: إذا لم يفُز المتسابق في أيِّ مرحلة من مراحل المسابقة؛ فإنه يحصل على 0 جائزة، وهذا يُمثّل 5 عناصر مأخوذة 0 في كل مرَّة.

وتعلم مسبقًا أن ${}_nC_0 = 1$ ؛ لذا فإن ${}_5C_0 = 1$.

وهذا يعني أنه توجد طريقة واحدة فقط للحصول على 0 من الجوائز.

أما إذا فاز المتسابق في مرحلة واحدة، فإن أيًّا من الجوائز الخمس يمكنه اختيارها. وإذا فاز في مرحلتين فيمكنه اختيار أيِّ جائزتين. وإذا فاز في ثلاث مراحل فيمكنه اختيار أيِّ 3 جوائز وهكذا. بكم طريقة يمكن له اختيار جائزة واحدة، وجائزتين، و3 جوائز، و4 جوائز، و5 جوائز؟

يمكن تحديد عدد الطرق باستعمال مثلّث باسكال.

الخطوة 2: تفحّص مثلّث باسكال.

اكتب قائمة الصفوف لمثلّث باسكال من 0 إلى 5

الصف 0					1					
الصف 1				1		1				
الصف 2			1		2		1			
الصف 3		1		3		3		1		
الصف 4	1		4		6		4		1	
الصف 5	1	5		10		10		5		1

يمكن الحصول على عدد طرق اختيار الجوائز من الصفّ الخامس. فالعدد الأول في الصفّ الخامس يُمثّل عدد طرق الحصول على 0 جائزة، والعدد الثاني يُمثّل عدد طرق الحصول على جائزة واحدة، والعدد الثالث يُمثّل عدد طرق الحصول على جائزتين وهكذا.

حلِّل النتائج:

1) اكتب تخمينًا حول كيفية استعمال الأعداد في أحد صفوف مثلّث باسكال لإيجاد عدد طرق اختيار $0, 1, 2, 3, 4, \ldots, n$ من العناصر من بين n من العناصر.

2) على افتراض أن قواعد المسابقة تغيّرت، بحيث أصبح عدد المراحل 6 وعدد الجوائز 6. فأوجد عدد الطرق التي يمكن من خلالها اختيار $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ جوائز.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي
رابط حلول الرياضي
www.ien.edu.sa

2-6

البرهان باستعمال مبدأ الاستقراء الرياضيّ
Proof by Principle of Mathematical Induction

فيما سبق:
درست إيجاد مجموع متسلسلة حسابية. (الدرس 2-2)

والآن:
- أبرهن الجمل الرياضية باستعمال مبدأ الاستقراء الرياضيّ.
- أثبت خطأ جملة رياضية بإيجاد مثال مضادٌ.

المفردات:
مبدأ الاستقراء الرياضيّ
mathematical induction
فرضية الاستقراء
induction hypothesis

لماذا؟

إذا صُفَّت قطع الدومينو متقاربة كما في الصورة المجاورة، فإن كل ما نحتاج إليه لإسقاط القطع جميعها هو إسقاط القطعة الأولى.
وينطبق هذا تمامًا على مبدأ الاستقراء الرياضيّ.

مبدأ الاستقراء الرياضيّ: مبدأ الاستقراء الرياضيّ هو أسلوب لبرهنة الجمل الرياضية المتعلِّقة بالأعداد الطبيعية.

مفهوم أساسيٌّ — مبدأ الاستقراء الرياضيّ

أضف الى مطويتك

لبرهنة أن جملة ما صحيحة للأعداد الطبيعية جميعها n، اتبع الخطوات الآتية :

الخطوة 1: برهن أن الجملة صحيحة عندما $n = 1$.

الخطوة 2: افترض أن الجملة صحيحة عند العدد الطبيعي k . وهذا الفرض يُسمّى فرضية الاستقراء .

الخطوة 3: برهن أن الجملة صحيحة عند العدد الطبيعي التالي $k + 1$.

مثال 1 — برهان المجموع

برهن أن : $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

الخطوة 1: عندما $n = 1$ ، فإن الطرف الأيسر من المعادلة هو $1^3 = 1$

والطرف الأيمن هو $\frac{1^2(1+1)^2}{4} = 1$ ؛ إذن الجملة صحيحة عندما $n = 1$.

الخطوة 2: افترض أن $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$ صحيحة، حيث k عدد طبيعي .

الخطوة 3: برهن أن الجملة صحيحة عندما $n = k + 1$.

أيْ برهن أن الجملة $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$ صحيحة.

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$ — فرضية الاستقراء

$1^3 + 2^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3$ — اجمع $(k+1)^3$ لكلا الطرفين

$= \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4}$ — اجمع

$= \frac{(k+1)^2[k^2 + 4(k+1)]}{4}$ — حلّل

$= \frac{(k+1)^2(k^2 + 4k + 4)}{4}$ — بسّط

$= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$ — حلّل

العبارة الأخيرة هي الطرف الأيمن من المعادلة المطلوب إثباتها عندما $n = k + 1$، وبهذا فإن العلاقة صحيحة عند جميع الأعداد الطبيعية n

تحقق من فهمك

1) برهن أن : $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

وكما في برهان المجموع فإن مبدأ الاستقراء الرياضيّ يمكنك استعماله لبرهنة قابلية القسمة أيضًا.

مثال 2 برهان قابلية القسمة

برهن أن $8^n - 1$ يقبل القسمة على 7 لكل عدد طبيعي n .

الخطوة 1: عندما $n = 1$ ، فإن $8^n - 1 = 8^1 - 1 = 7$. وبما أن 7 يقبل القسمة على 7 ، فإن الجملة صحيحة عندما $n = 1$.

الخطوة 2: افترض أن $8^k - 1$ يقبل القسمة على 7 ، حيث k عدد طبيعي، وهذا يعني أنه يوجد عدد طبيعي r بحيث إن $8^k - 1 = 7r$

الخطوة 3: برهن صحة الجملة عند $n = k + 1$

أي برهن أن $8^{k+1} - 1$ يقبل القسمة على 7 ؛

$8^k - 1 = 7r$	فرضية الاستقراء
$8^k = 7r + 1$	أضف 1 لكلا الطرفين
$8(8^k) = 8(7r + 1)$	اضرب كلا الطرفين في 8
$8^{k+1} = 56r + 8$	بسّط
$8^{k+1} - 1 = 56r + 7$	اطرح 1 من كلا الطرفين
$8^{k+1} - 1 = 7(8r + 1)$	حلّل

وبما أن r عدد طبيعي، فإن $8r + 1$ عدد طبيعي، وهذا يعني أن $7(8r + 1)$ يقبل القسمة على 7 ؛ إذن $8^{k+1} - 1$ يقبل القسمة على 7 .

وهذا يبرهن أن $8^n - 1$ يقبل القسمة على 7 لكل عدد طبيعي n .

تحقق من فهمك

2) برهن أن $7^n - 1$ يقبل القسمة على 6 لكل عدد طبيعي n.

إرشادات للدراسة

قابلية القسمة

يقال عن عدد ما: إنه يقبل القسمة على 4 إذا أمكن كتابة ذلك العدد في الصورة $4r$، حيث r عدد طبيعي، ويُستعمل هذا التعبير في برهان قابلية القسمة.

مراجعة المفردات

مثال مضادٌّ

أحد معاني كلمة مضادّ هو مناقض، لذلك فإن المثال المضادّ هو مثال يناقض الفرضية.

الأمثلة المضادَّة يمكنك إثبات خطأ جملة رياضية من خلال مبدأ الاستقراء الرياضيّ، وأسهل طريقة لعمل ذلك هي إيجاد مثال مضادٍّ تكون عنده الجملة الرياضية خاطئة.

مثال 3 استعمال المثال المضادّ لإثبات خطأ جملة رياضية

أعطِ مثالًا مضادًّا يبيِّن خطأ الجملة: "$2^n + 2n^2$ تقبل القسمة على 4 ، حيث n أي عدد طبيعي".

اختبر قيمًا مختلفة للعدد n

n	$2^n + 2n^2$	هل تقبل القسمة على العدد 4 ؟
1	$2^1 + 2(1)^2 = 2 + 2 = 4$	نعم
2	$2^2 + 2(2)^2 = 4 + 8 = 12$	نعم
3	$2^3 + 2(3)^2 = 8 + 18 = 26$	لا

إذن فالقيمة $n = 3$ تُعدُّ مثالًا مضادًّا للجملة.

تحقق من فهمك

3) أعطِ مثالًا مضادًّا يبيّن خطأ الجملة: "$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(3n-1)}{2}$، حيث n أيّ عدد طبيعي".

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

تأكد

مثال 1 برهن صحّة كلٍّ من الجملتين الآتيتين للأعداد الطبيعية جميعها:

1) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$ **2)** $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

3) نظرية الأعداد: يُسمّى العدد عددًا مثلَّثيًّا، إذا أمكن تمثيله بنقاط على شكل مثلَّث كما في الشكل أدناه.

a) إذا علمت أن العدد المثلَّثي الأول هو 1، فأوجد الأعداد المثلَّثية الخمسة التالية.

b) اكتب قاعدة لإيجاد العدد المثلَّثي الذي ترتيبه n .

c) برهن أنّ مجموع أول n من الأعداد المثلَّثية يساوي: $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$.

مثال 2 برهن صحّة كلٍّ من الجملتين الآتيتين للأعداد الطبيعية جميعها:

4) $10^n - 1$ يقبل القسمة على 9 **5)** $4^n - 1$ يقبل القسمة على 3

مثال 3 أعطِ مثالًا مضادًّا يُبيّن خطأ كلٍّ من الجملتين الآتيتين، حيث n أيّ عدد طبيعي:

6) $3^n + 1$ يقبل القسمة على 4 **7)** $2^n + 3^n$ يقبل القسمة على 4

تدرب وحل المسائل

مثال 1 برهن صحّة كلٍّ من الجمل الآتية للأعداد الطبيعية جميعها:

8) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$

9) $2 + 5 + 8 + \ldots + (3n - 1) = \frac{n(3n+1)}{2}$

10) $1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$

11) $3 + 7 + 11 + \cdots + (4n - 1) = 2n^2 + n$

12) هندسة: مستعملًا مبدأ الاستقراء الرياضيّ والهندسة؛ برهن صحة قاعدة مجموع قياسات الزوايا الداخلية لمضلَّع محدَّب $[(n-2).180]$، حيث n عدد الأضلاع. لكل $n \geq 3$.

مثال 2 برهن صحّة كلٍّ من الجملتين الآتيتين للأعداد الطبيعية جميعها:

13) $9^n - 1$ يقبل القسمة على 8.

14) $12^n + 10$ يقبل القسمة على 11.

مثال 3 أعطِ مثالًا مضادًّا يُبيّن خطأ كلٍّ من الجملتين الآتيتين، حيث n أيّ عدد طبيعي:

15) $1 + 8 + 27 + \cdots + n^3 = (2n + 2)^2$

16) $n^2 + n + 23$ عدد أولي.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

الربط بالحياة

تظهر حدود متتابعة فيبوناشي كثيرًا، كما في بذور قرص تباع الشمس، إذ يمكن رسم 13 أو 21 أو 55 شكلًا حلزونيًا اعتمادًا على درجة ميل الشكل، وجميعها من عناصر متتابعة فيبوناشي.

17) متتابعة فيبوناشي: تبدأ متتابعة فيبوناشي بالحدود ... , 8 , 5 , 3 , 2 , 1 , 1 , ويكون الحدّ التالي فيها مساويًا لمجموع الحدّين السابقين له مباشرة (وذلك بعد الحدّ الثاني). فإذا كان f_n يمثّل عدد فيبوناشي ذا الرقم n، فبرهن أن:

$$f_1 + f_2 + \ldots + f_n = f_{n+2} - 1$$

برهن صحة كلِّ جملة مما يأتي لجميع الأعداد الطبيعية، أو أعطِ مثالًا مضادًّا يُثبت خطأها:

18) $7^n + 5$ يقبل القسمة على 6

19) $18^n - 1$ يقبل القسمة على 17

20) $n^2 + 21n + 7$ عدد أولي.

21) $n^2 + 3n + 3$ عدد أولي.

22) $500 + 100 + 20 + \ldots + 4 \cdot 5^{4-n} = 625\left(1 - \frac{1}{5^n}\right)$

مسائل مهارات التفكير العليا

23) تحدٍّ: اكتب قاعدة تُمثّل المجموع $2 + 4 + 6 + \ldots + 2n$، ثم برهنها باستعمال مبدأ الاستقراء الرياضيّ.

تبرير: حدّد ما إذا كانت كلٌّ من الجملتين الآتيتين صحيحة أم خطأً. وضّح إجابتك.

24) إذا لم تستطع إيجاد مثال مضادٍّ في جملة رياضية فإنها تكون صحيحة.

25) إذا كانت جملة ما صحيحة عند $n = k$، وعند $n = k + 1$، فإنها تكون صحيحة عند $n = 1$

26) تحدٍّ: برهن أن : $2(11^n) + 5^2$ يقبل القسمة على 3 لكل عدد طبيعي n .

27) مسألة مفتوحة: اكتب قاعدة لإيجاد مجموع متسلسلة ما، ثم برهن على صحتها باستعمال مبدأ الاستقراء الرياضيّ.

28) اكتب: وضّح مبدأ الاستقراء الرياضيّ بمثال من واقع الحياة (غير قطع الدومينو).

تدريب على اختبار

29) أيُّ الأعداد الآتية يُعدّ مثالًا مضادًّا لإثبات خطأ الجملة:

$n^2 + n - 11$ عدد أولي؟

A $n = -6$

B $n = 4$

C $n = 5$

D $n = 6$

30) مبدأ العدّ: يريد حسن وضع كلمة سر للحاسوب الخاص به مكوّنة من 7 رموز، بحيث تكون الرموز الثلاثة الأولى مكوّنة من أحرف اسمه، والرموز الأربعة التالية مكوّنة من أرقام العدد 1986 ، والتي هي سنة ميلاده. ما أكبر عدد من كلمات السر التي يستطيع حسن تكوينها بهذه الطريقة؟

A 72

B 144

C 288

D 576

مراجعة تراكمية

أوجد قيمة الحدّ المطلوب في كلٍّ ممّا يأتي: (الدرس 5-2)

31) الحدّ الرابع في مفكوك $(x + 2y)^6$

32) الحدّ الخامس في مفكوك $(a + b)^6$

33) الحدّ الرابع في مفكوك $(x - y)^9$

أوجد مجموع كلٍّ من المتسلسلتين الآتيتين :

34) $5 + 10 + 15 + 20 + \ldots + 1000$ (الدرس 2-2)

35) $\frac{1}{5} - \frac{1}{15} + \frac{1}{45} - \frac{1}{135} + \ldots$ (الدرس 2-4)

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

ملخص الفصل

مفاهيم أساسية

المتتابعات والمتسلسلات الحسابية (الدرسان 2-2 ، 2-1)

- الحدّ النوني a_n في متتابعة حسابية حدّها الأول a_1 ، وأساسها d يُعطى بالصيغة:
$a_n = a_1 + (n-1)d$، حيث n أي عدد صحيح موجب.
- مجموع أول n حدًّا في متتابعة حسابية: S_n يُعطى بإحدى الصيغتين:
$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$, $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$.

المتتابعات والمتسلسلات الهندسية (الدرسان 2-4 , 2-3)

- الحدّ النوني a_n في متتابعة هندسية حدّها الأول a_1 وأساسها r يُعطى بالصيغة: $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$ ، حيث n أي عدد صحيح موجب.
- مجموع أول n حدًّا في متسلسلة هندسية S_n يُعطى بإحدى الصيغتين:
$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$, $S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1-r}$، حيث $r \neq 1$
- مجموع المتسلسلة الهندسية اللانهائية يُعطى بالصيغة:
$S = \frac{a_1}{1-r}$ ، حيث $|r| < 1$.

نظرية ذات الحدَّين (الدرس 2-5)

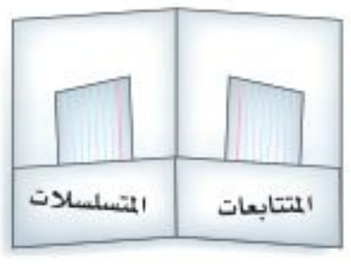
- نظرية ذات الحدَّين:
$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} k! \frac{n!}{(n-k)!} a^{n-k} b^k$

مبدأ الاستقراء الرياضيّ (الدرس 2-6)

- مبدأ الاستقراء الرياضيّ هو طريقة أو أسلوب لبرهنة الجمل المتعلقة بالأعداد الطبيعية.

المطويات منظم افكار

تأكَّد من أن المفاهيم الأساسية مدوَّنة في مطويتك.



المفردات

المتتابعة ص 66
الحدّ ص 66
المتتابعة المنتهية ص 66
المتتابعة غير المنتهية ص 66
المتتابعة الحسابية ص 66
أساس المتتابعة الحسابية (الفرق المشترك) ص 66
المتتابعة الهندسية ص 68
أساس المتتابعة الهندسية (النسبة المشتركة) ص 68
الأوساط الحسابية ص 73
المتسلسلة ص 74
المتسلسلة الحسابية ص 74
المجموع الجزئي ص 74
رمز المجموع ص 75
الأوساط الهندسية ص 81
المتسلسلة الهندسية ص 82
المتسلسلة الهندسية اللانهائية ص87
المجموع الجزئي لمتسلسلة لانهائية ص 87
المتسلسلة المتقاربة ص 87
المتسلسلة المتباعدة ص 87
ما لا نهاية ص 87
مثلّث باسكال ص 94
نظرية ذات الحدّين ص 95
مبدأ الاستقراء الرياضيّ ص 99
فرضية الاستقراء ص 99

اختبار المفردات

حدّد ما إذا كانت كلٌّ من العبارات الآتية صحيحة أم لا. وإذا كانت غير صحيحة، فعدِّل المصطلح الذي تحته خطٌّ لتصبح العبارة صحيحة:

1) تُسمّى المتسلسلة اللانهائية التي يمكن إيجاد مجموع لها، متسلسلة متقاربة.

2) مبدأ الاستقراء الرياضيّ هو أسلوب لبرهنة الجمل الرياضية المتعلِّقة بالأعداد الطبيعية.

3) الأوساط الحسابية للمتتابعة، هي الحدود الموجودة بين أي حدّين غير متتاليين في متتابعة حسابية.

4) الحدّ هو سلسلة من الأعداد مرتّبة بطريقة معينة.

5) يُسمّى مجموع أول n حدًّا من متسلسلة، المجموع الجزئي.

6) المتتابعة الهندسية هي متتابعة نحصل على كل حدٍّ فيها بإضافة قيمة ثابتة إلى الحدّ السابق.

7) تُسمّى المتسلسلة الهندسية اللانهائية التي لا يمكن إيجاد مجموع لها، متسلسلة متقاربة.

8) 17 , 11 هما وسطان هندسيان بين العددين 23 , 5 في المتتابعة 5, 11, 17, 23 .

9) باستعمال نظرية ذات الحدّين فإن:
$(x-2)^4 = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16$.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

مراجعة الدروس

2-1 المتتابعات بوصفها دوالَ ص 71–66

أوجد قيمة الحدّ المطلوب في كلٍّ من المتتابعات الحسابية الآتية:

10) $a_1 = 9, d = 3, a_{14} = ?$

11) $a_1 = -3, d = 6, a_{22} = ?$

حدِّد نوع المتتابعة، ثم أوجد الحدود الأربعة التالية في كل من المتتابعتين الآتيتين ومثّل الحدود السبعة الأولى بيانيًّا:

12) $10, 7, 4, \ldots$

13) $800, 200, 50, \ldots$

مثال 1

أوجد الحدّ الحادي عشر في المتتابعة الحسابية التي فيها:

$a_1 = -15, d = 6$

$a_n = a_1 + (n-1)d$	الحدّ النوني في المتتابعة الحسابية
$a_{11} = -15 + (11-1)6$	$n = 11, a_1 = -15, d = 6$
$a_{11} = 45$	بسّط

2-2 المتتابعات والمتسلسلات الحسابية ص 79–72

أوجد الأوساط الحسابية في كلٍّ من المتتابعات الآتية:

14) $-12, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, 8$

15) $15, \underline{?}, \underline{?}, 29$

16) $12, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, -8$

17) $72, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, 24$

18) توفير: يوفِّر باسل 160 ريالًا كل شهرين. إذا استمر في التوفير بهذا المعدل مدَّة سنتين، فما المبلغ الذي سيوفِّره في نهاية السنتين؟

أوجد S_n كلٍّ من المتسلسلات الحسابية الآتية:

19) $a_1 = 16, a_n = 48, n = 6$

20) $a_1 = 8, a_n = 96, n = 20$

21) $9 + 14 + 19 + \cdots + 74$

22) $16 + 7 + (-2) + \cdots + (-65)$

23) مسرح: لكي يؤدِّي أيمن دوره بإتقان في مسرحية تاريخية، بدأ بالتدرب على النصِّ مرَّتين في اليوم الأول، وأربع مرَّات في اليوم الثاني، وست مرَّات في اليوم الثالث وهكذا. ما عدد المرَّات التي سيتدرَّبها في اليوم العشرين؟

أوجد مجموع حدود كلٍّ من المتسلسلات الحسابية الآتية:

24) $\sum_{k=5}^{21} (3k - 2)$

25) $\sum_{k=0}^{10} (6k - 1)$

26) $\sum_{k=4}^{12} (-2k + 5)$

مثال 2

أوجد الوسطين الحسابيين بين العددين 3, 39 .

$a_n = a_1 + (n-1)d$	الحدّ النوني في المتتابعة الحسابية
$a_4 = 3 + (4-1)d$	$n = 4, a_1 = 3$
$39 = 3 + 3d$	$a_4 = 39$
$12 = d$	بسّط

الوسطان الحسابيان هما: $3 + 12 = 15, 15 + 12 = 27$

مثال 3

أوجد S_n للمتسلسلة الحسابية التي فيها:

$a_1 = 18, a_n = 56, n = 8$

$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$	صيغة المجموع
$S_8 = \frac{8}{2}(18 + 56)$	$n = 8, a_1 = 18, a_n = 56$
$= 296$	بسّط

مثال 4

أوجد مجموع المتسلسلة الحسابية: $\sum_{k=3}^{15} (5k + 1)$

استعمل الصيغة $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$.

في المتسلسلة 13 حدًّا، وحدُّها الأول $a_1 = 5(3) + 1 = 16$

$a_{13} = 5(15) + 1 = 76$

$S_{13} = \frac{13}{2}(16 + 76)$

$= 598$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع
حلول كتبي

2-3 المتتابعات والمتسلسلات الهندسية ص 85–80

أوجد قيمة الحدّ المطلوب في كلٍّ من المتتابعات الهندسية الآتية:

27) $a_1 = 5, r = 2, a_7 = ?$

28) $a_1 = 11, r = 3, a_3 = ?$

29) $a_1 = 128, r = -\frac{1}{2}, a_5 = ?$

أوجد الأوساط الهندسية المطلوبة في كلٍّ من المتتابعات الآتية:

30) $6, \underline{?}, \underline{?}, 162$

31) $8, \underline{?}, \underline{?}, \underline{?}, 648$

32) $-4, \underline{?}, \underline{?}, 108$

33) تخفيضات: أعلن أحد المتاجر عن تخفيضات كبرى، فبلغت مبيعاته 2048000 ريال في اليوم الأول، ومع نفاد بعض السلع فإن مبيعاته صارت تقلّ إلى النصف يوميًّا. إذا استمر انخفاض المبيعات بهذا المعدّل، فكم ريالًا ستكون مبيعات المتجر في اليوم الثاني عشر من التخفيضات؟

أوجد مجموع حدود كلٍّ من المتسلسلتين الآتيتين:

34) $\sum_{k=1}^{7} 3 \cdot (-2)^{k-1}$

35) $\sum_{k=1}^{8} -1\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$

مثال 5

أوجد الحدّ السادس في المتتابعة الهندسية التي فيها: $a_1 = 9, r = 4$.

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$	الحدّ النوني في المتتابعة الهندسية
$a_6 = 9 \cdot 4^{6-1}$	$n = 6, a_1 = 9, r = 4$
$a_6 = 9216$	

مثال 6

أوجد وسطين هندسيين بين 1, 27

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$	الحدّ النوني في المتتابعة الهندسية
$a_4 = 1 \cdot r^{4-1}$	$n = 4, a_1 = 1$
$27 = r^3$	$a_4 = 27$
$3 = r$	بسّط

الوسطان الهندسيان هما: $1(3) = 3$، $3(3) = 9$.

مثال 7

أوجد مجموع حدود المتسلسلة الهندسية $\sum_{k=1}^{6} 2 \cdot (4)^{k-1}$.

$S_6 = \frac{2 - 2 \cdot 4^6}{1 - 4}$	$n = 6, a_1 = 2, r = 4$
$= \frac{-8190}{-3} = 2730$	بسّط

2-4 المتسلسلات الهندسية اللانهائية ص 92–87

أوجد مجموع حدود كلٍّ من المتسلسلات الهندسية اللانهائية فيما يأتي إن وجد:

36) $a_1 = 8, r = \frac{3}{4}$

37) $\frac{5}{6} - \frac{20}{18} + \frac{80}{54} - \frac{320}{162} + \ldots$

38) $\sum_{k=1}^{\infty} 3\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$

39) ألعاب: أُسقطت كرة من سطح بناية ارتفاعها $60\ ft$، فارتدَّت مسافة $\frac{2}{3}$ الارتفاع السابق. إذا استمرَّ ارتداد الكرة بهذه الطريقة، فما المسافة الكلية التي تقطعها الكرة إلى أن تتوقف؟

مثال 8

أوجد مجموع حدود المتسلسلة الهندسية اللانهائية التي فيها: $a_1 = 15, r = \frac{1}{3}$

$S = \frac{a_1}{1 - r}$	صيغة المجموع
$= \frac{15}{1 - \frac{1}{3}}$	$a_1 = 15, r = \frac{1}{3}$
$= \frac{15}{\frac{2}{3}} = 22.5$	بسّط

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

2-5 نظرية ذات الحدَّين ص 97–94

أوجد مفكوك كلٍّ ممّا يأتي:

40 $(a+b)^3$

41 $(y-3)^7$

42 $(3-2z)^5$

43 $(4a-3b)^4$

44 $\left(x-\frac{1}{4}\right)^5$

أوجد قيمة الحدّ المطلوب في كلٍّ ممّا يأتي:

45 الحدّ الثالث في مفكوك $(a+2b)^8$

46 الحدّ السادس في مفكوك $(3x+4y)^7$

47 الحدّ الثاني في مفكوك $(4x-5)^{10}$

مثال 9

أوجد مفكوك $(x-3y)^4$.

$$(x-3y)^4 = x^4 + {}_4C_1x^3(-3y) + {}_4C_2x^2(-3y)^2 + {}_4C_3x(-3y)^3 + {}_4C_4(-3y)^4$$

$$= x^4 + -12x^3y + 54x^2y^2 + -108xy^3 + 81y^4$$

مثال 10

أوجد قيمة الحدّ الرابع في مفكوك $(x+y)^8$.

استعمل نظرية ذات الحدّين لكتابة المفكوك

$$(x+y)^8 = \sum_{k=0}^{8} \frac{8!}{k!(8-k)!}\, x^{8-k}y^k$$

بالنسبة للحدّ الرابع فإن $k=3$، لذلك يكون الحدّ الرابع هو

$$\frac{8!}{3!(8-3)!}\, x^{8-3}y^3 = 56x^5y^3$$

2-6 البرهان باستعمال مبدأ الاستقراء الرياضيّ ص 102–99

برهن صحة كلِّ جملة مما يأتي للأعداد الطبيعية جميعها:

48 $2+6+12+\cdots+n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

49 5^n-1 يقبل القسمة على 4 .

أعطِ مثالًا مضادًّا يُبيّن خطأ كلٍّ من الجمل الآتية، حيث n أيُّ عدد طبيعي:

50 8^n+3 يقبل القسمة على 11 .

51 $6^{n+1}-2$ يقبل القسمة على 17 .

52 n^2+2^n+4 عدد أولي .

53 $n+19$ عدد أولي.

مثال 11

برهن أن 9^n+3 يقبل القسمة على 4 لكل عدد طبيعي n

الخطوة 1 عندما $n=1$ ، فإن: $9^n+3 = 9^1+3 = 12$.
وبما أن 12 يقبل القسمة على 4 فالجملة صحيحة عندما $n=1$.

الخطوة 2 افترض أن 9^k+3 يقبل القسمة على 4 حيث k عدد صحيح موجب؛ إذن $9^k+3 = 4r$ حيث r عدد كلي.

الخطوة 3 برهن صحَّة الجملة عند $n=k+1$ ، أي برهن أنَّ $(9^{k+1}+3)$ يقبل القسمة على 4

$9^k+3 = 4r$	فرضية الاستقراء
$9^k = 4r-3$	اطرح 3 لكلا الطرفين
$9^{k+1} = 36r-27$	اضرب كلا الطرفين في 9
$9^{k+1}+3 = 36r-27+3$	أضف 3 لكلا الطرفين
$9^{k+1}+3 = 36r-24$	بسّط
$9^{k+1}+3 = 4(9r-6)$	حلّل

وبما أن r عدد كلي فإن $9r-6$ عدد كلي، وهذا يعني أن: $9^{k+1}+3$ يقبل القسمة على 4. إذن الجملة صحيحة عند $n=k+1$.

إذن 9^n+3 يقبل القسمة على 4 لكل عدد صحيح موجب n .

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

اختبار الفصل

أوجد مجموع حدود كلٍّ من المتسلسلتين الآتيتين إن وجد:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} 9 \cdot 2^{n-1}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} (4) \cdot (0.5)^{n-1}$

3) أوجد الحدود الأربعة التالية في المتتابعة الحسابية
$81, 72, 63, \ldots$.

4) أوجد الحدّ الخامس والعشرين في المتتابعة الحسابية التي فيها
$a_1 = 9, d = 5$

5) **اختيار من متعدد:** ما الحدّ الثامن في المتتابعة الحسابية
$18, 20.2, 22.4, 24.6, \ldots$ ؟

A 26.8 **C** 31.2

B 29 **D** 33.4

6) أوجد أربعة أوساط حسابية بين $-9, 11$.

7) أوجد مجموع المتسلسلة الحسابية التي فيها
$a_1 = 11, n = 14, a_n = 22$

8) **اختيار من متعدد:** ما الحدّ التالي في المتتابعة الهندسية أدناه؟
$10, \frac{5}{2}, \frac{5}{8}, \frac{5}{32} \ldots$

A $\frac{13}{32}$ **C** $\frac{5}{128}$

B $\frac{5}{32}$ **D** $\frac{5}{8}$

9) أوجد ثلاثة أوساط هندسية بين $6, 1536$

10) أوجد مجموع حدود المتسلسلة الهندسية التي فيها
$a_1 = 15, r = \frac{2}{3}, n = 5$

أوجد مجموع حدود كلٍّ من المتسلسلتين الآتيتين (إن وجد):

11) $\sum_{k=2}^{12} (3k - 1)$

12) $45 + 37 + 29 + \cdots + -11$

13) اكتب الكسر العشري الدوري $0.\overline{65}$ في صورة كسر اعتيادي.

أوجد الحدود الخمسة الأولى في كلٍّ من المتتابعتين الآتيتين:

14) $a_1 = -1, a_{n+1} = 3a_n + 5$

15) $a_1 = 4, a_{n+1} = a_n + n$

16) أوجد مفكوك $(2a - 3b)^4$

17) أوجد معامل الحدّ الخامس في مفكوك $(m + 3n)^6$

18) أوجد الحدّ الرابع في مفكوك $(c + d)^9$.

برهن صحة كلٍّ من الجملتين الآتيتين، لكل عدد طبيعي n

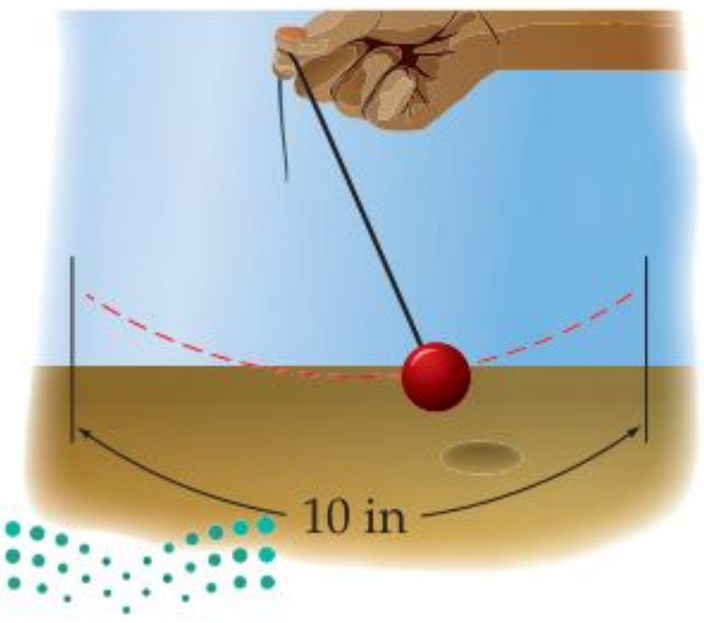
19) $1 + 6 + 36 + \cdots + 6^{n-1} = \frac{1}{5}(6^n - 1)$

20) $11^n - 1$ يقبل القسمة على 10 .

21) أوجد مثالًا مضادًّا يُبيّن خطأ الجملة الآتية، حيث n أيُّ عدد طبيعي: $2^n + 4^n$ يقبل القسمة على 4

22) **مدرسة:** إذا كان عدد طلاب الصف الأول الثانوي يساوي عدد طلاب الصف الثاني الثانوي في مدرسة ثانوية، وأراد معلم العلوم اختيار 8 طلاب عشوائيًّا من الصفين لتمثيل المدرسة في مسابقة للعلوم، فما احتمال أن يكون 5 من الطلاب الثمانية من الصف الأول الثانوي؟

23) **بندول:** يقوم سعد بتحريك بندول، بحيث تتناقص المسافة التي يقطعها البندول في كل اهتزازة بنسبة 15%. إذا كانت أول مسافة قطعها البندول 10 in، فأوجد المسافة الكلية التي يكون البندول قد قطعها عندما يتوقّف عن الحركة.



وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

البحث عن نمط

تعتبر استراتيجية البحث عن نمط من أكثر استراتيجيات حلِّ المسألة استعمالًا. وتعدّ القدرة على تمييز النمط، ونمذجته جبريًّا، وتوسيع النمط أدوات مهمّة جدًّا في حلِّ المسألة.

استراتيجيات البحث عن نمط

خطوة 1

تعرَّف النمط.

- قارن بين الأعداد، والأشكال، والتمثيلات البيانية في النمط.
- اسأل نفسك: ما العلاقة بين حدود النمط؟
- اسأل نفسك: هل توجد عمليات مشتركة تتوصَّلُ من خلالها من حدٍّ إلى الحدّ الذي يليه في النمط؟

خطوة 2

عمّم النمط.

- باستعمال الكلمات اكتب قاعدة تصف طريقة الحصول على الحدود المختلفة في النمط.
- حدّد متغيرات، ثم اكتب عبارة جبرية لنمذجة النمط، إن كان ذلك مناسبًا.

خطوة 3

أوجد الحدود المفقودة، وتوسّع في النمط، وحُلّ المسألة.

- استعمل النمط أو القاعدة التي حصلت عليها في إيجاد الحدود المفقودة، أو في توسيع النمط لحل المسألة.
- تحقّق من إجابتك لتتأكّد من أن إجابتك منطقية.

مثال

اقرأ المسألة الآتية جيدًا، وحدِّد المطلوب فيها، ثم استعمل المعطيات لحلّها:

انظر إلى متتابعة الأشكال المربَّعة المعطاة. ما عدد المربعات التي تحتاج إليها لتكوين الشكل التاسع من المتتابعة؟

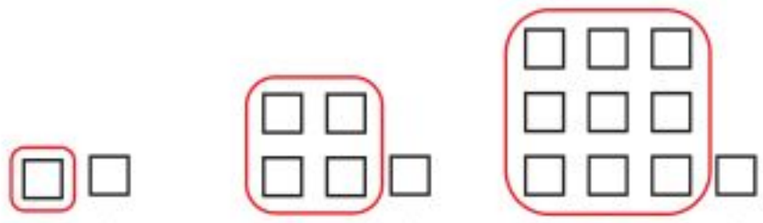
A 55
B 65
C 74
D 82

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

الخطوة 1: تعرَّف النمط.

- اقرأ المسألة بعناية. معك 3 أشكال من متتابعة، وتريد إيجاد عدد المربعات التي تحتاج إليها لعمل الشكل التاسع.
- ابحث عن نمط في الأشكال المكوّنة من مربعات. عُدّ المربعات في كل شكل، ولاحظ أن عدد المربعات في كل شكلٍ هو



$1 + 1$ $4 + 1$ $9 + 1$

$1^2 + 1$ $2^2 + 1$ $3^2 + 1$

الخطوة 2: عمّم النمط.

- أي أن عدد مربعات الشكل التالي هو $1 + 4^2$ أو 17
- اكتب العبارة الجبرية التي تُمثّل نموذجًا لهذا النمط.

التعبير اللفظي	عدد المربعات في الشكل يساوي مربع رقم الشكل زائد واحد.
متغير	افترض أن n يُمثّل رقم الشكل.
المعادلة	$a_n = n^2 + 1$

الخطوة 3: وسِّع النمط.

- استعمل العبارة التي حصلت عليها لتوسيع النمط، ثم أوجد عدد المربعات في الشكل التاسع.

$$a_9 = 9^2 + 1 = 82$$

إذن الشكل التاسع سيكون فيه 82 مربعًا. الإجابة الصحيحة هي D.

تمارين ومسائل

اقرأ المسألة. استعمل نمطًا لحلّ المسألة.

1) الأعداد أدناه متتابعة مشهورة في الرياضيات كما تعلم وهي: "متتابعة فيبوناشي". ما الحدّ التالي في هذه المتتابعة؟

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

A 36 C 31

B 34 D 29

2) ما العدد المفقود في الجدول أدناه؟

n	a_n
1	0
2	2
3	6
4	12
5	??
6	30

A 17

B 20

C 18

D 21

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

اختيار من متعدد

اختر الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممّا يأتي:

1) أوجد قيمة الحدّ التالي في المتتابعة الحسابية:

7, 13, 19, 25, 31, ...

A 36

B 37

C 38

D 39

2) أوجد قيمة $\sum_{k=1}^{15} (8k - 1)$

A 119

B 826

C 945

D 1072

3) صيغة الحدّ النوني للمتتابعة الهندسية الممثَّلة في الجدول المجاور هي:

n	a_n
1	5
2	10
3	20
4	40
5	80

A $a_n = (5)^n$

B $a_n = 5(2)^{n-1}$

C $a_n = 2(5)^{n-1}$

D $a_n = 5(2)^n$

4) تدَّعي شركة صانعة لأحد أنواع مصافي الهواء، أن المصفاة تستطيع إزالة 90% من الشوائب في الهواء الداخل إلى المصفاة. إذا تم إدخال الكمية نفسها من الهواء إلى المصفاة 3 مرَّات متتابعة، فما نسبة الشوائب التي سوف تُزال؟

A 0.1%

B 0.01%

C 99.99%

D 99.9%

5) أيُّ المتسلسلات الهندسية الآتية متباعدة؟

A $\sum_{k=1}^{\infty} 4 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{k-1}$

B $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}$

C $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{7}{6} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$

D $\sum_{k=1}^{\infty} (-2) \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$

6) إذا علمت أن $x - 5$ عامل من عوامل كثيرة الحدود $x^3 - 7x^2 + 7x + k$ ، فما قيمة k ؟

A 1

B 7

C 15

D 35

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

إجابة قصيرة

أجب عن كلٍّ مما يأتي:

7) ما رتبة المصفوفة الناتجة عن ضرب المصفوفتين أدناه؟

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \\ j & k & l \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

8) أوجد مفكوك $(c + d)^6$ باستعمال نظرية ذات الحدَّين.

بسّط كلًّا من العبارتين الآتيتين:

9) $\frac{12a}{5b} \cdot \frac{25a^2b^3}{8c}$

10) $\frac{x^2 - x - 20}{2x + 8} \cdot \frac{3x}{x - 5}$

11) إذا كان $f(x) = 2x + 4, g(x) = x^2 + 5$، فما قيمة $f[g(6)]$؟

إجابة طويلة

أجب عن كلٍّ مما يأتي موضِّحا خطوات الحل :

12) برهن صحّة الجملة الآتية للأعداد الطبيعية جميعها.
"$7^n - 1$ يقبل القسمة على 6".

13) يقطع خالد مسافة معيّنة على دراجة هوائية في 2.5 ساعة. وإذا زاد من سرعته فإنه يقطع المسافة نفسها في ساعتين.

a) هل يُمثّل هذا الوضع تناسبًا طرديًّا أم تناسبًا عكسيًّا؟ وضّح إجابتك.

b) إذا كانت سرعته عندما قَطَعَ المسافة في 2.5 ساعة. 12 km/h، فكم يجب أن تكون سرعته ليقطع المسافة ذاتها في ساعتين؟

هل تحتاج إلى مساعدة إضافية؟													
إذا لم تستطع حل السؤال ...	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
فعد إلى الدرس ...	2-2	2-2	2-3	2-3	2-4	مهارة سابقة	مهارة سابقة	2-5	1-1	1-1	مهارة سابقة	2-6	1-5

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

الفصل 3

الاحتمالات
Probabilities

فيما سبق:

درست النواتج والحوادث، والتباديل والتوافيق، واحتمالات الحوادث البسيطة والمركبة في التجارب العشوائية.

والآن:

- أمثّل فضاء العيّنة.
- أستعمل التباديل والتوافيق مع الاحتمال.
- أجد الاحتمال باستعمال الطول والمساحة.
- أجد احتمالات الحوادث المركبة.

لماذا؟

ألعاب: يمكن استعمال الاحتمال للتنبؤ بإمكانية وقوع النواتج المختلفة لبعض الألعاب التي نمارسها.

المطويات منظم أفكار

الاحتمالات: اعمل هذه المطويّة لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك حول الاحتمالات؛ مستعملًا ورقة A3.

1. **اطوِ** الورقة طوليًّا.
2. **اطوِ** الورقة نصفين مرتين.
3. **قصّ** كل خط طي أفقيًّا في العمود الأيسر حتى خط المنتصف.
4. **اكتب** العناوين كما في الشكل.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي
رابط الموقع الرسمي
www.ien.edu.sa

التهيئة للفصل الثالث

أجب عن الاختبار الآتي، انظر المراجعة السريعة قبل الإجابة عن الاختبار.

اختبار سريع

بسّط كلًّا مما يأتي: (تستعمل مع الدرس 4-3)

1) $\frac{1}{2}+\frac{3}{8}$
2) $\frac{7}{9}+\frac{2}{6}$
3) $\frac{2}{5}+\frac{7}{8}$
4) $\frac{2}{9}\cdot\frac{4}{8}$
5) $\frac{3}{7}\cdot\frac{21}{24}$
6) $\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}$
7) **كرة قدم:** لدى فريق كرة قدم 54 لترًا (L) من الماء البارد في قوارير سعة كلٍّ منها 500 مللترًا (ml). كم قارورة لديهم؟

إذا ألقي مكعب مرقّم من 1 إلى 6 مرة واحدة، فأوجد احتمال كلٍّ مما يأتي: (تستعمل مع الدروس 1-3 إلى 3-3)

8) أن يكون العدد الظاهر أكبر من 1.
9) أن يكون العدد الظاهر فرديًّا.
10) أن يكون العدد الظاهر أقل من 2.
11) أن يكون العدد الظاهر (1 أو 6).
12) **احتمالات:** ألقي مجسم ذو 4 وجوه متطابقة، كُتب على كل وجه أحد الأعداد من 1 إلى 4. فما احتمال أن يكون العدد الظاهر على الوجه العلوي عددًا أوليًّا؟

يبيّن الجدول الآتي نواتج تجربة استقرار مؤشر دوار لقرص مقسم إلى قطاعات مرقمة بالأعداد 4-1. (تستعمل مع الدرس 1-3)

النتيجة	الإشارات	التكرار
1	𝍸	3
2	𝍸 ||	7
3	𝍸 |	6
4	||||	4

13) ما الاحتمال التجريبي لاستقرار المؤشر عند العدد 4؟
14) ما الاحتمال التجريبي لاستقرار المؤشر عند عدد فردي؟
15) ما الاحتمال التجريبي لاستقرار المؤشر عند عدد زوجي؟

مراجعة سريعة

مثال 1

بسّط المقدار: $\frac{6}{9}\cdot\frac{1}{2}$.

$\frac{6}{9}\cdot\frac{1}{2}=\frac{6\cdot1}{9\cdot2}$ اضرب البسط في البسط والمقام في المقام

$=\frac{6}{18}$

$=\frac{1}{3}$ بسّط

مثال 2

إذا ألقي مكعب مرقّم من 1 إلى 6 مرة واحدة، فما احتمال ظهور عدد أقل من 5؟

$$P(\text{أقل من }5)=\frac{\text{عدد نواتج الحادثة}}{\text{عدد جميع النواتج الممكنة}}$$

$=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

احتمال ظهور عدد أقل من 5 هو $\frac{2}{3}$، ويساوي 67% تقريبًا.

مثال 3

في تجربة رمي مكعب مرقّم من 1 إلى 6، ظهرت النواتج المبينة في الجدول. أوجد الاحتمال التجريبي لظهور العدد 5 .

النتيجة	الإشارات	التكرار
1	||||	4
2	𝍸 ||	7
3	𝍸 |||	8
4	||||	4
5	||	2
6	𝍸	5

$$P(5)=\frac{\text{عدد مرات ظهور }5}{\text{عدد جميع النواتج}}=\frac{2}{30}$$

الاحتمال التجريبي للحصول على 5 هو $\frac{2}{30}$ ويساوي 6.7% تقريبًا

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي
رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

3-1

تمثيل فضاء العيِّنة
Representing Sample Spaces

فيما سبق: درستُ حساب الاحتمال التجريبي. (مهارة سابقة)

والآن:
- أستعمل القوائم، والجداول، والرسم الشجري لتمثيل فضاء العيِّنة.
- أستعمل مبدأ العدّ الأساسي لإيجاد عدد النواتج الممكنة.

المفردات:
- فضاء العيِّنة sample space
- الرسم الشجري tree diagram
- تجربة ذات مرحلتين two-stage experiment
- تجربة متعددة المراحل multi-stage experiment
- مبدأ العد الأساسي Fundamental Counting Principle

لماذا؟

في مباريات كرة القدم، يلقي الحكم عادة قطعة نقد مرة واحدة؛ ليحدد أيُّ الفريقين سيختار المكان في الملعب أولًا. وقد تكون النتيجة هي الشعار أو الكتابة.

تمثيل فضاء العيِّنة: لقد تعلمت ما يأتي حول التجارب والنواتج والحوادث.

التعريف	مثال
التجربة العشوائية: هي إجراء نعرف مسبقًا جميع نواتجه الممكنة.	في الموقف أعلاه، التجربة هي إلقاء قطعة نقد مرة واحدة.
النواتج: هي كل ما يمكن أن ينتج عن تجربة ما.	النواتج الممكنة هي: الشعار أو الكتابة.
الحادثة: هي نتيجة أو أكثر للتجربة.	إحدى حوادث هذه التجربة ظهور الكتابة.

فضاء العيِّنة لتجربة ما هو مجموعة جميع النواتج الممكنة، ويمكن تمثيله باستعمال القائمة المنظمة، أو الجدول، أو **الرسم الشجري**.

مثال 1 تمثيل فضاء العيِّنة

أُلقيت قطعة نقد مرتين، مثّل فضاء العيِّنة لهذه التجربة باستعمال القائمة المنظمة والجدول والرسم الشجري.

هنالك ناتجان ممكنان لكل رمية لقطعة النقد هما: الشعار (L) والكتابة (T).

القائمة المنظمة

اقرن كل ناتجٍ ممكنٍ من الرمية الأولى بكل النواتج الممكنة من الرمية الثانية.

L , L　　L , T

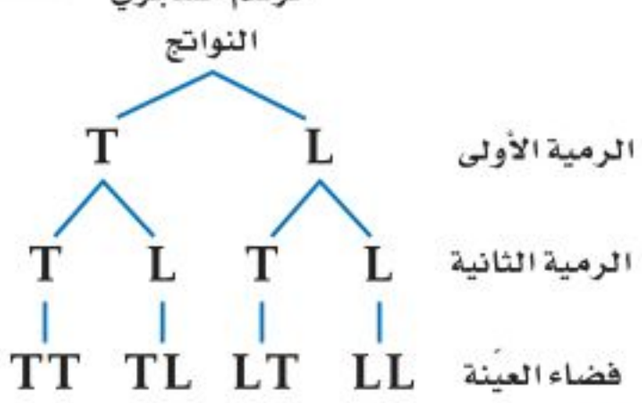
T , L　　T , T

الجدول

دوّن النواتج الممكنة للرمية الأولى في العمود الأيمن، والنواتج الممكنة للرمية الثانية في الصف العلوي.

النواتج	شعار (L)	كتابة (T)
شعار (L)	L, L	L, T
كتابة (T)	T, L	T, T

الرسم الشجري



تحقق من فهمك

1) أُلقيت قطعة نقد مرة واحدة، ثم رمي مكعب مرقّم مرة واحدة أيضًا. مثّل فضاء العيِّنة لهذه التجربة باستعمال القائمة المنظمة، والجدول، والرسم الشجري.

إرشادات للدراسة

المكعب المرقَّم
هو مكعب تحمل أوجهه الأرقام من 1 إلى 6.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

التجربة المعروضة في المثال 1 هي مثال على **تجربة ذات مرحلتين**؛ لأنها تمَّت على مرحلتين. والتجارب التي تحتوي على أكثر من مرحلتين تسمى **تجارب متعددة المراحل**.

مثال 2 من واقع الحياة

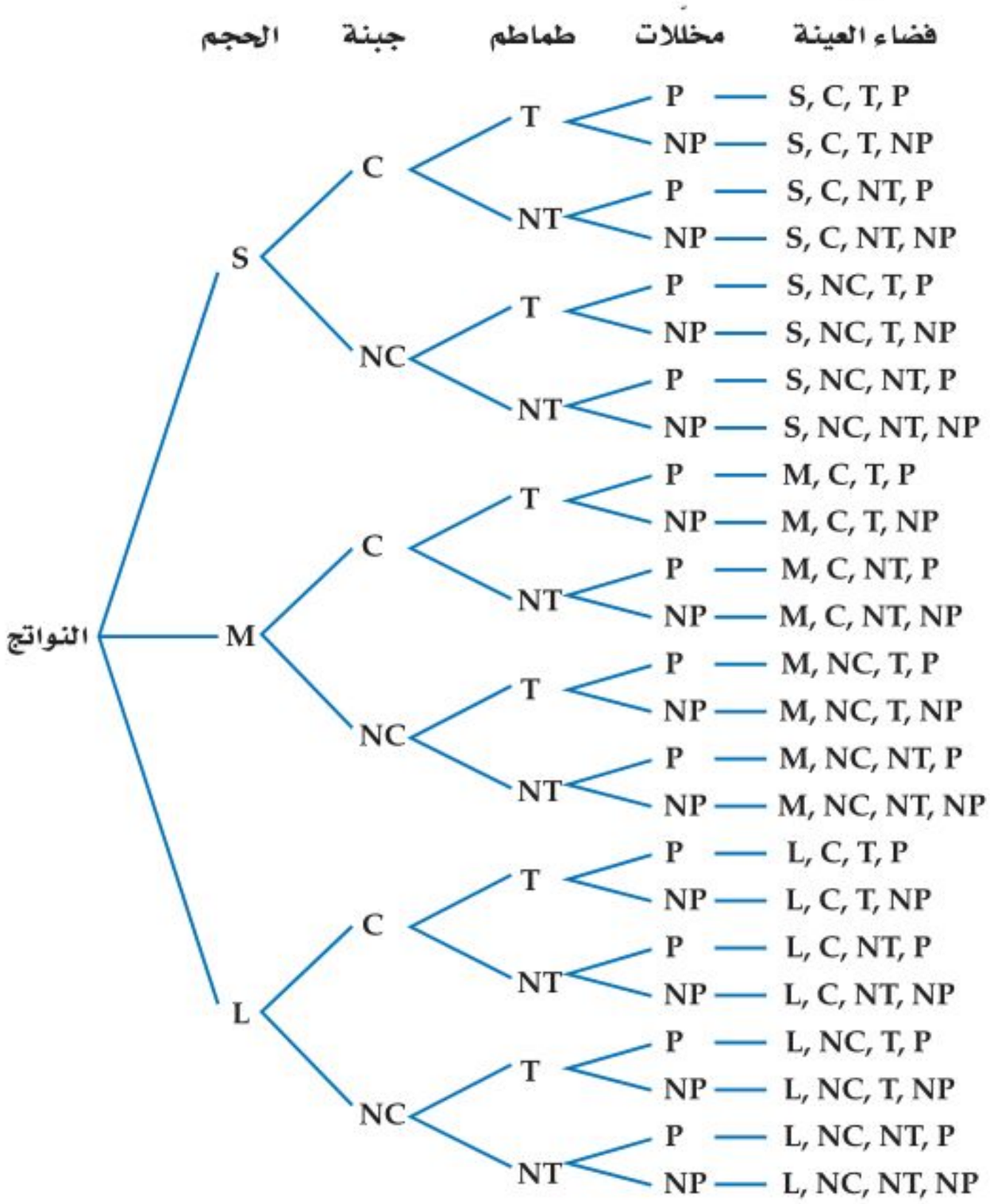
الرسم الشجري للتجارب المتعددة المراحل

شطائر: يبيع أحد المطاعم شطائر لحم كما هو مبين في قائمة الشطائر المجاورة. مثِّل فضاء العيِّنة لأنواع الشطائر الممكنة باستعمال الرسم الشجري.

تتكون التجربة من أربع مراحل هي:

- اختيار حجم شطيرة اللحم (S: صغير، M: وسط، L: كبير).
- اختيار الجبنة (مع جبنة C، بدون جبنة NC).
- اختيار الطماطم (مع طماطم T، بدون طماطم NT).
- اختيار المخلّلات (مع مخلّلات P، بدون مخلّلات NP).

أنشئ الرسم الشجري للمراحل الأربع.



تنبيه!

اختصار مراحل

في السؤال الثالث من الصورة المرافقة للمثال 2 ، يختصر الحرفان: و/ أو مرحلتين للاختيار هما:

- مع طماطم أو بدون طماطم.
- مع مخللات أو بدون مخللات. ويقابل هذا أربعة اختيارات ممكنة هي: مع الطماطم فقط، أو مع المخللات فقط، أو مع الطماطم والمخللات أو بدون طماطم ولا مخللات.

قراءة الرياضيات

رموز الرسم الشجري

اخترْ رموزًا واضحة لا غموض فيها للنواتج في الرسم الشجري. ففي المثال 2، تدل C على اختيار الجبنة، وNC تدل على عدم اختيار الجبنة، أمَا NT وNP فتدلان أيضًا على أنها دون طماطم ودون مخلّلات بالترتيب.

تحقق من فهمك

2) **هواتف:** يرغب مصطفى في شراء هاتف نقال، ويمكنه أن يختاره بلون فضي(S) أو أسود(B) أو أحمر(R)، وأن يكون بكاميرا (C) أو بدونها (NC). ويمكنه أن يحصل على سماعات (H)، و/أو غطاء للجهاز(W). مثّل فضاء العيِّنة لهذا الموقف بالرسم الشجري.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

مبدأ العد الأساسي: قد لا يكون تسجيل جميع نواتج فضاء العيِّنة في التجارب ذات المراحل أو المتعددة المراحل عمليًّا أو ضروريًّا. لذا يمكن استعمال **مبدأ العد الأساسي** لإيجاد عدد النواتج الممكنة.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

مبدأ العدّ الأساسي

التعبير اللفظي: يمكن إيجاد عدد النواتج الممكنة لفضاء العيِّنة بضرب عدد النواتج الممكنة في كل مرحلة من مراحل التجربة.

بالرموز: في تجربة عدد مراحلها k. افرض أن:

n_1 = عدد النواتج الممكنة في المرحلة الأولى

n_2 = عدد النواتج الممكنة في المرحلة الثانية بعد حدوث المرحلة الأولى

$\vdots$

n_k = عدد النواتج الممكنة في المرحلة k بعد حدوث $k-1$ من المراحل

فإن العدد الكلي للنواتج الممكنة للتجربة التي عدد مراحلها k يساوي:

$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots \cdot n_k$$

إرشادات للدراسة

قاعدة الضرب

يُسمى مبدأ العدّ الأساسي أحيانًا قاعدة الضرب للعدّ.

مثال 3 من واقع الحياة

استعمال مبدأ العدّ الأساسي

اختيار ثوب: يريد سعد شراء ثوبٍ من بين البدائل المبينة في الجدول المجاور. فما عدد الخيارات المتاحة أمامه ليختار ثوبًا مناسبًا؟

البدائل	عدد الخيارات
القماش	5
اللون	6
الأكمام	3
القبّة	3
الفتحة الأمامية	2
الأزرار	2

استعمل مبدأ العد الأساسي.

الأزرار — الفتحة الأمامية — القبّة — الأكمام — اللون — القماش

$$2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 6 \times 5 = 1080$$

إذن لدى سعد 1080 خيارًا ليختار ثوبًا مناسبًا.

الربط بالحياة

اعتاد الرجال في منطقة الخليج العربي على لبس الأثواب الواسعة ذات اللون الأبيض أو الألوان الفاتحة، وهذا يعود لاعتبارات عديدة، أهمها البعدان: المناخي والجمالي.

تحقق من فهمك

أوجد عدد النواتج الممكنة في الحالات الآتية:

3A) اختيار إجابات لجميع الأسئلة المبينة في النموذج المجاور.

3B) رمي مكعب مرقّم أربع مرات.

3C) أحذية: اختيار زوج من الأحذية من بين المقاسات: 45 , 44 , 43 , 42 , 41 , 40 , 39 ، بلون أسود أو بني أو رمادي أو أبيض، ويمكن أن يكون من الجلد الطبيعي أو الصناعي، وهناك ثلاثة أشكال مختلفة للحذاء.

نموذج الإجابة

1. A B C D
2. A B C D
3. A B C D
4. A B C D
5. A B C D
6. A B C D
7. T F
8. T F
9. T F
10. T F

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

تأكد

مثال 1 **للسؤالين 1، 2 مثّل فضاء العيِّنة لكل تجربة ممَّا يأتي باستعمال القائمة المنظمة والجدول والرسم الشجري.**

1) عندما يسدّد اللاعب ركلة الجزاء فإنه يسجل هدفًا (G) أو لا يسجل (O). افرض أن اللاعب سدّد ركلة جزاء مرتين.

2) سحب سمير بطاقتين على التوالي مع الإرجاع من كيس فيه بطاقات كتب عليها: (عصير مجاني J) أو (دفتر ملحوظات مجاني N).

مثال 2 **3) ملابس:** تريد سمر حضور حفلة، وعليها أن تختار ما ترتديه في الحفلة من القائمة المجاورة. مثّل فضاء العيِّنة في هذا الموقف بالرسم الشجري.

مثال 3 **4) مطاعم:** عُرضت قائمة بالمأكولات في أحد المطاعم تتضمن الأصناف المبينة في الجدول المجاور، وكلٌّ صنف منها يحتوي على عدد من الأنواع. افرض أنه يتم اختيار طبق واحد من كلِّ صنف ونوع، فما عدد النواتج الممكنة؟

قائمة المأكولات	عدد البدائل
المقبلات	8
الحساء	4
السلطة	6
الطبق الرئيس	12
الحلوى	9

تدرب وحل المسائل

مثال 1 **للأسئلة 5–7 مثّل فضاء العيِّنة لكل تجربة ممَّا يأتي باستعمال القائمة المنظمة، والجدول، والرسم الشجري:**

5) تنظم إحدى المدارس الثانوية زيارة إلى مركز الملك عبدالعزيز التاريخي (C) وإلى جامعة الملك سعود (U). لطلبة الصف الأول والثاني الثانوي.

6) لدى خالد فرصة للسفر إلى الخارج ضمن برنامج تدريبيٍّ لمدة شهر أو شهرين، ويمكنه أن يختار مصر أو الأردن.

7) يتكون اختبار من نماذج مختلفة من الأسئلة، وكل نموذج يتكون من سؤالين يتعلقان بالمثلَّثات؛ أحدهما يشتمل على مثلَّث منفرج الزاوية (O) أو مثلَّث حاد الزوايا (A)، والآخر يشتمل على مثلَّث متطابق الضلعين (E) أو مثلَّث مختلف الأضلاع (N).

8) رسم: ينفّذ بعض الطلاب مشروعين للرسم، فيستعملون أحد نوعين مختلفين من الألوان لكل مشروع. مثّل فضاء العيِّنة لهذه التجربة باستعمال القائمة المنظمة، والجدول، والرسم الشجري.

مثال 2 **للسؤالين 9، 10 مثّل فضاء العيِّنة مستعملًا الرسم الشجري في كلٍّ ممَّا يأتي:**

9) سيارات: يريد فيصل شراء سيارة: صغيرة (S) أو عائلية (F) أو نقل (T)، بمقاعد مغطاة بالجلد (L) أو القماش (V)، مع إضافات: شاشة ملاحة (N) و/ أو سقف متحرك (R).

10) حقائب: يبيع مصنع نوعين من حقائب السفر بأحد حجمين، وقد يكون لون الحقيبة أسود أو بنيًّا أو أزرق، وقد يكون لها مفتاح و/ أو قفل أرقام.

وزارة التعليم
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

مثال 3

11) نشاطات: تجري في إحدى المدارس الثانوية قرعة لاختيار مسؤولي أنشطة من الطلاب. بحيث كان عدد الطلاب المرشحين للأنشطة المختلفة: 3 طلاب للنشاط الرياضي وَ 4 طلاب للنشاط العلمي وَ 5 طلاب للتوعية الإسلامية وَ طالبان للإذاعة المدرسية، على ألا يرشح الطالب نفسه لأكثر من نشاط. فما عدد النواتج الممكنة؟

12) فن: أعطى معلم طلابه خيارين لرسم شكلين رباعيين: أحدهما أطوال أضلاعه متساوية، والآخر فيه ضلعان متوازيان على الأقل. مثّل فضاء العيِّنة باستعمال الجدول والرسم الشجري.

13) إفطار: الإعلان المجاور، يوضِّح قائمة وجبة الإفطار في أحد المطاعم، حيث يقدم البيض مع الخضراوات أو اللحم أو الجبن، ويقدم معها الخبز الأبيض أو الأسمر أو خبز النخالة. ما عدد النواتج المختلفة من أطباق البيض ونوع الخبز، إذا كان يُستعمل مع البيض صنف واحد من الخضراوات؟

14) دراجات: اشترى عصام قفلًا رقميًّا لدراجته يفتح باستعمال أربعة أرقام من 0 إلى 9 .

a) بكم طريقة يمكنه اختيار أرقام القفل إذا سمح له بتكرار أي رقم؟

b) بكم طريقة يمكنه اختيار أرقام القفل، على أن يستعمل الرقم مرة واحدة فقط؟ وضِّح إجابتك.

15) تمثيلات متعددة: تتم هذه التجربة على مرحلتين متعاقبتين؛ أولًا دوّر المؤشر 1 في الشكل أدناه، فإذا أشار إلى اللون الأحمر فارم قطعة نقد، وإذا أشار إلى اللون الأصفر فارم مكعب نقاط، وإذا أشار إلى اللون الأخضر فألقِ مكعبًا مرقّما، وإذا أشار إلى اللون الأزرق فدوّر المؤشر 2 .

a) هندسيًّا: استعمل الرسم الشجري لتمثيل فضاء العيِّنة للتجربة.

b) منطقيًّا: ارسم شكل ڤن لتمثيل النواتج الممكنة للتجربة.

c) تحليليًّا: ما عدد النواتج الممكنة؟

d) لفظيًّا: هل يمكن استعمال مبدأ العد الأساسي لإيجاد عدد هذه النواتج؟ وضِّح إجابتك.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

مسائل مهارات التفكير العليا

إرشادات للدراسة

عدم إرجاع العناصر

إذا اخترت عنصرًا من مجموعة عناصر دون إرجاعه إلى المجموعة، فإن عدد عناصر المجموعة يتغير وكذلك عدد النواتج الممكنة.

16) تحدٍّ: يحتوي صندوق على n من الكرات المختلفة. إذا سحبت 3 منها على التوالي دون إرجاع، فما عدد النواتج الممكنة؟ برِّر إجابتك.

17) مسألة مفتوحة: قد لا يكون الرسم الشجري للتجربة متماثلًا. صِفْ تجربة ذات مرحلتين تمثل ذلك، ثم ارسم الرسم الشجري لهذه التجربة، وبرِّر إجابتك.

18) تبرير: تجربة متعددة المراحل، عدد مراحلها k وعدد النواتج الممكنة لكل مرحلة n . اكتب صيغة تستطيع من خلالها إيجاد العدد الكلي للنواتج الممكنة p، ووضِّح إجابتك.

19) اكتب: وضِّح متى يكون استعمال الرسم الشجري ضروريًّا لعرض جميع النواتج الممكنة لتجربة ما، ومتى يكفي استعمال مبدأ العدّ الأساسي.

20) اكتب: وضِّح لماذا لا يمكن استعمال الجدول لتمثيل فضاء العينة لتجربة متعددة المراحل.

تدريب على اختبار

21) يستطيع نايف أن يدعو صديقين له على الغداء. إذا كان لديه أربعة أصدقاء، فما عدد النواتج الممكنة لاختياره اثنين منهم؟

A 4 **C** 8

B 6 **D** 9

22) تحتوي قائمة الطعام في أحد المطاعم على 5 أنواع للطبق الرئيس، و 4 أنواع من الحساء، و 3 أنواع من الحلوى. كم طلبًا مختلفًا يمكن تقديمه إذا اختار الشخص طبقًا رئيسًا واحدًا، ونوعًا من الحساء، وآخر من الحلوى؟

A 12 **C** 60

B 35 **D** عدد لانهائي

مراجعة تراكمية

أوجد قيمة الحد التالي في كلٍّ من المتتابعتين الآتيتين:

23) 3 , 12 , 48 , 192 , ... (الدرس 3-2)

24) -10 , -6 , -2 , 2 , ... (الدرس 2-2)

حلّ كلًّا من المعادلتين الآتيتين (الدرس 1-6)

25) $1+\frac{3}{x-1}=\frac{10}{7}$

26) $1-\frac{3}{2x-1}=\frac{4}{3}$

أوجد الناتج في كلٍّ ممَّا يأتي: (مهارة سابقة)

27) $\frac{3^3}{3\cdot 2}$

28) $\frac{2^4\cdot 6}{8}$

29) $\frac{4^4\cdot 3}{2\cdot 4}$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

رابط الدرس الرقمي

www.ien.edu.sa

3-2

الاحتمال باستعمال التباديل والتوافيق

Probability with Permutations and Combinations

فيما سبق:
درست استعمال مبدأ العد الأساسي. (مهارة سابقة)

والآن:
- أستعمل التباديل في حساب الاحتمال.
- أستعمل التوافيق في حساب الاحتمال.

المفردات:
المضروب
factorial
التباديل
permutations
التباديل الدائرية
circular permutation
التوافيق
combinations

لماذا؟

وقف يوسف وعليٌّ وفراس وفهد لالتقاط صورة جماعية لهم. وهناك 4 خيارات لمن يقف في أقصى اليمين ، و 3 خيارات لمن يقف في المكان الثاني، وخياران للمكان الثالث، وخيار واحد للمكان الأخير.

الاحتمال باستعمال التباديل التبديل تنظيم لمجموعة من العناصر يكون الترتيب فيه مهمًّا. أحد تباديل الأصدقاء الأربعة أعلاه هو: علي، فراس، فهد، يوسف. وباستعمال مبدأ العدّ الأساسي يوجد $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ ترتيبًا ممكنًا لهؤلاء الأصدقاء.

يمكن كتابة العبارة $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ لحساب عدد التباديل للأصدقاء الأربعة على الصورة $4!$ ، ويُقرأ مضروب العدد 4 .

مفهوم أساسي — المضروب

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: يُكتب **مضروب** العدد الصحيح الموجب n على الصورة $n!$ ، ويساوي حاصل ضرب جميع الأعداد الصحيحة الموجبة التي هي أصغر من أو تساوي n .

بالرموز: $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$

وقد اتفق على اعتبار أن $0! = 1$،

مثال 1 — الاحتمال وتباديل n من العناصر

رياضة: نواف وماجد عضوان في فريق المدرسة الرياضي. إذا كان عدد أعضاء الفريق 20، ويرتدي كلٌّ منهم قميصًا مرقّما من (1) إلى (20) بشكل عشوائي، فما احتمال أن يكون رقم قميص نواف (1)، ورقم قميص ماجد (2)؟

الخطوة 1: أوجد عدد نواتج فضاء العيِّنة. وهو عدد التباديل الممكنة لأسماء أعضاء الفريق العشرين ويساوي $20!$.

الخطوة 2: أوجد عدد النواتج التي يتكون منها الحادثة، وهو عدد التباديل الممكنة لأسماء أعضاء الفريق المتبقية، إذا كان رقم قميص نواف 1 ورقم قميص ماجد 2 ويساوي $18! = (20-2)!$

الخطوة 3: احسب الاحتمال

$$P(\text{نواف 1 و ماجد 2}) = \frac{18!}{20!}$$ ← عدد نواتج الحادثة / ← عدد النواتج الممكنة

$$= \frac{\overset{1}{\cancel{18!}}}{20 \cdot 19 \cdot \underset{1}{\cancel{18!}}}$$ جد مفكوك $20!$ واقسم على العوامل المشتركة

$$= \frac{1}{380}$$ بسّط

إرشادات للدراسة

العشوائية
عندما يتم اختيار النواتج عشوائيًا تتساوى فرص وقوعها، ويمكن حساب احتمالاتها باستعمال التباديل والتوافيق.

تحقق من فهمك

1) **تصوير:** ارجع إلى فقرة "لماذا؟". ما احتمال أن يُختار علي ليقف في أقصى يسار الصورة وأن يقف فراس في أقصى يمينها؟

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

ارجع إلى فقرة " لماذا؟"، وافترض أن هناك 6 أصدقاء ولكن المصور يرغب في أن يتم اختيار 4 أشخاص فقط عشوائيًّا ليظهروا في الصورة. وباستعمال مبدأ العدّ الأساسي فإن عدد تباديل مجموعة من 6 أصدقاء مأخوذة 4 في كل مرة هو $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$ أو 360 .

وهناك طريقة أخرى تصف عدد تباديل 6 أصدقاء، إذا اختير 4 منهم في كل مرّة ويرمز إليها بالرمز ${}_6P_4$. ويمكن حساب هذا العدد باستعمال المضروب.

$${}_6P_4 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \frac{6!}{2!} = \frac{6!}{(6-4)!}$$

وهذا يؤدي إلى الصيغة الآتية:

مفهوم أساسي — التباديل

أضف إلى مطويتك

بالرموز: يرمز إلى عدد **تباديل** n من العناصر المختلفة مأخوذة r في كل مرة بالرمز ${}_nP_r$ حيث

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال: عدد تباديل 5 عناصر مأخوذة 2 في كل مرة يساوي:

$${}_5P_2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 20$$

مثال 2 — الاحتمال والتباديل

مجلس الإدارة: يتكوّن مجلس إدارة شركة كبرى من 10 أعضاء ، فإذا كان فيصل ومحمد ومهند أعضاء في مجلس الإدارة، فما احتمال أن يتم اختيار هؤلاء الثلاثة رئيسًا، ونائبًا للرئيس، وأمينًا للسر على الترتيب، مع العلم أن الاختيار يتم عشوائيًّا؟

الخطوة 1: بما أن اختيار المراكز طريقة لترتيب أعضاء مجلس الإدارة، فإن الترتيب في هذه الحالة مهم جدًّا.
عدد النواتج الممكنة في فضاء العيِّنة يساوي عدد تباديل 10 أعضاء أخذ منها 3 في كل مرة، أي ${}_{10}P_3$

$${}_{10}P_3 = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \cancel{7!}}{\cancel{7!}} = 720$$

الخطوة 2: عدد نواتج الحادثة يساوي 1 ؛ لأن هناك ترتيبًا واحدًا فقط للأعضاء الثلاثة في مراكزهم المعينة.

الخطوة 3: لذا فإن احتمال اختيار فيصل رئيسًا ومحمد نائبًا ومهند أمينًا للسر يساوي $\frac{1}{720}$.

إرشادات للدراسة

الاحتمال والتباديل:
يمكنك حل المثال 2 بالطريقة نفسها التي استعملت في المثال 1

تحقق من فهمك

2) بطاقات جامعية: تستعمل الأرقام 9–1 دون تكرار؛ لعمل بطاقات للطلاب مكونة من 8 منازل.

A) ما عدد البطاقات الجامعية الممكنة؟

B) إذا اختيرت بطاقة جامعية عشوائيًّا، فما احتمال أن تحمل أحد الرقمين 42135976, 67953124؟

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

تتكرر في بعض الأحيان بعض العناصر، ولإيجاد عدد التباديل المختلفة في هذه الحالة نستعمل الصيغة الآتية:

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

التباديل مع التكرار

عدد التباديل المختلفة لعناصر عددها n عندما يتكرر عنصر منها r_1 من المرات وآخر r_2 من المرات وهكذا . . . ، فإنه يساوي:

$$\frac{n!}{r_1! \cdot r_2! \cdot \ldots \cdot r_k!}$$

الربط بالحياة

أطول كلمة وردت في القرآن الكريم دون تكرار للحروف هي كلمة ﴿فَأَسْقَيْنَـٰكُمُوهُ﴾ من الآية 22 من سورة الحجر.

مثال 3

الاحتمال والتباديل مع التكرار

برنامج ألعاب: في أحد برامج الألعاب يُعطى المتسابق أحرفًا مبعثرة، ويطلب إليه تكوين كلمة وفق دلائل محددة. بافتراض أنك أعطيت الأحرف الآتية وطلب إليك إعادة ترتيبها لتكوِّن اسم دولة إسلامية. فإذا اخترت تبديلًا لهذه الأحرف بصورة عشوائية، فما احتمال أن يكون الاسم الصحيح ماليزيا؟

الخطوة 1: هناك 7 أحرف يتكرر فيها الحرف (ا) مرتين، والحرف (ي) مرتين؛ ولذا فإن عدد التباديل المختلفة لهذه الأحرف هو:

$$\frac{7!}{2! \cdot 2!} = \frac{5040}{4} = 1260$$

استعمل الآلة الحاسبة

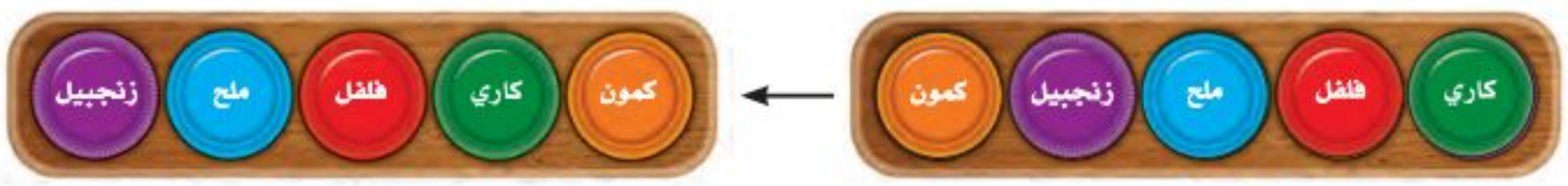
الخطوة 2: هناك ترتيب واحد صحيح لهذه الأحرف يعطي اسم ماليزيا.

الخطوة 3: احتمال أن يكون التبديل الذي تم اختياره عشوائيًّا يعطي اسم ماليزيا يساوي $\frac{1}{1260}$.

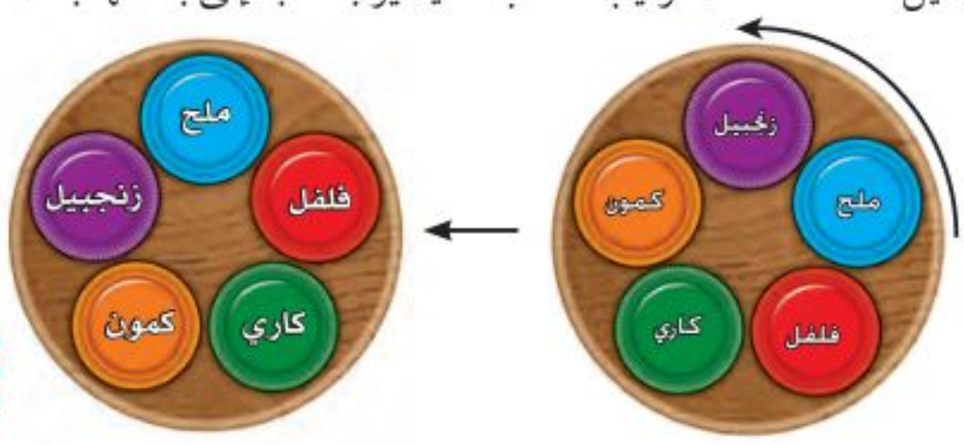
تحقق من فهمك

3) أعداد: تم تكوين عدد مكون من 6 أرقام عشوائيًّا باستعمال الأرقام 1, 5, 2, 1, 5, 3، ما احتمال أن يكون أول رقم في العدد هو 5 وآخر رقم هو 5 أيضًا؟

ما سبق عرضه يتناول ترتيب العناصر على صورة خطية. لاحظ أنه عند تنظيم عُلب التوابل في الشكل أدناه بشكل خطي، ثم إزاحة كل واحدة منها موضعًا واحدًا نحو اليسار (مثلًا)، ينتج لدينا تبديل آخر مختلف، حيث توضع عُلبة الكمون أولًا من اليمين بدلًا من الكاري؛ لذا فإن عدد التباديل المختلفة لهذه التوابل يساوي !5 .



أما إذا رُتبت العناصر على شكل دائرة أو حلقة فتسمى التراتيب الممكنة **تباديل دائرية** ، فإذا وضعتْ عُلب التوابل على منضدة دائرية كما في الشكل أدناه، فستلاحظ أنه عند تدوير المنضدة عكس اتجاه عقارب الساعة (مثلًا) موضعًا واحدًا لا ينتج تبديل مختلف؛ لأن ترتيب العُلب لا يتغير بالنسبة إلى بعضها بعضًا.



لذا فإن؛ تدوير المنضدة 5 مواضع ينتج التبديل نفسه. وعدد التباديل المختلفة على الدائرة يساوي $\frac{1}{5}$ عدد التباديل الكلي عندما تكون العُلب على خط مستقيم.

$$\frac{1}{5} \cdot 5! = \frac{5 \cdot 4!}{5} = 4! = (5-1)!$$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

مفهوم أساسي

التباديل الدائرية

عدد التباديل المختلفة لـ n من العناصر مرتبة على دائرة يساوي:

$$\frac{n!}{n} = (n-1)!$$

إذا رُتبت عناصر عددها n بالنسبة إلى نقطة مرجعية ثابتة (وهي نقطة أو موقع يحدَّد مسبقًا في بعض المسائل المتعلقة بالتباديل الدائرية ويقع عنده أحد العناصر في كل التباديل المختلفة لعناصر المجموعة) مما يؤدي إلى أن الترتيبات ستُعامل خطيًّا وسيكون عدد تباديلها يساوي $n!$.

إرشادات للدراسة

التباديل الدائرية

عدد التباديل الدائرية لـ n من العناصر يساوي عدد التباديل الخطية لها مقسومًا على عددها.

مثال 4 الاحتمال والتباديل الدائرية

أوجد الاحتمالات الآتية، وبرّر إجابتك.

a) زينة: إذا رُتِّبت 6 نماذج لعب صغيرة في سوار عشوائيًّا، فما احتمال ظهورها كما في الشكل المجاور؟

بما أنه لا توجد نقطة مرجعية ثابتة، فإن هذا تبديل دائري.

لذا يوجد $(6-1)!$ أو $5!$ من التباديل المختلفة لهذه القطع. وعليه فإن احتمال ظهور الترتيب المبين في الشكل هو $\frac{1}{5!}$ ويساوي $\frac{1}{120}$.

b) طعام: جلس 4 أشخاص في مطعم حول منضّدة دائرية الشكل وكان أحد المقاعد بجوار النافذة. إذا جلس الأشخاص بشكل عشوائي، فما احتمال أن يجلس الشخص الذي سيدفع فاتورة الطعام بجوار النافذة؟

بما أن الأشخاص يجلسون حول المنضدة حسب نقطة مرجعية ثابتة فإن هذا تبديل خطي. لذا يوجد $4!$ أو 24 طريقة يجلس بها الأشخاص، وعدد نواتج الحادثة يساوي عدد تباديل الأشخاص الثلاثة الآخرين حيث سيجلس الشخص الذي يدفع الفاتورة بجانب النافذة وهذا يساوي $3!$ أو 6 .

لذا؛ فإن احتمال جلوس الشخص الذي سيدفع الفاتورة بجانب النافذة هو $\frac{3!}{4!} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$

إرشادات للدراسة

النقطة المرجعية

قبل بدء إيجاد الاحتمال المطلوب، حدِّد إذا كان ترتيب العناصر يتم وفق نقطة مرجعية ثابتة أم لا.

تحقق من فهمك

4A) بطاقات: إذا رتبت 5 بطاقات مُسجل عليها الأسماء: (حسن، محمد، أحمد، سالم، سعود) على منضدة دائرية عشوائيًّا، فما احتمال ظهورها كما في الشكل المجاور؟

4B) كرة قدم: تجمَّع فريق كرة قدم مكوَّن من 11 لاعبًا على شكل حلقة يتشاورون قبل بداية المباراة، إذا وقف حكم المباراة تمامًا خلف أحدهم، فما احتمال وقوف الحكم خلف حارس المرمى؟ وضِّح تبريرك.

الاحتمال باستعمال التوافيق **التوافيق**: هي اختيار مجموعة من العناصر بحيث يكون الترتيب فيها غير مهم. افترض أنك تحتاج إلى اختيار موظَّفَيْنِ من بين 6 موظفين في أحد أقسام شركة لحضور مؤتمر، فإن الترتيب في اختيار الموظَّفَيْنِ غير مهم. وعليه يجب أن تستعمل التوافيق لتجد عدد الطرق الممكنة لاختيار الموظَّفَيْنِ.

مفهوم أساسي

التوافيق

بالرموز: يرمز إلى عدد توافيق n من العناصر المختلفة مأخوذة r في كل مرة بالرمز ${}_nC_r$ ، حيث $${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

مثال: عدد توافيق 8 عناصر مأخوذة 3 في كل مرة يساوي:

$${}_8C_3 = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{5!}}{\cancel{6} \cdot \cancel{5!}} = 56$$

أضف إلى مطويتك
وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

مثال 5 الاحتمال والتوافيق

كرة طائرة: يريد مدرِّب كرة طائرة اختيار 6 لاعبين من بين 10 لاعبين هم أعضاء الفريق. ما احتمال اختيار اللاعبين محمد وعبد الله وعيسى وخالد وفيصل وطلال؟

الخطوة 1: بما أن ترتيب اختيار اللاعبين ليس مهمًّا، فإن عدد النواتج الممكنة في فضاء العيِّنة يساوي عدد توافيق 10 مأخوذة 6 في كل مرة، أي ${}_{10}C_6$.

$$ {}_{10}C_6 = \frac{10!}{6!(10-6)!} = \frac{10 \cdot \overset{3}{\cancel{9}} \cdot \cancel{8} \cdot 7 \cdot \cancel{6!}}{\cancel{6!} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2}} = 210 $$

الخطوة 2: أوجد عدد النواتج التي تتكون منها الحادثة، وفي هذه الحالة يساوي ${}_6C_6 = 1$، وهو اختيار اللاعبين الستة المذكورين، وترتيب اختيارهم ليس مهمًّا.

الخطوة 3: لذا فإن احتمال اختيار اللاعبين الستة هو $\frac{{}_6C_6}{{}_{10}C_6} = \frac{1}{210}$.

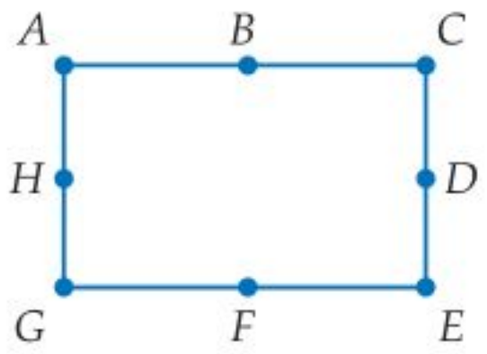
إرشادات للدراسة

التباديل والتوافيق

استعمل التباديل عندما يكون ترتيب العناصر مهمًّا، والتوافيق عندما لا يكون الترتيب مهمًّا.

تحقق من فهمك

5) هندسة: إذا تم اختيار ثلاث نقاط عشوائيًّا من النقاط المسماة على المستطيل في الشكل المجاور ، فما احتمال أن تقع النقاط الثلاث على قطعة مستقيمة واحدة؟



تأكد

مثال 1 **1) هندسة:** إذا طُلب إليك ترتيب المضلعات المبيّنة أدناه في صفٍّ من اليمين إلى اليسار، فما احتمال أن يكون المثلَّث هو الأول والمربع هو الثاني؟

مثال 2 **2) معرض علمي:** تعرض جماعة النادي العلمي البالغ عدد أفرادها 40 طالبًا في مدرسة ثانوية تجارب علمية، إذا اختير ثلاثة طلاب من الجماعة عشوائيًّا. فما احتمال أن يتم اختيار عبد المجيد للإشراف على تجارب الفيزياء، وزيد للإشراف على تجارب الكيمياء، ومحمود للإشراف على تجارب الأحياء؟

مثال 3 **3) أعداد:** يتكون عدد من الأرقام 5,6,6,3,3,3,1 . ما احتمال أن يكون هذا العدد 5663133 ؟

مثال 4 **4) كيمياء:** في معمل الكيمياء طُلب إليك اختبار ست عينات رتُبت عشوائيًّا على منضدة دائرية.

a) ما احتمال ظهور الترتيب المبين في الشكل المجاور؟

b) ما احتمال أن تكون العينة 2 في المكان المشار إليه بسهم على الرسم؟

مثال 5 **5) مسابقات:** اشترك 15 طالبًا من الصف الثاني الثانوي في مسابقة ثقافية. إذا اختير منهم 4 طلاب عشوائيًّا، فما احتمال أن يكونوا: ماجد وعبدالعزيز وخالد وفوزي؟

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

تدرب وحل المسائل

مثال 1

6) محاضرات: ذهبت مها وسعاد لحضور محاضرة علمية. إذا اختارت كلٌّ منهما مقعدًا في الصف المبين أدناه عشوائيًّا، فما احتمال أن تختار مها المقعد C11، وسعاد المقعد C12؟

7) حفلات: وَزِّعت بطاقات مرقّمة من 1 إلى 50 على 50 شخصًا في حفلة، وكان حسين وزياد من بين الحاضرين. ما احتمال أن يكون حسين قد أخذ البطاقة رقم 14 وزياد البطاقة رقم 23 ؟

مثال 2

8) مجموعات: تمّ اختيار شخصين عشوائيًّا من مجموعة من عشرة أشخاص. ما احتمال اختيار طارق أولًا ثم سليم ثانيًا؟

مثال 3

9) أحرف ممغنطة: اشترى عدنان أحرفًا ممغنطةً يمكن ترتيبها على باب ثلاجته، بحيث تشكل كلمات معينة. إذا اختار تبديلًا من الأحرف المبينة في الشكل المجاور عشوائيًّا، فما احتمال أن تشكّل هذه الأحرف كلمة "مكالمات"؟

10) رموز بريدية: ما احتمال أن يكون الرمز البريدي 97275 إذا تم تكوينه عشوائيًّا من الأرقام 7,9,5,7,2؟

مثال 4

11) مجموعات: يرتب سامي المقاعد على صورة دوائر للعمل في مجموعات متعاونة. إذا كان في دائرة سامي 7 مقاعد، فما احتمال أن يكون مقعد سامي هو الأقرب إلى الباب؟

12) مدينة ألعاب: ذهب خليل وأصدقاؤه إلى مدينة ألعاب وقد اختاروا لعبة ذات مقاعد مرتبة في دائرة. إذا كان عدد المقاعد 8، فما احتمال أن يجلس خليل في المقعد الأبعد عن مدخل اللعبة؟

13) ألعاب: رُتبت 8 كرات مرقّمة بالأرقام 2, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13 عشوائيًّا في صف:

a) ما احتمال أن تكون الكرة 2 والكرة 11 هما الأولى والثانية من اليسار على الترتيب؟

b) إذا خلطت الكرات الثماني عشوائيًّا. فما احتمال أن يكون الترتيب كما هو مبيّن في الشكل أدناه؟

c) إذا أُعيد ترتيب الكرات عشوائيًّا بحيث شكلت دائرة. فما احتمال أن تكون الكرة 6 إلى جانب الكرة 7؟

14) كرات: إذا وضعت 7 كرات في صف؛ ثلاث منها أرقامها 8 ، وثلاث أرقامها 9، وكرة واحدة رقمها 6. فما احتمال أن تكون الكرات ذات الرقم 8 عن يسار الكرة 6 ، والكرات ذات الرقم 9 عن يمينها؟

مثال 5

15) مستقيمات: ما عدد المستقيمات التي يمكن رسمها من 10 نقاط ولا تقع أيٌّ ثلاث منها على استقامة واحدة؟ وضِّح إجابتك.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

مسائل مهارات التفكير العليا

16) تبرير: هل العبارة الآتية صحيحة أحيانًا أم صحيحة دائمًا أم أنها غير صحيحة أبدًا ؟ برّر إجابتك.

$${}_nP_r = {}_nC_r$$

17) تحدٍّ: يدّعي طالب أن العلاقة بين التباديل والتوافيق هي: ${}_nC_r = {}_nP_r \cdot r!$.
بيّن صحّة هذه العلاقة جبريًّا، ثم وضِّح لماذا يختلف ${}_nC_r$ و ${}_nP_r$ بعاملٍ مقداره $r!$.

18) مسألة مفتوحة: صف وضعًا يكون فيه الاحتمال يساوي $\frac{1}{{}_7C_3}$.

19) برهان: برهن أن ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$.

20) اكتب: بيّن أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين التباديل والتوافيق .

تدريب على اختبار

21) احتمال: يقف رجلان وولدان في صفٍّ واحدٍ. فما احتمال أن يقف رجل عند كل طرف من طرفَي الصف إذا اصطفوا بشكل عشوائي؟

A $\frac{1}{24}$ **C** $\frac{1}{6}$

B $\frac{1}{12}$ **D** $\frac{1}{2}$

22) إجابة قصيرة: إذا اخترت تبديلًا للأحرف المبينة أدناه عشوائيًّا، فما احتمال أن تتكون كلمة "فسيفساء"؟

ف	ء	س	ف	ي	س	ا	

23) احتمال: ألقي مكعب مرقّم 9 مرات متتالية، فظهر العدد 6 على الوجه العلوي 9 مرات. إذا ألقي المكعب نفسه للمرة العاشرة، فما الاحتمال النظري لظهور العدد 6 على الوجه العلوي؟

A 1

B $\frac{9}{10}$

C $\frac{1}{6}$

D $\frac{1}{10}$

مراجعة تراكمية

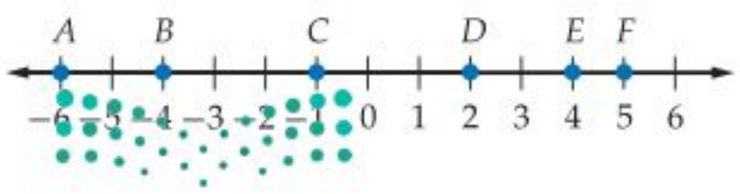
24) تسوّق: لدى محل تجاري أنواع من المعاطف النسائية بالمقاسات 4 أو 6 أو 8 أو 10 وذات ألوان متعددة منها الأسود، الأخضر، الأزرق، الأحمر. كم معطفًا مختلفًا يمكن اختياره؟ (الدرس1-3)

مثّل فضاء العيِّنة في كلِّ تجربةٍ ممّا يأتي بالرسم الشجري :

25) إلقاء ثلاث قطع نقد متمايزة الواحدة تلو الأخرى. (الدرس1-3)

26) سحب كرتين معًا من صندوق يحتوي على 3 كرات حمراء، و4 كرات بيضاء، و 3 كرات سوداء. (الدرس1-3)

أوجد قياس كلٍّ مما يأتي مستعملًا خط الأعداد: (مهارة سابقة)



27) DF

28) AE

29) EF

30) BD

31) AC

32) CF

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي
رابط الكتاب الرقمي
www.ien.edu.sa

3-3

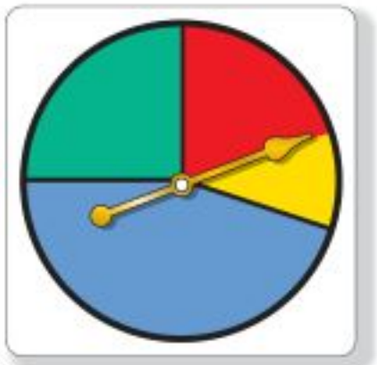
الاحتمال الهندسي
Geometric Probability

فيما سبق:
درست إيجاد احتمالات الحوادث البسيطة. (مهارة سابقة)

والآن:
- أجد الاحتمالات باستعمال الأطوال.
- أجد الاحتمالات باستعمال المساحات.

المفردات:
الاحتمال الهندسي
geometric probability

لماذا؟



في القرص ذي المؤشر الدَّوار المبين في الشكل، إذا تم تدوير المؤشر فإنه يستقر على أحد الألوان (الأزرق، الأحمر، الأخضر، الأصفر)، ويعاد تدوير المؤشر إن استقر على الخط الفاصل بين لونين.

الاحتمال الهندسي: احتمال استقرار مؤشر القرص على أحد الألوان يعتمد على مساحة ذلك اللون. ويسمى الاحتمال الذي يتضمن قياسًا هندسيًّا مثل الطول أو المساحة **احتمالًا هندسيًّا**.

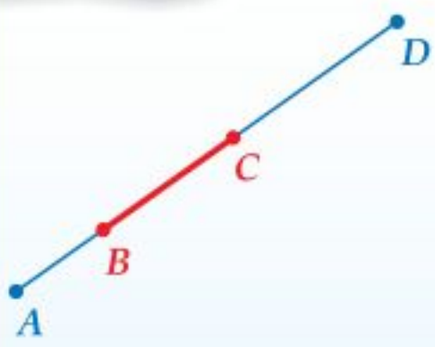
مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

الاحتمال والأطوال

التعبير اللفظي: إذا احتوت القطعة المستقيمة (1) قطعة مستقيمة أخرى (2)، واختيرت نقطة تقع على القطعة (1) عشوائيًّا، فإن احتمال أن تقع النقطة على القطعة (2) يساوي:

$$\frac{\text{طول القطعة المستقيمة (2)}}{\text{طول القطعة المستقيمة (1)}}$$



مثال: إذا اختيرت النقطة E عشوائيًّا على $\overline{AD}$، فإن:

$$P(E \in \overline{BC}) = \frac{BC}{AD}$$

إرشادات للدراسة

الاحتمال والأطوال
$P(E \in \overline{BC})$ تعني احتمال أن تقع النقطة E على القطعة المستقيمة $\overline{BC}$.

مثال 1

استعمال الأطوال لإيجاد الاحتمال الهندسي

إذا اختيرت النقطة X عشوائيًّا على $\overline{JM}$ كما في الشكل أدناه، فأوجد احتمال أن تقع X على $\overline{KL}$.

$$P(X \in \overline{KL}) = \frac{KL}{JM}$$ احتمال الأطوال

$$KL = 7,\ JM = 3 + 7 + 4 = 14$$

$$= \frac{7}{14}$$ بسّط

$$= \frac{1}{2} = 0.5 = 50\%$$

تحقق من فهمك

إذا اختيرت النقطة X عشوائيًّا على $\overline{JM}$ في الشكل السابق، فأوجد كلًّا ممَّا يأتي:

(1A $P(X \in \overline{LM})$

(1B $P(X \in \overline{KM})$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

يمكنك استعمال الاحتمال الهندسي في مواقف كثيرة من واقع الحياة تتضمن عددًا غير منتهٍ من النواتج

الربط بالحياة

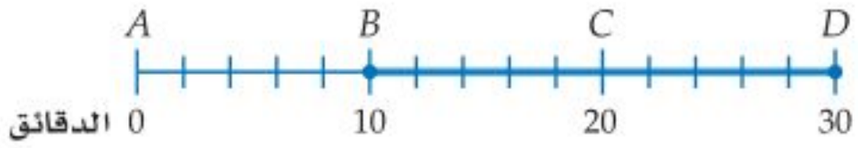
الحافلة وسيلة نقل للركاب، تُصَمَّم بأحجام مختلفة. وتسير معظم الحافلات بالديزل أو البنزين، ومنها ما يسير بالكهرباء، وبعضها ذات مفاصل مترابطة؛ أي لها قسمان متصلان بغطاء مرن. وتسعى شركات الحافلات إلى تخفيض أجرتها؛ ليصبح النقل العام أكثر شعبية لدى المسافرين.

مثال 2 من واقع الحياة

نمذجة احتمالات من واقع الحياة

مواصلات: **تصل حافلة ركاب إلى الموقف أو تغادره كل 30 دقيقة. إذا وصل راكب إلى المحطة، فما احتمال أن ينتظر 10 دقائق أو أكثر لركوب إحدى الحافلات؟**

يمكن تمثيل الموقف باستعمال خط الأعداد. بما أن الحافلات تصل كل 30 دقيقة، فإن الحافلة التالية تصل بعد 30 دقيقة أو أقل من وصول الراكب. وتمثل حادثة الانتظار 10 دقائق أو أكثر بالقطعة المستقيمة BD على خط الأعداد الآتي:



أوجد احتمال هذه الحادثة.

احتمال الطول

$$P(\text{انتظار 10 دقائق أو أكثر}) = \frac{BD}{AD}$$

$BD = 20, AD = 30$

$$= \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$$

لذا فاحتمال انتظار 10 دقائق أو أكثر لوصول الحافلة التالية يساوي $\frac{2}{3}$ ، أو 67% تقريبًا.

تحقق من فهمك

2) شاي: يحضِّر مطعم الشاي في وعاء سعته 8L ، وعندما ينخفض مستوى الشاي في الوعاء عن 2L، يصبح تركيز الشاي كبيرًا ويختلف طعمه.

A) إذا حاول شخص ملء كأس من الشاي، فما احتمال أن يكون مستوى الشاي في الوعاء تحت مستوى 2L ؟

B) ما احتمال أن يكون مستوى الشاي في الوعاء في أيِّ وقت بين 2L و 3L؟

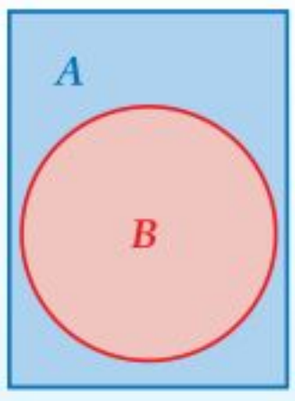
الاحتمال والمساحة: تتضمن الاحتمالات الهندسية حساب المساحات أيضًا. وفيما يأتي كيفية حساب الاحتمال الهندسي المتضمن مساحة.

مفهوم أساسي — **الاحتمال والمساحة**

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا احتوت المنطقة A منطقة أخرى B ، واختيرت النقطة E من المنطقة A عشوائيًّا، فاحتمال أن تقع النقطة E في المنطقة B يساوي:

$$\frac{\text{مساحة المنطقة } B}{\text{مساحة المنطقة } A}$$



مثال: إذا اختيرت النقطة E عشوائيًّا في المستطيل A ، فإن:

$$P(\text{وقوع النقطة } E \text{ في الدائرة } B) = \frac{\text{مساحة الدائرة } B}{\text{مساحة المستطيل } A}$$

وعند تحديد الاحتمال الهندسي لهدفٍ ما نفترض الآتي:

- وقوع الهدف ضمن منطقة محددة .
- أن احتمال وقوع الهدف في أيِّ مكانٍ من المنطقة متساوٍ .

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

مثال 3 من واقع الحياة

استعمال المساحة لإيجاد الاحتمال الهندسي

الهبوط بالمظلات: يهبط مظلي على هدف مكون من ثلاث دوائر متحدة المركز. إذا كان قطر الدائرة الداخلية 2 m ويزداد نصف قطر كل دائرة تالية بمقدار 1 m، فما احتمال أن يهبط المظلي في الدائرة الحمراء؟

نجد نسبة مساحة الدائرة الحمراء إلى مساحة الهدف الكلي، ونصف قطر الدائرة الحمراء يساوي 1 m، بينما نصف قطر الهدف الكلي يساوي 1 + 1 + 1، أو 3 m.

$$P(\text{أن يهبط المظلي في الدائرة الحمراء}) = \frac{\text{مساحة الدائرة الحمراء}}{\text{مساحة الهدف}}$$ احتمال المساحة

$$= \frac{\pi(1)^2}{\pi(3)^2}$$ $A = \pi r^2$

$$= \frac{\pi}{9\pi} = \frac{1}{9}$$ بسّط

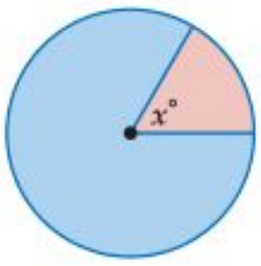
احتمال أن يهبط المظلي في الدائرة الحمراء هو $\frac{1}{9}$، ويساوي 11% تقريبًا.

تحقق من فهمك

3) الهبوط بالمظلات: أوجد كلًّا مما يأتي بالاعتماد على المثال السابق.

A) P(أن يهبط المظلي في المنطقة الزرقاء)

B) P(أن يهبط المظلي في المنطقة البيضاء)



يمكنك أيضًا استعمال قياس الزاوية لإيجاد الاحتمال الهندسي.

إن نسبة مساحة قطاع في دائرة إلى مساحة الدائرة الكلية كنسبة قياس زاوية القطاع المركزية ($x°$) إلى 360°. (ستبرهن هذا في السؤال 21)، وعليه فإنه إذا اختيرت نقطة عشوائيًّا داخل الدائرة فإن احتمال وقوعها داخل القطاع يساوي $\frac{x}{360}$

مثال 4

استعمال قياسات الزوايا لإيجاد الاحتمال الهندسي

استعمل القرص ذا المؤشر الدوّار في الشكل المجاور لإيجاد كلٍّ مما يأتي:

(علمًا بأنه يعاد تدوير المؤشر إذا استقر على الخط الفاصل بين القطاعات الملونة)

a) P(استقرار المؤشر على اللون الأصفر)

قياس زاوية القطاع الأصفر 45°

$$P(\text{استقرار المؤشر على اللون الأصفر}) = \frac{45}{360} \approx 12.5\%$$

b) P(استقرار المؤشر على اللون البنفسجي)

قياس زاوية القطاع البنفسجي 105°

$$P(\text{استقرار المؤشر على اللون البنفسجي}) = \frac{105}{360} \approx 29\%$$

c) P(عدم استقرار المؤشر على اللون الأحمر أو على اللون الأزرق)

مجموعة قياس زاويتي القطاعين الأحمر والأزرق 50° + 70° = 120°

$$P(\text{عدم استقرار المؤشر على اللون الأحمر أو على اللون الأزرق}) = \frac{360 - 120}{360} = \frac{240}{360} \approx 67\%$$

تحقق من فهمك

4A) P(عدم استقرار المؤشر على اللون الأخضر)

4B) P(استقرار المؤشر على اللون الأزرق)

الربط بالحياة

الهبوط بالمظلات يتطلب جرأة لممارسته؛ حيث يقفز المظلي من ارتفاع 10.000 متر فأكثر. وينقسم إلى: القفز بالمظلة وهو آمن وسهل؛ لأنه تلقائي ولا يستلزم تحكم القافز. والقفز الحرّ وهو للمحترفين، حيث يتحكم القافز بالمظلة في موضع هبوطه.

إرشادات للدراسة

استعمال التقدير

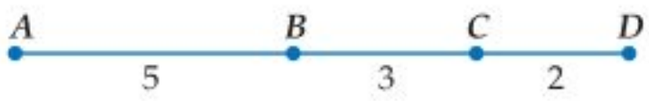
في المثال 4b، مساحة القطاع البنفسجي أقل قليلًا من $\frac{1}{3}$، أو 33% من القرص؛ لذا فالجواب 29% يكون معقولًا.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

تأكد

مثال 1 إذا اختيرت النقطة X عشوائيًّا على $\overline{AD}$ في الشكل المجاور، فأوجد كلًّا مما يأتي:



1) $P(X$ أن تقع على $\overline{BD})$

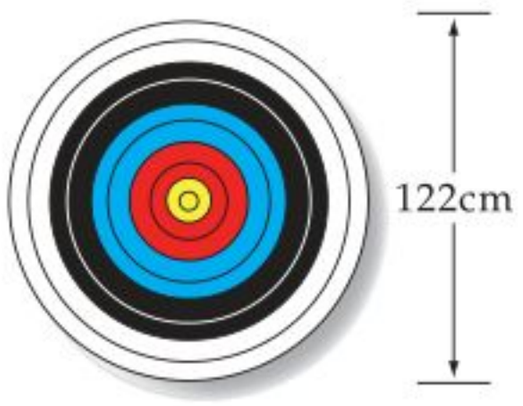
2) $P(X$ أن تقع على $\overline{BC})$

مثال 2

3) مواصلات: ينقل أحد فنادق مكة المكرمة المعتمرين من الفندق إلى الحرم، حيث تصل حافلة ركاب إلى الفندق أو تغادره كل 20 دقيقة. إذا وصل شخص إلى موقف الحافلات في الفندق، فما احتمال أن ينتظر 5 دقائق أو أقل لركوب إحدى الحافلات؟

المثالان 4 ,3

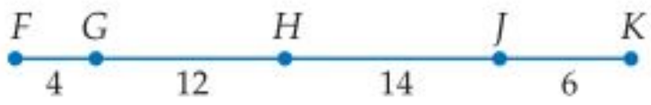
4) لعبة السهام: يُسدد هدّاف سهمه نحو قرص قطره 122 cm يحتوي على 10 دوائر متحدة المركز تتناقص أقطارها بمقدار 12.2 cm كلما اقتربت من المركز. أوجد احتمال أن يصيب الهدّاف نقطة داخل الدائرة الصغرى.



5) ملاحة: ضَلّ أحد طلبة الكشافة طريقه في غابة، فوجّه بوصلته عشوائيًّا كما في الشكل أدناه. أوجد احتمال أن يوجه البوصلة باتجاه المنطقة المحصورة بين الشمال (N) والشمال الشرقي (NE).

تدرب وحل المسائل

مثال 1 إذا اختيرت النقطة X عشوائيًّا على $\overline{FK}$ في الشكل المجاور، فأوجد كلًّا مما يأتي:

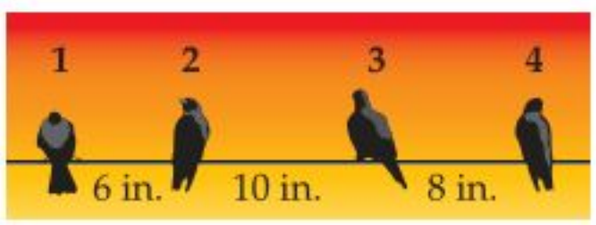


6) $P(X \in \overline{FH})$

7) $P(X \in \overline{GJ})$

8) $P(X \in \overline{HK})$

9) طيور: تقف أربعة طيور عند نقاطٍ على سلكٍ كما في الشكل المجاور. فإذا هبط طائر خامس عشوائيًّا على نقطة من نقاط السلك فما احتمال أن يقف بين الطائر رقم 3 والطائر رقم 4؟

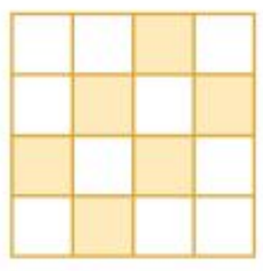


مثال 2

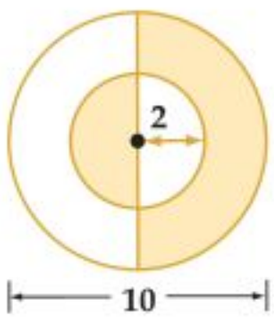
10) تلفاز: يُتابع عمّار برنامجًا تلفزيونيًّا مدته 30 دقيقة. إذا كان يُبث إعلان في التلفاز في وقت عشوائي مرّة كل فترة 3 ساعات. فما احتمال أن يشاهد عمّار الإعلان ثانية خلال متابعته برنامجه المفضّل الذي مدته 30 دقيقة في اليوم التالي؟

مثال 3 اختيرت نقطة عشوائيًّا في كلٍّ من الأشكال الآتية، أوجد احتمال وقوعها في المنطقة المظلّلة.

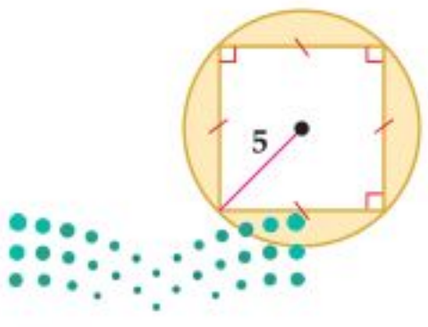
11)



12)



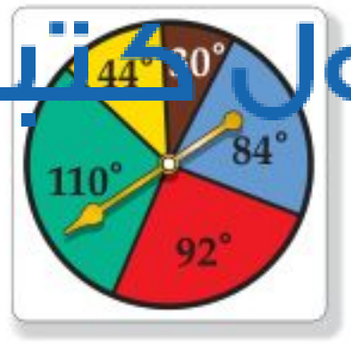
13)



وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

مثال 4 استعمل القرص ذا المؤشر الدوّار لإيجاد كلٍّ مما يأتي
(إذا استقر المؤشر على الخط الفاصل بين القطاعات الملونة يُعاد تدويره):



14) P(استقرار المؤشر على اللون الأصفر)

15) P(استقرار المؤشر على اللون الأزرق)

16) P(عدم استقرار المؤشر على اللون الأخضر)

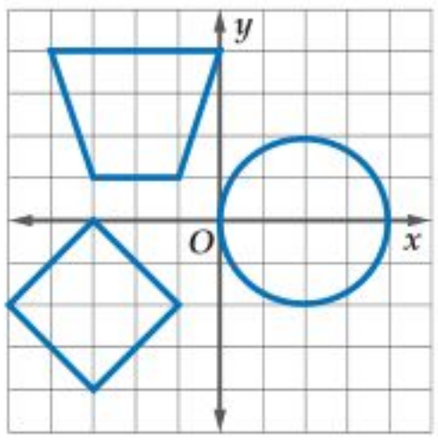
17) P(عدم استقرار المؤشر على اللون الأحمر ولا على اللون الأصفر)

صِفْ حادثة يكون احتمالها $\frac{1}{3}$ لكلٍّ من النماذج الآتية:

18)

19)

20) هندسة إحداثية: إذا اختيرت نقطة عشوائيًّا على الشبكة المجاورة، فأوجد كلًّا مما يأتي:



a) P(النقطة داخل الدائرة)

b) P(النقطة داخل شبه المنحرف)

c) P(النقطة داخل شبه المنحرف أو المربع أو الدائرة)

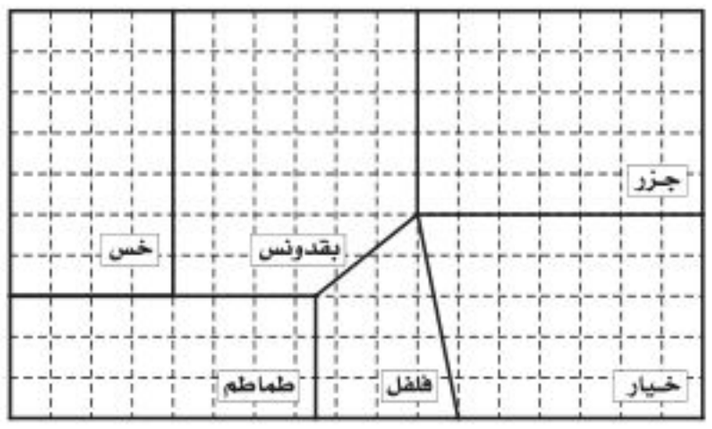
الربط بالحياة

تشجّع المملكة العربية السعودية الزراعة وتوليها اهتمامًا ودعمًا، حيث تتركز الزراعة على الاكتفاء الذاتي، وتصدير القمح والتمور ومنتجات الألبان والبيض والفواكه والخضراوات والزهور إلى الأسواق في جميع أنحاء العالم.

21) جبر: اختيرت نقطة عشوائيًّا في الدائرة المجاورة. أثبت أن احتمال وقوعها في المنطقة المظللة يساوي $\frac{x}{360}$. (إرشاد: مساحة القطاع الدائري = مساحة الدائرة $\times$ $\frac{x}{360}$)

22) هندسة إحداثية: إذا اختيرت نقطة (x, y) عشوائيًّا في منطقة حل نظام المتباينات $1 \le x \le 6, y \le x, y \ge 1$، فما احتمال أن يكون $(x-1)^2 + (y-1)^2 \ge 16$؟

23) زراعة: مزرعة مقسمة إلى حقول كما في الشكل المجاور،

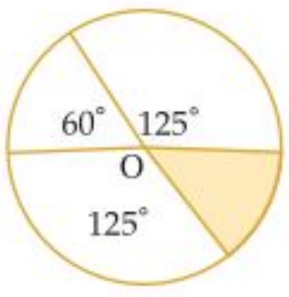


a) ما المساحة الإجمالية لحقول الخيار والجزر؟

b) إذا وقف مزارع في مكان من المزرعة عشوائيًّا لجني المحصول، فما احتمال أن يكون قد وقف في حقل من حقول البقدونس.

مسائل مهارات التفكير العليا

24) اكتشف الخطأ: حسب كلٌّ من عمر وسالم احتمال وقوع النقطة التي يتم اختيارها عشوائيًّا داخل الدائرة O في المنطقة المظلّلة، أيُّهما حلُّه صحيح؟ وضِّح تبريرك.



عمر

$$P = \frac{\text{قياس زاوية القطاع المظلل}}{360}$$

$$= \frac{50}{360}$$

$$\approx 13.9\%$$

سالم

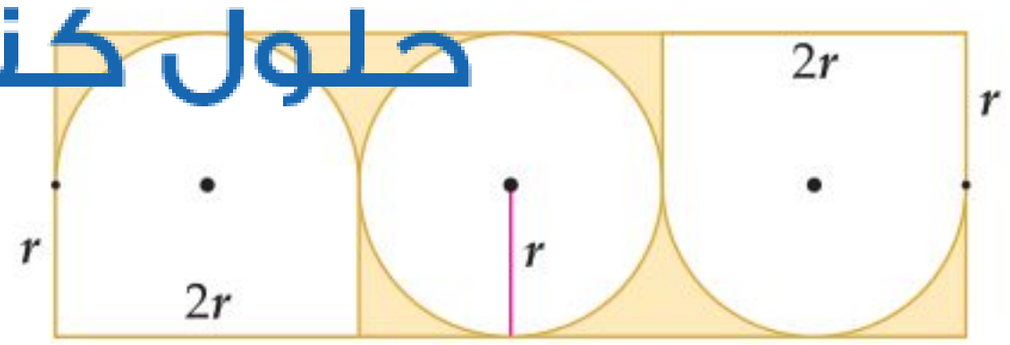
$$P = \frac{\text{قياس زاوية القطاع المظلل}}{360}$$

$$= \frac{60}{360}$$

$$\approx 16.7\%$$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

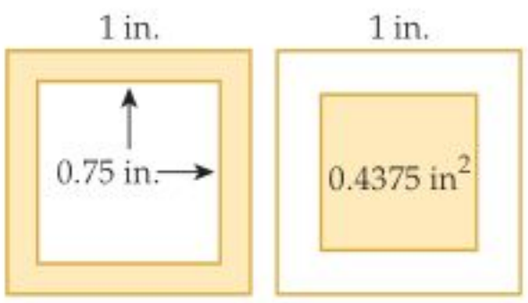
موقع حلول كتبي



25) تحدٍّ: أوجد احتمال أن تقع نقطة يتم اختيارها عشوائيًّا داخل الشكل المجاور في المنطقة المظللة مقربًا الناتج إلى أقرب عُشرٍ.

26) تبرير: محيط مثلَّث متطابق الضلعين يساوي 32 cm. إذا كانت أطوال أضلاع المثلَّث أعدادًا صحيحة، فما احتمال أن تكون مساحته $48\ cm^2$ بالضبط؟ وضِّح تبريرك.

27) مسألة مفتوحة: مثّل حادثة احتمالها 20% باستعمال ثلاثة أشكال هندسية مختلفة.



28) اكتب: إذا اختيرت نقطة عشوائيًّا في كلٍّ من المربعين الآتيين، فوضِّح لماذا يتساوى احتمال وقوعها في المنطقة المظلّلة في أيٍّ منهما.

تدريب على اختبار

29) احتمال: رسمت دائرة نصف قطرها 3 وحدات داخل مربع طول ضلعه 9 وحدات، واختيرت نقطة عشوائيًّا داخل المربع. ما احتمال أن تقع أيضًا داخل الدائرة؟

A $\frac{1}{9}$ **C** $\frac{1}{3}$

B $\frac{\pi}{9}$ **D** $\frac{9}{\pi}$

30) احتمال: يحتوي صندوق على 7 كرات زرقاء، و6 كرات حمراء، وكرتين بيضاوين و 3 كرات سوداء. إذا سحبت كرة واحدة عشوائيًّا. فما احتمال أن تكون حمراء؟

A $\frac{1}{9}$ **C** $\frac{1}{3}$

B $\frac{1}{6}$ **D** $\frac{7}{18}$

31) إجابة قصيرة: قُسّم القرص الآتي إلى 8 قطاعات متساوية. وقد أدير المؤشر:

a) إذا استقر المؤشر عند عدد، فما احتمال أن يكون هذا العدد 3؟

b) إذا استقر المؤشر عند عدد، فما احتمال أن يكون هذا العدد فرديًّا؟

مراجعة تراكمية

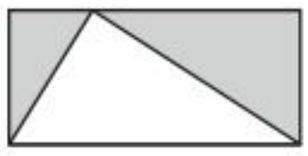
32) حفلة: يجلس خمسة أصدقاء حول منضدة دائرية الشكل في حجرة فيها نافذة واحدة، ما احتمال أن يجلس أحدهم على المقعد الأقرب إلى النافذة؟ (الدرس 2-3)

مثّل فضاء العيِّنة لكل تجربة مما يأتي باستعمال القائمة المنظمة، والجدول، والرسم الشجري: (الدرس 1-3)

33) في كلٍّ من السنتين القادمتين يمكن لأحمد الاشتراك في النشاط الثقافي (C) أو النشاط العلمي (S).

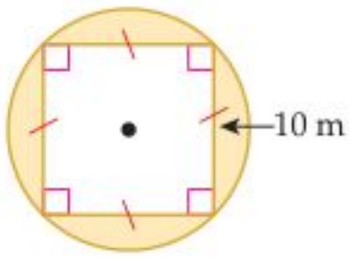
34) يمكن أن تشتري أمينة زوج أحذية له كعب مرتفع (H) أو كعب منخفض (L)، وبلون أسود (K) أو بني (B).

35) هندسة: في الشكل المجاور، ما نسبة المساحة المظللة إلى مساحة المستطيل؟ (مهارة سابقة)

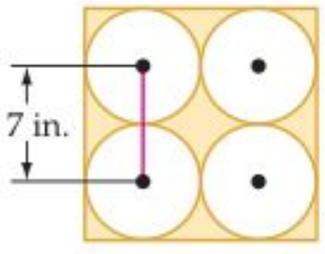


أوجد مساحة المنطقة المظلّلة في كلٍّ مما يأتي: (مهارة سابقة)

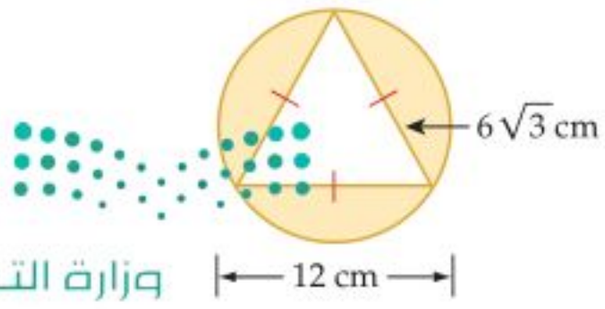
36)



37)



38)



وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

1) طعام: يتكون غداء صالح من شطيرة وحساء وحلوى ومشروب حسب الجدول الآتي:

شطائر	حساء	الحلوى	مشروبات
دجاج	دجاج	كعك	شاي
لحم	خضراوات	كنافة	قهوة
لبنة	عدس		عصير برتقال
جبنة			عصير تفاح
			حليب

a) ما عدد الوجبات المختلفة التي يمكن لصالح أن يتناولها إذا اختار صنفًا من كل عمود؟

b) إذا أضيف نوع واحد من الحساء ونوعان من الحلوى، فكم يصبح عدد الوجبات المختلفة؟

2) أعداد: كم عددًا مختلفًا مكونًا من (5) أرقام يمكن تكوينه باستعمال الأرقام 9 ,... ,4 ,3 ,2 ، دون تكرار الرقم الواحد أكثر من مرة؟

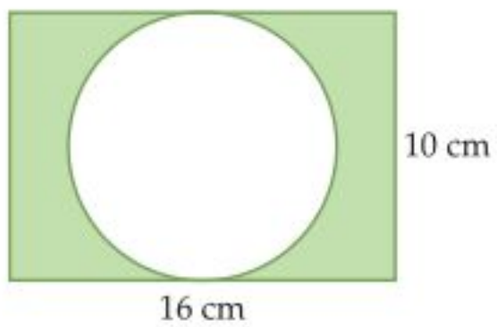
3) ملابس: في محل تجاري قمصان ألوانها: أحمر (R)، أزرق (B)، أصفر (Y)، أخضر (G)، زهري (P)، برتقالي (O)، وكل منها بنوعي أكمام: طويل (L) وقصير (S). مثّلْ فضاء العيِّنة لخيارات القمصان لدى مريم، إذا أرادت شراء قميص من المحل باستعمال القائمة المنظمة والجدول والرسم الشجري.

4) كتابة: يحتوي كيس على بطاقات كُتب على كل واحدة منها حرف واحد من الحروف: ر ، ف ، س ، ة ، و ، ي. إذا اختير تبديل واحد من هذهِ الحروف عشوائيًّا لتكوين كلمة، فما احتمال أن تكون الكلمة "فروسية"؟

5) نقود: لدى محمود 3 جيوب و 4 قطع نقدية مختلفة. بكم طريقة يمكنه وضع القطع جميعها في جيوبه؟

6) نقود: إذا أُلقيتْ قطعة نقد عشر مرات متتالية، فما عدد النواتج التي تظهر فيها الصورة في الرمية الثالثة؟

7) هندسة: إذا اختيرت نقطة عشوائيًّا داخل المستطيل في الشكل أدناه، فما احتمال أن تقع في المنطقة المظللة؟



8) سيرك: مُدَّ حبل طوله 320 m بين عمودين. على فرض أن فرص قَطْعِ الحبل عند أيِّ نقطة من نقاطه متساوية.

a) أوجد احتمال أن ينقطع الحبل في أول 50 m منه.

b) أوجد احتمال أن ينقطع الحبل من نقطة تقع ضمن مسافة 20 m من أيٍّ من العمودين.

اختيرت نقطة A عشوائيًّا على $\overline{BE}$ في الشكل أدناه. أوجد كلًّا ممّا يأتي:

9) $P(\overline{CD}$ على A تقع أن) **10)** $P(\overline{BD}$ على A تقع أن)

11) $P(\overline{CE}$ على A تقع أن) **12)** $P(\overline{DE}$ على A تقع أن)

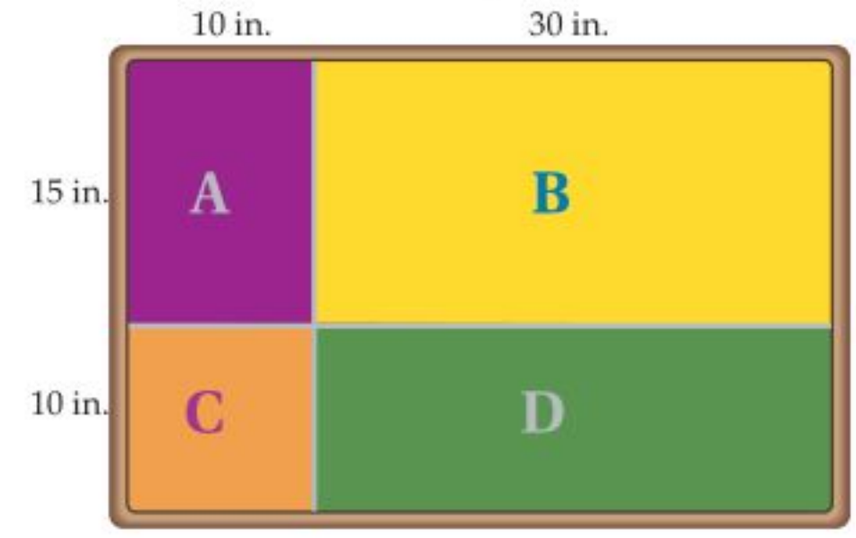
استعمل القرص ذا المؤشر الدوار في الشكل المجاور لإيجاد كلٍّ مما يأتي (إذا استقر المؤشر على الخط الفاصل بين القطاعات الملونة، فإنه يُعاد تدويره مرة أخرى):

13) P(استقرار المؤشر في المنطقة الصفراء)

14) P(استقرار المؤشر في المنطقة الزرقاء)

15) P(استقرار المؤشر في المنطقة الحمراء)

16) لعبة السهام: الهدف من لعبة رمي السهام أن يصيب السهم المنطقة المربعة الشكل C في اللوحة المستطيلة الشكل المبينة أدناه، إذا سدد لاعب سهمًا ووقع في نقطة ما على اللوحة، فما احتمال أن يكون قد وقع في:



a) المنطقة A؟

b) المنطقة B؟

c) المنطقة C؟

d) المنطقة D؟

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

رابط الدرس الرقمي
www.ien.edu.sa

3-4

احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة
Probabilities of Independent and Dependent Events

فيما سبق:
درست حساب الاحتمالات البسيطة. (مهارة سابقة)

والآن:
- أجد احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة.
- أجد احتمال حادثة إذا عُلم وقوع حادثة أخرى.

المفردات:
الحادثة المركبة
compound event
الحوادث المستقلة
independent events
الحوادث غير المستقلة
dependent events
الاحتمال المشروط
conditional probability
شجرة الاحتمال
probability tree
الحادثة المشروطة
conditional event

لماذا؟

يسحب معلم الكيمياء عشوائيًّا بطاقات من صندوق فيه أسماء طلاب صفِّه البالغ عددهم 18 طالبًا، ليحدد من سيقدم عرضه الأول. ويأمل سعود أن يكون الأول وصديقه فيصل الثاني.

الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة: تتكون **الحادثة المركبة** من حادثتين بسيطتين أو أكثر. وفي فقرة "لماذا؟" أعلاه، نجد أن اختيار سعود وفيصل لتقديم عرضيهما أولًا يُمثل حادثة مركبة؛ لأنها تتكون من حادثة اختيار سعود وحادثة اختيار فيصل.

ويمكن أن تكون الحوادث المركبة مستقلة أو غير مستقلة.

- تكون A و B **حادثتين مستقلتين** إذا كان احتمال حدوث A لا يؤثر في احتمال حدوث B.
- تكون A و B **حادثتين غير مستقلتين** إذا كان احتمال حدوث A يغيّر بطريقةٍ ما احتمال حدوث B.

افترض أنه تم اختيار عناصر من مجموعة ما، فإذا أُعيد العنصر في كل مرة، فإن اختيار عناصر أخرى هي حوادث مستقلة. وإذا لم يُرجع العنصر في كل مرة، فإن اختيار عناصر أخرى هي حوادث غير مستقلة.

مثال 1 تعيين الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة

حدّد إذا كانت الحادثتان مستقلتين أو غير مستقلتين في كلٍّ مما يأتي، ووضِّح إجابتك:

a) إلقاء قطعة نقد مرة واحدة، ثم إلقاء قطعة نقد أخرى مرة واحدة أيضًا.

إن احتمال ناتج تجربة إلقاء قطعة النقد الأولى لا يؤثر بأيِّ حال من الأحوال في احتمال ناتج تجربة إلقاء قطعة النقد الثانية؛ ولذا تكون الحادثتان مستقلتين.

b) في فقرة "لماذا ؟" أعلاه، اختير اسم أحد الطلبة عشوائيًّا دون إرجاع، ثم اختير اسم طالب آخر.

بعد اختيار اسم الطالب الأول لا يعاد ولا يتم اختياره ثانية. وهذا يؤثر في احتمال اختيار اسم الطالب الثاني؛ لأن عدد عناصر فضاء العيِّنة قد نقص واحدًا؛ لذا فإن الحادثتين غير مستقلتين.

c) سحب كرة واحدة عشوائيًّا من كلٍّ من صندوقين مختلفين.

احتمال نتيجة السحب من الصندوق الأول ليس لها تأثير في احتمال نتيجة السحب من الصندوق الثاني؛ لذا تكون الحادثتان مستقلتين.

تحقق من فهمك

حدّد إذا كانت الحادثتان مستقلتين أم غير مستقلتين في كلٍّ مما يأتي، ووضِّح إجابتك:

1A) سُحبت بطاقة من مجموعة بطاقات، ثم أعيدت إلى المجموعة، ثم سحبت بطاقة ثانية.

1B) إلقاء قطعة نقد مرة واحدة، ثم رمي مكعب مرقّم مرة واحدة أيضًا.

إرشادات للدراسة

الحادثة البسيطة
هي الحادثة التي تتكون من ناتج واحد من النواتج الممكنة لتجربة ما. فمثلًا عند رمي مكعب مرقّم مرة واحدة، فإنّ الحادثة التي تمثل ظهور العدد 5 مثلًا هي حادثة بسيطة.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

إذا أُلقيت قطعة نقد وأُدير مؤشر القرص المبين في الشكل المجاور مرة واحدة، فإن فضاء العيِّنة لهذه التجربة هو: {(L, B), (L, R), (L, G), (T, B), (T, R), (T, G)}.

باستعمال فضاء العيِّنة، فإن احتمال الحادثة المركبة؛ ظهور الشعار على قطعة النقد واستقرار المؤشر عند اللون الأخضر يساوي: $P(L \cap G) = \frac{1}{6}$

لاحظ أنه يمكن إيجاد هذا الاحتمال بضرب احتمالي الحادثتين البسيطتين كما يأتي:

$$P(\mathbf{L}) = \frac{1}{2} \qquad P(\mathbf{G}) = \frac{1}{3} \qquad P(\mathbf{L} \cap \mathbf{G}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

وهذا المثال يوضِّح القانون الأول من قانوني ضرب الاحتمالات.

قراءة الرياضيات

(∩) يدل هذا الرمز على تقاطع الحادثتين (وقوع الحادثتين معًا)، ويشير إلى ضرب الاحتمالات. وتقرأ العبارة $P(A \cap B)$: احتمال وقوع A ووقوع B معًا.

مفهوم أساسي — احتمال حادثتين مستقلتين

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: احتمال وقوع حادثتين مستقلتين معًا يساوي حاصل ضرب احتمالَي الحادثتين.

بالرموز: إذا كانت الحادثتان A وB مستقلتين فإن: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

يمكن تعميم هذا القانون على أيّ عدد من الحوادث المستقلة

مثال 2 من واقع الحياة — احتمالات الحوادث المستقلة

وسائل النقل: يرغب خالد وأصدقاؤه في الذهاب إلى مباراة كرة قدم، وقد وضعوا قصاصات الورق الظاهرة في الصورة في كيس. فإذا سحب أحدهم قصاصة صفراء فسيركب في سيارة تركي، وإذا سحب قصاصة زرقاء فسيركب في سيارة سعود.

افترض أن خالدًا سحب قصاصة ولم تعجبه النتيجة ، فأعادها وسحب مرة أخرى، فما احتمال أن يسحب قصاصة زرقاء في المرتين؟

هاتان حادثتان مستقلتان؛ لأن خالدًا أعاد القصاصة التي سحبها أولًا. افترض أن B يمثّل سحب قصاصة زرقاء وأن Y يمثّل سحب قصاصة صفراء، فيكون المطلوب هو $P(B \cap B)$.

السحب 1 — السحب 2

$$P(B \cap B) = P(B) \cdot P(B)$$

احتمال الحادثتين المستقلتين

$$= \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8} = \frac{9}{64}$$

$P(B) = \frac{3}{8}$

لذا فاحتمال أن يسحب خالد قصاصتين زرقاوين يساوي $\frac{9}{64}$ أو 14% تقريبًا.

تحقق من فهمك

2A) إذا أُلقيت قطعة نقد ورُمي مكعب مرقّم مرة واحدة. فما احتمال ظهور الشعار والعدد 6 ؟

2B) إذا أُلقيت قطعة نقد أربع مرات متتالية. فما احتمال الحصول على كتابة أربع مرات؟

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

يُحدد قانون الضرب الثاني في الاحتمالات احتمال وقوع حادثتين غير مستقلتين معًا.

مفهوم أساسي — احتمال حادثتين غير مستقلتين

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: احتمال وقوع حادثتين غير مستقلتين معًا يساوي حاصل ضرب احتمال وقوع الحادثة الأولى في احتمال وقوع الحادثة الثانية بعد وقوع الأولى فعلًا.

بالرموز: إذا كانت الحادثتان A و B غير مستقلتين، فإن: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$

يقرأ الرمز $P(B|A)$ احتمال وقوع الحادثة B بشرط وقوع الحادثة A أولًا، وهذا يُسمى **الاحتمال المشروط**، ويمكنك استعمال الرسم الشجري مع الاحتمالات. وتُسمى **شجرة الاحتمال**.

تنبيه

إشارة الاحتمال المشروط

يجب ألّا يفسر الرمز "|" في $P(B|A)$ على أنه رمز القسمة.

إرشادات للدراسة

قيم الاحتمال

- لأيّ حادثة X في تجربة عشوائية يكون: $0 \le P(X) \le 1$.
- مجموع احتمالات جميع النواتج في تجربة عشوائية يساوي 1

مثال 3 احتمالات الحوادث غير المستقلّة

وسائل النقل: ارجع إلى المثال 2. افترض أن خالدًا سحب قصاصة، ولم يرجعها ثانية. فإذا سحب صديقه زيد قصاصة، فما احتمال أن يسحب كلٌّ من الصديقين قصاصة صفراء؟

هاتان الحادثتان غير مستقلتين؛ لأن خالدًا لم يُرجع القصاصة التي سحبها من الكيس.

احتمال الحادثتين غير المستقلتين

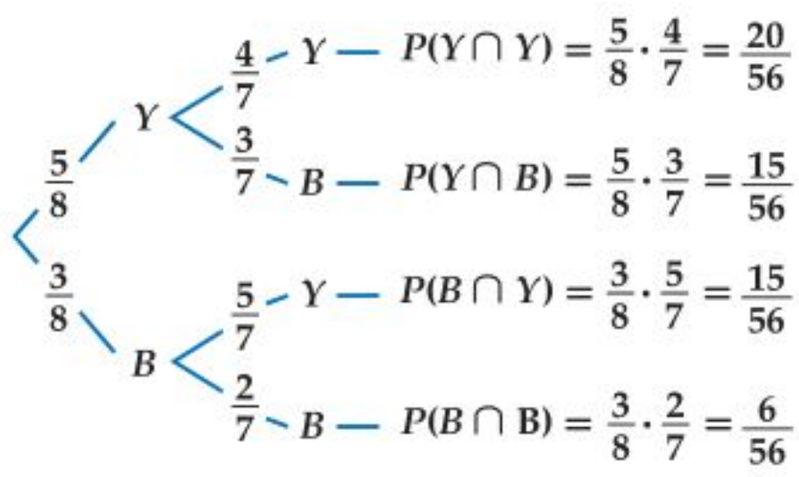
$$P(Y \cap Y) = P(Y) \cdot P(Y|Y)$$

بعد سحب قصاصة صفراء، يبقى 7 قصاصات، أربع منها صفراء

$$= \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{5}{14}$$

لذا فاحتمال أن يسحب الصديقان قصاصتين صفراوين يساوي $\frac{5}{14}$، أو 36% تقريبًا.

تحقق: تحقق من صحّة هذه النتيجة باستعمال الرسم الشجري. احسب احتمال كل حادثة بسيطة في المرحلة الأولى والاحتمال المشروط في المرحلة الثانية، ثم اضرب احتمالَي المرحلة الأولى في فروع الشجرة لإيجاد احتمال كل ناتج كما في الشكل أدناه.



يجب أن يكون مجموع الاحتمالات 1

$$\frac{20}{56} + \frac{15}{56} + \frac{15}{56} + \frac{6}{56} = \frac{56}{56} = 1 \quad ✓$$

تحقق من فهمك

3) بطاقات: يحتوي صندوق على 24 بطاقة، منها 6 بطاقات زرقاء مرقّمة من 1 إلى 6، وبالمثل 6 بطاقات حمراء و 6 صفراء و6 خضراء. ما احتمال سحب 3 بطاقات حمراء الواحدة تلو الأخرى إذا كان السحب دون إرجاع؟

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

الاحتمال المشروط: علاوة على استعمال هذه الاحتمالات المشروطة لإيجاد احتمال وقوع حادثتين غير مستقلتين، يمكنك إيجاد احتمال وقوع **حادثة مشروطة**، وذلك بإعطاء معلومات إضافية عن وقوع حادثة أخرى، وذلك باختزال فضاء العينة، فمثلًا إذا رُمي مكعب مرقّم مرة واحدة وعُلم أن العدد الظاهر على وجه المكعب عدد فردي، فما احتمال أن يكون هذا العدد 5؟

هناك ثلاثة أعداد فردية يمكن أن تظهر على وجه المكعب؛ لذا سوف يختزل فضاء العيِّنة من {1, 2, 3, 4, 5, 6} إلى {1, 3, 5}، وعليه فإن احتمال أن يظهر العدد 5 يساوي:

$P(5 \mid \text{عدد فردي}) = \frac{1}{3}$.

مثال 4 على اختبار

تجري المعلمة سارة مسابقة بين 8 طالبات. ولتشكيل الفريقين يتم سحب بطاقات مرقّمة من 1 إلى 8 عشوائيًّا حيث:

- تشكل الطالبات اللواتي يسحبن الأعداد الفردية الفريق الأول.
- تشكل الطالبات اللواتي يسحبن الأعداد الزوجية الفريق الثاني.

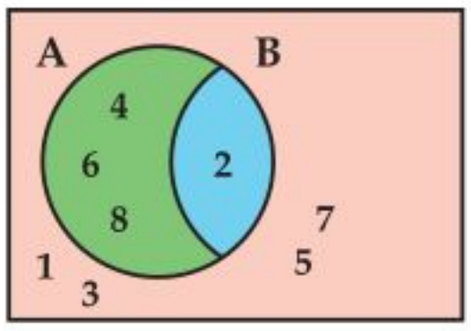
إذا كانت ليلى من الفريق الثاني، فما احتمال أنها سحبت العدد 2؟

A $\frac{1}{8}$ B $\frac{1}{4}$ C $\frac{3}{8}$ D $\frac{1}{2}$

اقرأ فقرة الاختبار

بما أن ليلى من الفريق الثاني فإنها تكون قد سحبت عددًا زوجيًّا؛ لذا فإنك في حاجة إلى إيجاد احتمال أن يكون الناتج 2 إذا علمت أن العدد المسحوب كان زوجيًّا. وعليه فإن هذه مسألة احتمال مشروط.

حل فقرة الاختبار



افترض أن A حادثة سحب عدد زوجي. وأن B حادثة سحب العدد 2

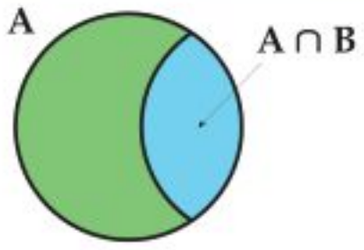
ارسم شكل ڤن لتمثيل هذا الموقف. يوجد أربعة أعداد زوجية في فضاء العيِّنة، وواحد منها هو 2 ؛

لذا فإن $P(B|A) = \frac{1}{4}$. والإجابة الصحيحة هي B .

تحقق من فهمك

4) عند رمي مكعبين مرقّمين متمايزين مرة واحدة، ما احتمال أن يظهر العدد 4 على أحدهما إذا كان مجموع العددين على الوجهين الظاهرين يساوي 9؟

A $\frac{1}{6}$ B $\frac{1}{4}$ C $\frac{1}{3}$ D $\frac{1}{2}$



بما أن الاحتمال المشروط يختزل فضاء العيِّنة، فإنه يمكن تبسيط شكل ڤن في المثال 4، كما هو في الشكل المجاور، ويمثل تقاطع الحادثتين النواتج المشتركة في A و B وهذا يعني أن $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

مفهوم أساسي — الاحتمال المشروط

أضف إلى مطويتك

الاحتمال المشروط لِـ B إذا وقع A هو $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

حيث: $P(A) \neq 0$.

سيبرهن هذا القانون في السؤال 16

قراءة الرياضيات

الاحتمال المشروط

$P(5|A)$ تقرأ احتمال أن يكون العدد الناتج 5 إذا وقعت الحادثة A.

إرشادات للاختبار

أشكال ڤن

استعمل أشكال ڤن لتساعدك على تصور العلاقة بين نواتج حادثتين غير مستقلتين.

إرشادات للدراسة

التقاطع

تقاطع مجموعتين هو مجموعة كل العناصر المشتركة التي تنتمي إلى المجموعة الأولى وإلى المجموعة الثانية في الوقت نفسه ويرمز لها بالرمز ∩ .

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

تأكد

مثال 1 **حدّد إذا كانت الحادثتان في السؤالين (1, 2) مستقلتين أم غير مستقلتين، ووضِّح إجابتك:**

1) وصل فريق كرة القدم في مدرسة إلى الدور قبل النهائي، وإذا ربح فسيلعب في المباراة النهائية للبطولة.

2) نجاح عبد العزيز في اختبار الرياضيات يوم الأحد ، ونجاحه في اختبار الفيزياء يوم الخميس.

مثال 2 **3) بطاقات:** يحتوي صندوق على 20 بطاقة مقسمة إلى أربع مجموعات متساوية لكلٍّ منها لون من الألوان الآتية: الأحمر، والأسود، والأخضر، والأزرق. سحبت بطاقة واحدة عشوائيًّا من الصندوق، ثم أُعِيدت إليه، وبعد ذلك سُحبت بطاقة ثانية. ما احتمال اختيار بطاقة حمراء في المرتين؟

مثال 3 **4) أوراق نقدية:** في جيب عبد السلام 3 أوراق نقدية من فئة 5 ريالات، و7 أوراق من فئة 10 ريالات، ما احتمال أن يسحب عبد السلام عشوائيًّا ورقتين على التوالي من فئة 5 ريالات على فرض أن فرص حصول الحوادث متساوية.

مثال 4 **5) أصدقاء:** يلتقي 10 أصدقاء كل يوم عطلة ليلعبوا كرة القدم، ولتشكيل الفريقين يتم سحب بطاقات مرقّمة من 1 إلى 10 عشوائيًّا، ويشكل الذين يسحبون الأعداد الفردية الفريق A والذين يسحبون الأعداد الزوجية الفريق B. ما احتمال أن يكون أحد لاعبي الفريق B قد سحب العدد 10؟

تدرب وحل المسائل

الأمثلة 3-1 **حدّد إذا كانت الحادثتان في الأسئلة (9–6) مستقلتين أم غير مستقلتين، ثم أوجد الاحتمال:**

6) رمي مكعب مرقّم للحصول على عدد زوجي، ثم إدارة مؤشر قرص مقسَّم إلى قطاعات متطابقة، ومرقّم من 1 إلى 5؛ للحصول على عدد فردي.

7) اختيار طالبين حصلا على الدرجة الكاملة في اختبار للرياضيات. واحدًا تلو الآخر من صفٍّ فيه 25 طالبًا، 5 منهم حصلوا على الدرجة الكاملة.

8) تكرار سحب كرة زرقاء في تجربة سحب كرتين متتاليتين عشوائيًّا دون إرجاع ، من حقيبة بها 3 كرات خضراء و 4 كرات زرقاء.

9) ظهور العدد 5 على الوجهين العُلويين لمكعبين مرقّمين متمايزين أُلقِيا مرة واحدة.

10) ألعاب: إذا أُدير مؤشر القرص المبيّن في الشكل المجاور وأُلقيت قطعة نقد مرة واحدة. فما احتمال الحصول على عدد زوجي وظهور كتابة على قطعة النقد؟

11) شعارات: معتمدًا على الجدول المجاور، إذا اختير شعاران عشوائيًّا، فما احتمال أن يكون كلا الشعارين الأول والثاني أحمر؟

لون الشعار	العدد
أزرق	20
أبيض	15
أحمر	25
أسود	10

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

مثال 4

12) سُحبت كرة حمراء عشوائيًّا من كيس يحتوي على كرتين زرقاوين و 9 كرات حمراء دون إرجاع. ما احتمال سحب كرة حمراء ثانية؟

13) مستطيل محيطه 12 وحدة، إذا كانت أطوال أضلاعه أعدادًا صحيحة، فما احتمال أن يكون الشكل مربَّعًا؟

14) رُقمت قطاعات متطابقة في قرص من 1 إلى 12، إذا أُدير مؤشر القرص، فما احتمال أن يستقر المؤشر عند العدد 11 إذا عُلم أنه استقر عند عدد فردي؟

15) **تقنيات:** يمتلك 43% من طلاب مدرسة جهازًا نقالًا، و 28% يمتلكون جهازًا نقالًا وجهاز حاسوب. فما احتمال أن يمتلك طالب منهم جهاز حاسوب إذا كان يمتلك جهازًا نقالًا؟

16) **برهان:** استعمل قانون احتمال حادثتين غير مستقلتين $P(A \cap B)$ لاشتقاق قانون الاحتمال المشروط $P(B|A)$

17) **تنس أرضي:** إذا كانت نسبة أداء الضربة الأولى دون أخطاء للاعب التنس 40% ، على حين كانت نسبة الضربة الثانية 70%، فأجب عما يأتي:

a) ارسم شجرة الاحتمال التي تبيّن احتمالات النواتج.

b) ما احتمال أن يرتكب اللاعب خطأً مزدوجًا؟

الربط بالحياة

تُعد ضربة البداية في التنس الأرضي خطأ مزدوجًا على اللاعب إذا لم ينجح في إيصال الكرة إلى منطقة الاستقبال المقابلة دون أن يطأ خط الرمي أو يتجاوزه في محاولتين.

مسائل مهارات التفكير العليا

18) **اكتشف الخطأ:** أراد كلٌّ من مهند وجابر إيجاد احتمال A شرط وقوع B، حيث $P(A) = 0.3, P(B) = 0.3$، والحادثتان A و B مستقلتان. أيُّهما إجابته صحيحة؟ برّر إجابتك.

مهند

بما أن A و B حادثتان مستقلتان،
فإن: $P(A|B) = P(A)$

جابر

بما أننا لا نعرف $P(A \cap B)$،
فإننا لا نستطيع إيجاد $P(A|B)$

19) **تحدٍّ:** يحتوي كيس على n من العناصر المختلفة، فإذا كان احتمال سحب العنصر A ثم العنصر B دون إرجاع يساوي 5%. فما قيمة n؟ وضِّح إجابتك.

20) **تبرير:** إذا كان A و B حادثتين مستقلتين، فهل العبارة $P(A \cap B) = P(B \cap A)$ صحيحة أحيانًا أم صحيحة دائمًا أم غير صحيحة أبدًا؟ برّر إجابتك.

21) **مسألة مفتوحة:** صِفْ حادثتين مستقلتين وحادثتين غير مستقلتين، وبرّر إجابتك.

22) **اكتب:** وضِّح لماذا يجب أن يكون مجموع احتمالات النواتج في شجرة الاحتمال يساوي 1.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

تدريب على اختبار

23) احتمال: يمكن أن يلعب بلال عشوائيًّا في واحدة من 6 رياضات في النادي، ويتناول طعامه في فترة من ثلاث فترات يحددها النادي. ما احتمال أن يلعب الرياضة الثانية ويتناول طعامه في الفترة الأولى؟

A $\frac{1}{18}$ **C** $\frac{1}{9}$

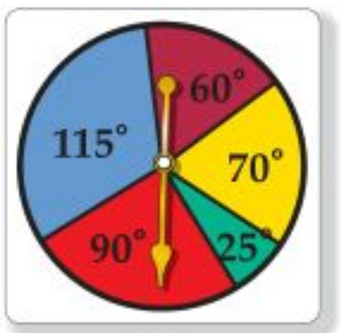
B $\frac{1}{6}$ **D** $\frac{1}{2}$

24) احتمال: يحتوي كيس على 7 حبات حلوى حمراء و 11 حبة صفراء و 13 حبة خضراء. إذا أخذ عمّار حبتَي حلوى من الكيس دون أن ينظر إليهما. فما احتمال أن يأخذ حبة خضراء، ثم حبة حمراء؟ اكتب الاحتمال على صورة نسبة مئوية مقربة إلى أقرب عُشرٍ.

مراجعة تراكمية

25) ما احتمال ظهور العدد 2 على الوجه العلوي لمكعب مرقّم أُلقي مرتين؟ (الدرس 4-3)

استعمل القرص ذا المؤشر الدوّار في الشكل المجاور لإيجاد كلٍّ مما يأتي (يعاد تدوير المؤشر إذا استقر على أي خطٍّ بين لونين): الدرس (3-3)



26) (استقرار المؤشر عند اللون الأحمر)P

27) (استقرار المؤشر عند اللون الأزرق)P

28) (استقرار المؤشر عند اللون الأخضر)P

29) (استقرار المؤشر عند اللون الأصفر)P

أوجد عدد النواتج الممكنة لكل موقف فيما يأتي: (الدرس 1-3)

30) تختار فاطمة واحدًا من بين 5 مذاقات مختلفة من الآيس كريم و3 أنواع مختلفة من الحلوى.

31) يختار بدر واحدًا من الألوان الستة لدراجته الجديدة، وأحد تصميمين لمقاعدها.

32) رمي ثلاثة مكعبات مرقّمة في آنٍ واحد.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي
رابط الحل الذكي
www.ien.edu.sa

3-5

احتمالات الحوادث المتنافية
Probabilities of Mutually Exclusive Events

فيما سبق:
درست إيجاد احتمالات الحوادث المستقلة والحوادث غير المستقلة. الدرس (3-4)

والآن:
- أجد احتمالات الحوادث المتنافية والحوادث غير المتنافية.
- أجد احتمال متممة حادثة.

المفردات:
الحادثتان المتنافيتان
mutually exclusive events
الحادثة المتممة
complement event

لماذا؟

يمكن لأيٍّ طالب في الصفوف (الأول والثاني والثالث الثانوي) الترشُّح ليكون مسؤول أنشطة. ويرغب صالح في أن يكون المسؤول من الصف الثاني الثانوي أو الثالث الثانوي، في حين يرغب سلمان في أن يكون المسؤول من الصف الأول الثانوي، أو طالبًا يبدأ اسمه بحرف م.

الحوادث المتنافية: لقد اختبرت في الدرس **3-4** احتمالات تتضمن تقاطع حادثتين أو أكثر في وقت واحد، وستختبر في هذا الدرس احتمالات تتضمن اتحاد حادثتين أو أكثر.

$P(A \cup B)$	$P(A \cap B)$
↑	↑
يدل على اتحاد مجموعتين	يدل على تقاطع مجموعتين

عند إيجاد احتمال وقوع حادثة أو وقوع حادثة أخرى، يجب أن تعرف العلاقة بين الحادثتين. فإذا لم يكن وقوع الحادثتين ممكنًا في الوقت نفسه يُقال إنهما **متنافيتان**؛ أيْ أنه لا توجد نواتج مشتركة بينهما.

إرشادات للدراسة

الاتحاد
اتحاد مجموعتين هو مجموعة كل العناصر التي تنتمي إلى المجموعة الأولى أو إلى المجموعة الثانية ويرمز لها بالرمز $\cup$.

مثال 1 من واقع الحياة

تحديد الحوادث المتنافية

حدد إذا كانت الحادثتان متنافيتين أم غير متنافيتين في كلٍّ مما يأتي، وبرّر إجابتك:

انتخابات: ارجع إلى المعلومات الواردة في فقرة "لماذا؟".

a) **المسؤول من الصف الثاني الثانوي أو من الصف الثالث الثانوي.**
هاتان الحادثتان متنافيتان؛ لأنه ليس بينهما نواتج مشتركة، إذ لا يمكن أن يكون المسؤول طالبًا في الصف الثالث الثانوي والثاني الثانوي في آن واحد.

b) **المسؤول طالب من الصف الأول الثانوي أو طالب يبدأ اسمه بحرف م.**
هاتان الحادثتان غير متنافيتين؛ لأنه يمكن أن يكون المسؤول من الصف الأول الثانوي وفي الوقت نفسه يبدأ اسمه بحرف م.

تحقق من فهمك

حدِّد إذا كانت الحادثتان متنافيتين أم غير متنافيتين في كلٍّ مما يأتي، وبرّر إجابتك:

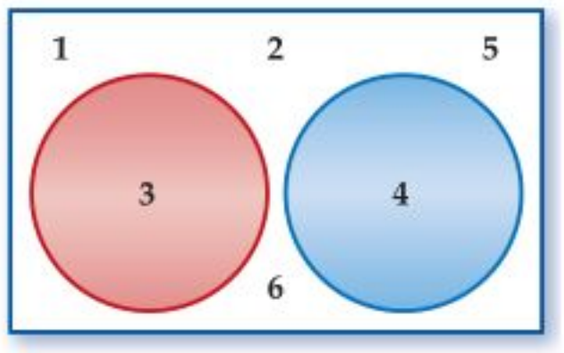
1A) اختيار عدد من الأعداد من 1 إلى 100 عشوائيًّا، والحصول على عدد يقبل القسمة على 5 أو عدد يقبل القسمة على 10 .

1B) الحصول على المجموع 6 أو المجموع 7، عند رمي مكعبين مرقّمين متمايزين مرة واحدة.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

إحدى طرق إيجاد احتمال وقوع حادثتين متنافيتين هو اختبار فضاء العيِّنة لهما.



فمثلًا لإيجاد احتمال ظهور 3 أو 4 عند رمي مكعب مرقّم، سترى من أشكال ڤن أنه يوجد ناتجان يحققان هذا الشرط 3 أو 4، لذا فإن:

$$P(3 \cup 4) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

لاحظ أنه يمكن إيجاد هذا الاحتمال بإضافة احتمالَي الحادثتين البسيطتين.

$$P(3 \cup 4) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \qquad P(3) = \frac{1}{6} \text{ و } P(4) = \frac{1}{6}$$

يوضِّح هذا المثال القانون الأول من قانونيَ الجمع في الاحتمالات.

قراءة الرياضيات

(∪)

يدل على وقوع أحد الحدثين على الأقل، ويشير إلى جمع الاحتمالات. $P(A \cup B)$ يقرأ احتمال وقوع A أو وقوع B .

مفهوم أساسي احتمال الحادثتين المتنافيتين

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: إذا كانت الحادثتان A , B متنافيتين، فاحتمال وقوع A أو B يساوي مجموع احتمال كلٍّ منهما.

بالرموز: إذا كانت الحادثتان A , B متنافيتين، فإن:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

يمكن تعميم هذا القانون على أيّ عدد من الحوادث المتنافية.

مثال 2 من واقع الحياة الحوادث المتنافية

كتب: اختار موسى كتابًا من الكتب الموجودة في مكتبته المبينة في الجدول المجاور بشكل عشوائي. ما احتمال أن يكون الكتاب دينيًّا أو فيزيائيًّا؟

مكتبة موسى	
أنواع الكتب	العدد
دينية	10
فيزيائية	12
كيميائية	13

هاتان الحادثتان متنافيتان؛ لأنه لا يمكن أن يكون الكتاب دينيًّا أوفيزيائيًّا في آن واحد.

افترض أن الحادثة $A1$ تمثل اختيار كتاب ديني.
وافترض أن الحادثة $A2$ تمثل اختيار كتاب فيزيائي.
مجموع الكتب هو $10 + 12 + 13 = 35$.

$$P(A1 \cup A2) = P(A1) + P(A2) \quad \text{احتمال الحادثتين المتنافيتين}$$

$$= \frac{10}{35} + \frac{12}{35} \quad P(A1) = \frac{10}{35} \text{ و } P(A2) = \frac{12}{35}$$

$$= \frac{22}{35} \quad \text{اجمع}$$

لذا فإن احتمال اختيار كتاب ديني أو فيزيائي هو $\frac{22}{35}$ ، ويساوي 63% تقريبًا.

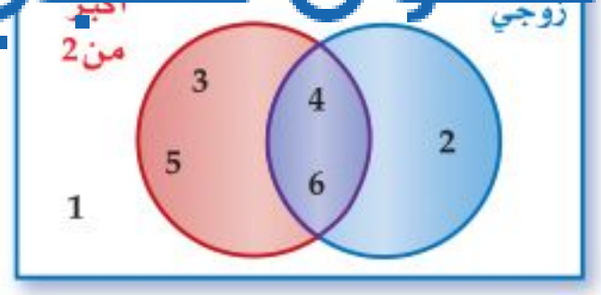
تحقق من فهمك

2A) إذا رُمي مكعبان مرقّمان متمايزان مرة واحدة. فما احتمال أن يظهر العدد نفسه على كلٍّ من وجهَي المكعبين أو أن يكون مجموع العددين 9 ؟

2B) ألعاب: إذا ربح طالب في مسابقة إلقاء الشعر في احتفال المدرسة باليوم الوطني للمملكة فسيُمنح جائزة. إذا اختيرت الجائزة عشوائيًّا من بين 15 محفظة و16 ساعة و14 نظارة و 25 قلمًا و10 كرات، فما احتمال أن يُمنح الفائز محفظة أو ساعة أو كرة؟

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي



عند رمي مكعب مرقّم مرة واحدة، ما احتمال الحصول على عدد أكبر من 2 أو عدد زوجي؟ يمكنك أن تلاحظ من أشكال ڤن وجود 5 أعداد أكبر من 2 أو زوجية وهي 2, 3, 4, 5,6 . لذا فإن:

$$P(\text{عدد زوجي أو أكبر من 2}) = \frac{5}{6}$$

وبما أنه يمكن الحصول على عدد أكبر من 2 وزوجي في الوقت نفسه، فإن هاتين الحادثتين غير متنافيتين، وإذا أخذنا احتمال كل حادثة على حدة فإن:

$$P(\text{زوجي}) = \frac{3}{6} \qquad P(\text{أكبر من 2}) = \frac{4}{6}$$

وإذا جمعنا هذين الاحتمالين فإن احتمالي الناتجين 6 ، 4 يحسبان مرتين؛ مرة لكونهما عددين أكبر من 2، ومرّة أخرى لكونهما عددين زوجيين؛ لذا يجب عليك أن تطرح احتمال الناتجين المشتركين.

$$P(\text{عدد زوجي أو أكبر من 2}) = P(\text{عدد زوجي}) + P(\text{عدد أكبر من 2}) - P(\text{عدد زوجي وأكبر من 2})$$

$$= \frac{3}{6} + \frac{4}{6} - \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

يؤدي هذا المثال إلى قانون الجمع الثاني في الاحتمال.

مفهوم أساسي

أضف إلى مطويتك

احتمال حادثتين غير متنافيتين

التعبير اللفظي: إذا كانت الحادثتان A , B غير متنافيتين فاحتمال وقوع A أو B يساوي مجموع احتماليهما مطروحًا منه احتمال وقوع B و A معًا.

بالرموز: إذا كانت الحادثتان A , B غير متنافيتين فإن:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

الربط بالحياة

المعارض الفنية

للمعارض الفنية دور في تقدم الفرد في المجتمع، بما تضمه من أفكار إبداعية، وطرق تعبير، تهذّب الأخلاق، وتسمو بالذوق والقيم الإنسانية.

مثال 3 من واقع الحياة

الأحداث غير المتنافية

فن: يبين الجدول المجاور 30 لوحة رسمها إبراهيم. إذا اختار إحدى هذه اللوحات عشوائيًّا للمشاركة في معرض للوحات الفنيّة، فما احتمال أن يختار لوحة زيتية أو منظرًا طبيعيًّا؟

بما أن بعض لوحات إبراهيم مناظر طبيعية ولوحات زيتية في وقت واحد فإن هاتين الحادثتين غير متنافيتين.

لوحات إبراهيم			
الوسيلة	طبيعة صامتة	مناظر طبيعية	أشكال هندسية
ألوان مائية	4	5	3
ألوان زيتية	1	3	2
ألوان أكريل	3	2	1
ألوان باستيل	1	0	5

$$P(\text{لوحة زيتية أو منظر طبيعي}) = P(\text{لوحة زيتية}) + P(\text{منظر طبيعي}) - P(\text{لوحة زيتية و منظر طبيعي})$$

عوّض $$= \frac{5+3+2+0}{30} + \frac{1+3+2}{30} - \frac{3}{30}$$

بسّط $$= \frac{10}{30} + \frac{6}{30} - \frac{3}{30} = \frac{13}{30}$$

لذا فإن احتمال أن يختار إبراهيم منظرًا طبيعيًّا أو لوحة زيتية يساوي $\frac{13}{30}$ أو 43% تقريبًا.

تحقق من فهمك

3) **فن:** في المثال أعلاه، ما احتمال أن تكون اللوحة التي اختارها إبراهيم مائية أو شكلًا هندسيًّا؟

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

احتمال الحادثة المتممة: عناصر **الحادثة المتممة** A تتكون من جميع نواتج فضاء العيّنة غير الموجودة في الحادثة A. فمثلًا تعلم أن احتمال الحصول على العدد 4 عند رمي مكعب مرقّم من 1 إلى 6 مرة واحدة يساوي $\frac{1}{6}$، وبالتالي فإن احتمال عدم الحصول على العدد 4 هو $\frac{5}{6}$؛ وذلك لأنه توجد 5 نواتج ممكنة لهذه الحادثة هي: 1, 2, 3, 5, 6. لذا فإن $P(\text{عدم الحصول على العدد } 4) = \frac{5}{6}$.

لاحظ أن هذا الاحتمال يساوي $1 - \frac{1}{6}$ أو $1 - P(4)$.

قراءة الرياضيات

الحادثة المتممة

يرمز إلى الحادثة المتممة للحادثة A بالرمز $(\grave{A})$.

مفهوم أساسي — **احتمال الحادثة المتممة**

أضف إلى مطويتك

التعبير اللفظي: احتمال عدم وقوع حادثة يساوي 1 ناقص احتمال وقوع الحادثة.

بالرموز: لأيّ حادثة A، $P(\grave{A}) = 1 - P(A)$

مثال 4 — **الحادثة المتممة**

مسابقات: اشتركت سميرة في مسابقة ثقافية، وطُلب إليها سحب بطاقة عشوائيًّا من صندوق به (300) بطاقة، منها (20) بطاقة رابحة. ما احتمال عدم سحب بطاقة رابحة؟

افترض أن A تمثّل اختيار بطاقة رابحة، فأوجد احتمال متممة A.

$$P(\grave{A}) = 1 - P(A) \quad \text{احتمال المتممة}$$
$$= 1 - \frac{20}{300} \quad \text{عوّض}$$
$$= \frac{280}{300} \quad \text{اطرح و بسّط}$$
$$= \frac{14}{15}$$

احتمال أن تسحب سميرة بطاقة غير رابحة $\frac{14}{15}$، أو 93% تقريبًا.

تحقق من فهمك

4) أمطار: إذا كان احتمال هطول المطر 70% فما احتمال عدم هطوله؟

ملخص المفاهيم — **قوانين الاحتمال**

أضف إلى مطويتك

نوع الحوادث	الوصف	القانون
الحادثتان المستقلتان	احتمال وقوع الحادثة الأولى لا يؤثر في احتمال وقوع الحادثة الثانية.	إذا كانت A , B حادثتين مستقلتين، فإن: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
الحادثتان غير المستقلتين	احتمال وقوع إحدى الحادثتين يؤثر في احتمال وقوع الأخرى.	إذا كانت A , B حادثتين غير مستقلتين، فإن: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B\|A)$
الحادثة المشروطة	إعطاء معلومات إضافية عن احتمال حادثة ما .	يكون احتمال الحادثة A بشرط وقوع حادثة B : $P(A\|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ بشرط $P(B) \neq 0$
الحادثتان المتنافيتان	حادثتان لا توجد بينها نواتج مشتركة.	إذا كانت A , B حادثتين متنافيتين فإن: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
الحادثتان غير المتنافيتين	حادثتان توجد بينها نواتج مشتركة.	إذا كانت A و B حادثتين غير متنافيتين فإن: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
الحادثة المتممة	تتكون نواتج الحادثة المتممة من جميع نواتج فضاء العيّنة التي ليست من نواتج الحادثة الأصلية.	لأيّ حادثة A: $P(\grave{A}) = 1 - P(A)$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

مثال 5 من واقع الحياة

تحديد قوانين الاحتمال واستعمالها

حزام الأمان: افرض أن 81 % من سائقي إحدى المدن يستعملون حزام الأمان. إذا تمّ اختيار سائقَيْن واحدًا تلو الآخر عشوائيًّا من بين 100 من السائقين. وكانت هذه المجموعة تعكس صورة المجتمع، فما احتمال أن يكون أحدهما على الأقل لا يستعمل حزام الأمان؟

افهم: تعلم أن 81% من السائقين يستعملون حزام الأمان. الاصطلاح (واحد على الأقل) يعني واحدًا أو أكثر. لذا أنت في حاجة إلى إيجاد احتمال أن:

- السائق الأول المختار لا يستعمل حزام الأمان.
- أو السائق الثاني المختار لا يستعمل حزام الأمان.
- أو كلا السائقين المختارين لا يستعمل حزام الأمان.

أي إيجاد (الأول لا يستعمل الحزام ∪ الثاني لا يستعمل الحزام) P

خطط: الحادثة الموصوفة أعلاه هي الحادثة المتممة لحادثة أن السائقين المختارين يستعملان حزام الأمان.

افرض أن الحادثة A تمثل اختيار سائق يستعمل حزام الأمان.

وافرض أن الحادثة B تمثّل اختيار سائق يستعمل حزام الأمان بعد أن يكون قد تمّ اختيار السائق الأول.

إذن المطلوب إيجاد $P[(A \cap B)']$ وهي تكافئ $P(A' \cup B')$

هاتان الحادثتان غير مستقلتين؛ لأن احتمال الحادثة الأولى يؤثر في احتمال الحادثة الثانية.

حُلّ:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$	احتمال الحادثتين غير المستقلتين
$= \frac{81}{100} \cdot \frac{80}{99}$	$P(A) = \frac{81}{100}$
$= \frac{6480}{9900} = \frac{36}{55}$	اضرب
$P[(A \cap B)'] = 1 - P(A \cap B)$	احتمال الحادثة المتممة
$= 1 - \frac{36}{55}$	عوّض
$= \frac{19}{55}$	اطرح

لذا فإن احتمال أن أحد السائقين على الأقل لا يستعمل حزام الأمان يساوي $\frac{19}{55}$ ، أو 35% تقريبًا.

تحقق: استعمل التبرير المنطقي للتحقق من معقولية إجابتك.

احتمال اختيار سائق من 100 لا يستعمل حزام الأمان يساوي $(100 - 81)\%$، أو 19%
واحتمال اختيار سائقين من 100 لا يستعملانه يجب أن يكون أكبر من 19%. وبما أن $19\% < 35\%$ ، فإن الإجابة معقولة.

تحقق من فهمك

5) هواتف نقالة: أشارت إحدى الدراسات إلى أن 35% من السائقين يستعملون الهاتف النقّال أثناء قيادة السيارة. إذا اختير سائقان واحدًا تلو الآخر عشوائيًّا من مجموعة 100 سائق، فما احتمال أن يستعمل أحدهما على الأقل هاتفه النقّال أثناء القيادة؟

الحوادث المرورية في الرياض خلال عام 1430هـ

الشهر	عدد حالات الوفاة
المحرم	26
صفر	18
ربيع الأول	16
ربيع الآخر	26
جمادى الأولى	22
جمادى الآخرة	23
رجب	21
شعبان	15
رمضان	26
شوال	25
ذو القعدة	23
ذو الحجة	25
المجموع	266

الربط بالحياة

يؤدي عدم الالتزام بقواعد وأخلاقيات قيادة السيارات إلى وقوع حوادث مرورية مؤسفة، والجدول أعلاه يبين حالات الوفاة بسبب الحوادث المرورية في الرياض خلال عام 1430هـ وفق إحصائيات الإدارة العامة للمرور.

إرشادات للدراسة

تقاطع الحوادث واتحادها

من المثال 5 لاحظ أن

$P(A' \cup B') = P[(A \cap B)']$

وبالمثل

$P(A' \cap B') = P[(A \cup B)']$

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

تأكد

مثال 1 **حدد إذا كانت الحادثتان متنافيتين أو غير متنافيتين في كلٍّ ممَّا يأتي، وبرّر إجابتك:**

1) ظهور عدد فردي أو أكبر من 3 عند رمي مكعب مرقّم مرة واحدة.

2) اختيار سيارة أو حصان.

مثال 2 **3)** **الموظف المثالي:** حصل سامي على جائزة أفضل أداء لموظفي شركة، وكانت جائزته أن يختار عشوائيًّا واحدة من بين 4 بطاقات سفر و 6 كتب و 10 ساعات و 3 حقائب ، و 7 نظارات. ما احتمال أن يربح بطاقة سفر، أو كتابًا، أو ساعة؟

مثال 3 **4)** **نشاطات مدرسية :** بناءً على الجدول المجاور، اختير طالب في المدرسة. ما احتمال أن يكون الطالب من الصف الثاني الثانوي أو في نادي العلوم؟

النادي	الصف الأول الثانوي	الصف الثاني الثانوي	الصف الثالث الثانوي
الرياضي	12	14	8
العلوم	2	6	3
الرياضيات	7	4	5
اللغة الإنجليزية	11	15	13

مثال 4 **5)** **لعبة السهام:** إذا كان احتمال إصابتك الهدف عند رمي السهم تساوي $\frac{2}{10}$، فما احتمال أن تخطئ إصابة الهدف؟

مثال 5 **6)** **تخرج:** عدد طلاب الصف الثالث الثانوي في مدرسة 100 طالب. حضر حفل التخرج النهائي 91% منهم. إذا اختير طالبان واحدًا تلو الآخر عشوائيًّا من طلاب الصف جميعهم، فما احتمال أن يكون أحدهما على الأقل لم يحضر الحفل؟

تدرب وحل المسائل

الأمثلة 3–1 **حدّد إذا كانت الحادثتان متنافيتين أو غير متنافيتين (في كلٍّ من الأسئلة 9-7)، ثم أوجد الاحتمال، وقرّب النسبة المئوية إلى أقرب عُشر إذا كان ذلك ضروريًّا:**

7) رمي مكعبين مرقّمين متمايزين مرة واحدة للحصول على عددين متساويين أو عددين مجموعهما 8 على الوجهين الظاهرين.

8) اختيار عدد عشوائيًّا من 1 إلى 20، للحصول على عدد زوجي أو عدد يقبل القسمة على 3 .

9) إلقاء قطعة نقد مرة واحدة للحصول على شعار أو كتابة.

10) **رياضة :** يبين الجدول المجاور أنواع الرياضات التي يقدمها نادٍ رياضي وعدد المشاركين من الأعمار 16–14. ما احتمال أن يمارس مشارك السباحة أو أن يكون عمره 14؟

النادي الرياضي			
العمر	كرة القدم	الكرة الطائرة	السباحة
14	28	36	42
15	30	26	33
16	35	41	29

11) **هدايا :** أراد بعض الطلاب تقديم هدية لزميلهم لحصوله على لقب الطالب المثالي، فوجد معلم الصف أن 10 منهم اختاروا ساعة، و 12 اختاروا قميصًا، و 6 اختاروا هاتفًا نقالًا، و4 اختاروا ميدالية. إذا اختار المعلم الهدية عشوائيًّا فما احتمال أن تكون هدية الطالب المثالي ساعة أو ميدالية؟

مثال 4 **أوجد احتمال كل حادثة مما يأتي:**

12) عدم ظهور العدد 3 على أيٍّ من الوجهين الظاهرين، عند إلقاء مكعبين مرقّمين متمايزين مرة واحدة.

13) عدم ظهور الكتابة على الوجه الظاهر عند إلقاء قطعة نقد مرة واحدة.

14) سحب خليل عشوائيًّا كرة من كيس فيه 25 كرة متماثلة، إحداها فقط حمراء. ما احتمال ألَّا يسحب الكرة الحمراء؟

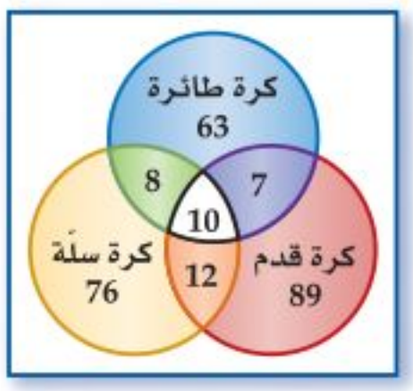
مثال 5 **15)** **أجور:** من بين فئة العمال الذين تتراوح أعمارهم بين 18 و25 سنة، وجد أن نسبة الذين يقبضون أجورهم أسبوعيًّا تساوي 71%. فإذا اختير اثنان واحدًا تلو الآخر عشوائيًّا من بين 100 عامل منهم، فما احتمال أن يكون أحدهما على الأقل يقبض أجرته أسبوعيًّا؟

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

16) **تدوير:** إذا كانت نسبة الذين يساهمون في إعادة التصنيع في إحدى الدول 31%، واختير شخصان واحدًا تلو الآخر عشوائيًّا من مجموعة عددها 100 شخص , فما احتمال أن يساهم أحدهما على الأكثر في إعادة التصنيع؟

17) **مسح:** أجرت مدرسة مسحًا على طلابها البالغ عددهم 265 طالباً لمعرفة أيِّ الأنشطة الرياضية يرغبون المشاركة فيها، ومُثّلت النتائج بأشكال ڤن كما في الشكل المجاور . إذا اختير طالب عشوائيًّا من هذه المدرسة، فأوجد احتمال كلٍّ مما يأتي:



a) أن يكون ممن يرغبون المشاركة في كرة القدم أو كرة الطائرة.

b) أن يكون ممن يرغبون المشاركة في كرة القدم ولايرغبون المشاركة في كرة السلة.

c) أن يكون ممن يرغبون المشاركة في الألعاب الثلاث.

مسائل مهارات التفكير العليا

18) **تحدَّ:** إذا رميت ثلاثة مكعبات مرقّمة متمايزة مرة واحدة، فما احتمال أن يظهر على مكعبين منها على الأقل عدد أقل من أو يساوي 4؟

تبرير: **حدد إذا كانت الحادثتان في كلٍّ مما يأتي متنافيتين أو غير متنافيتين:**

19) اختيار مثلَّث متطابق الأضلاع ومثلَّث متطابق الزاويا.

20) اختيار عدد مركب واختيار عدد حقيقي.

21) **مسألة مفتوحة:** صِفْ حادثتين متنافيتين وحادثتين غير متنافيتين.

22) **اكتب:** وضِّح لماذا لا يساوي مجموع احتمالي حادثتين متنافيتين 1 دائمًا.

تدريب على اختبار

23) **احتمال:** يقدم محل تجاري لزبائنه في يوم الافتتاح الهدايا المبينة في الجدول الآتي. ما احتمال أن يربح الزبون الأول إحدى أدوات المطبخ أو إحدى الساعات؟

الهدية	العدد
أدوات مطبخ	10
أدوات كهربائية	6
ساعات	3
هواتف نقالة	1

A 0.075 B 0.35 C 0.5 D 0.65

24) **احتمال:** رمي مكعب مرقّم من 1 إلى 6، ما احتمال ظهور عدد أقل من 3 أو عدد فردي على الوجه الظاهر؟

A $\frac{1}{6}$ B $\frac{2}{3}$ C $\frac{5}{6}$ D 1

مراجعة تراكمية

حدد إذا كانت الحادثتان مستقلتين أو غير مستقلتين في كلٍّ مما يأتي، ثمّ أوجد الاحتمال: (الدرس 4 -3)

25) ظهور العدد 2 في الرمية الأولى لمكعبٍ مرقّمٍ، ثم ظهور العدد 3 عند رمي المكعب للمرة الثانية.

26) سحب مصباحين تالفين واحدًا تلو الآخر من صندوق فيه 12 مصباحًا، 3 منها تالفة.

27) أوجد عدد النواتج الممكنة عند رمي مكعب مرقّم وثلاث قطع نقد. (الدرس 1 -3)

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

موقع حلول كتبي

ملخص الفصل

مفاهيم أساسية

تمثيل فضاء العيّنة (الدرس 1-3)

- فضاء العيّنة لتجربة هو مجموعة كل النواتج الممكنة.
- يمكن تحديد فضاء العيّنة باستعمال القائمة المنظمة أو الجدول أو الرسم الشجري.

الاحتمال باستعمال التباديل والتوافيق (الدرس 2-3)

- الترتيب مهم في التباديل.

$$ {}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} $$

- الترتيب غير مهم في التوافيق.

$$ {}_nC_r = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} $$

الاحتمال الهندسي (الدرس 3-3)

- إذا احتوت القطعة المستقيمة (1) قطعة مستقيمة أخرى (2)، واختيرت نقطة تقع على القطعة (1) عشوائيًا، فإن احتمال أن تقع النقطة على القطعة (2) يساوي: $\frac{\text{طول القطعة المستقيمة (2)}}{\text{طول القطعة المستقيمة (1)}}$
- إذا احتوت المنطقة A المنطقة B واختيرت نقطة E عشوائيًا من المنطقة A فإن احتمال أن تقع النقطة E في المنطقة B يساوي $\frac{\text{مساحة المنطقة } B}{\text{مساحة المنطقة } A}$.

احتمالات الحوادث المركبة (الدرسان 4-3 و 5-3)

- إذا كانت الحادثة A' متممة للحادثة A فإن:

$$ P(A') = 1 - P(A) $$

- إذا كانت الحادثة A لا تؤثر في احتمال وقوع الحادثة B، فإن: الحادثتين مستقلتان ويكون $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
- إذا كانت الحادثتان A و B غير مستقلتين، فإن:

$$ P(A \cap B) = P(A) \bullet P(B|A) $$

- إذا لم يكن وقوع الحادثتين A و B ممكنًا في الوقت نفسه فإنهما متنافيتان ويكون $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- إذا لم تكن A و B متنافيتين، فإن:

$$ P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) $$

المطويات منظم أفكار

تأكدمن أن المفاهيم الأساسية قد دوّنت في مطويتك.

المفردات

فضاء العيّنة ص 114
الرسم الشجري ص 114
تجربة ذات مرحلتين ص 115
تجربة متعددة المراحل ص 115
مبدأ العد الأساسي ص 116
المضروب ص 120
التباديل ص 121
التباديل الدائرية ص 122
التوافيق ص 123
الاحتمال الهندسي ص 127
الحادثة المركبة ص 134
الحوادث المستقلة ص 134
الحوادث غير المستقلة ص 134
الاحتمال المشروط ص 136
شجرة الاحتمال ص 136
الحادثة المشروطة ص 137
الحوادث المتنافية ص 141
الحادثة المتممة ص 144

اختبر مفرداتك

حدد إذا كانت كل عبارة فيما يأتي صحيحة أم خاطئة. وإذا كانت خاطئة فاستبدل المصطلح الذي تحته خط حتى تصبح صحيحة:

1) تُستعمل في الرسم الشجري قطع مستقيمة لعرض النواتج الممكنة.

2) التباديل هي تنظيم لمجموعة من العناصر، حيث يكون الترتيب فيها غير مهم.

3) تحديد تراتيب جلوس مجموعة من الأشخاص حول منضدة دائرية يتطلب التباديل الدائرية.

4) إلقاء قطعة نقد مرة واحدة ثم إلقاء قطعة نقد أخرى مرة واحدة أيضًا مثال على الحوادث غير المستقلة.

5) يتضمن الاحتمال الهندسي قياسًا هندسيًّا مثل الطول أو المساحة.

6) $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$، مثال على المضروب.

7) تُسمى مجموعة كل النواتج الممكنة فضاء العيّنة.

8) الاحتمال المشروط لـ B إذا وقع A هو:

$$ P(B \setminus A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} $$

9) أخذ قميصين الواحد تلو الآخر من خزانة ملابس دون إرجاع مثال على الحوادث المتنافية.

وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443