المملكة العربية السعودية

وزارة التعليم
Ministry of Education

قررت وزارة التعليم تدريس
هذا الكتاب وطبعه على نفقتها

رياضيات ١-٢

التعليم الثانوي

(نظام المسارات)

(السنة الأولى المشتركة)

قام بالتأليف والمراجعة

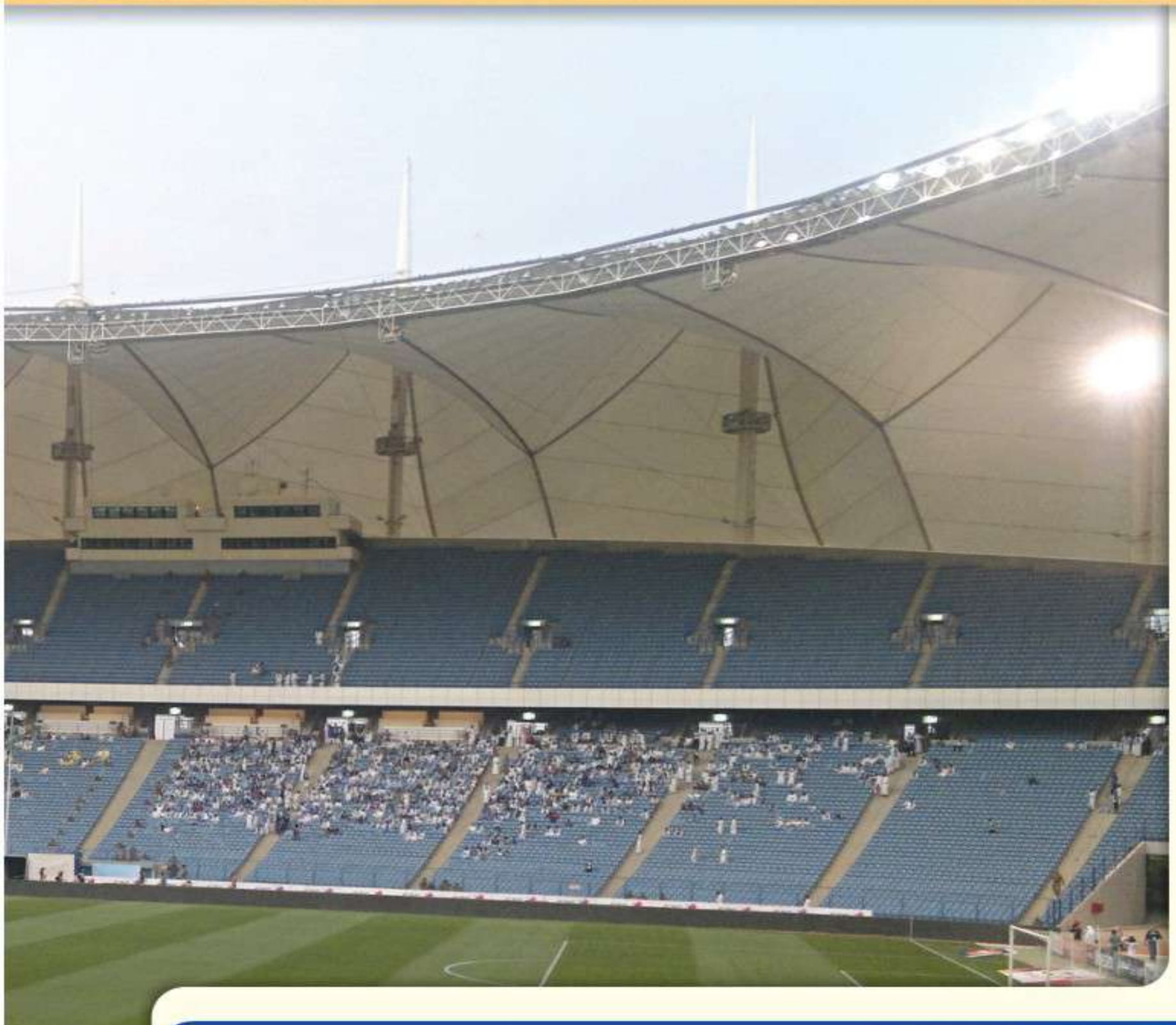
فريق من المتخصصين

المدارس السعودية في الخارج

طبعة ١٤٤٣ - ٢٠٢١

الفصل 5

الأشكال الرباعية
Quadrilaterals



فيما سبق:

درستُ تصنيف المضلعات وميَّزت خصائصها وطبَّقتُها.

والآن:

- أجد مجموع قياسات كل من الزوايا الداخلية والخارجيّة لمضلع، وأستعملها.
- أتعرف خصائص الأشكال الرباعية، وأطبّقها.
- أقارن بين الأشكال الرباعيّة.

لماذا؟

أدوات رياضية:

تُستعمل خصائص الأشكال الرباعيّة لإيجاد قياسات زوايا أو أطوال أضلاع، كقياس زوايا الملاعب وتخطيطها.

المطويات منظم أفكار

الأشكال الرباعيّة: اعملْ هذه المطويَّة لتساعدَكَ على تنظيمِ معلوماتِكَ حول الفصل 5 . ابدأْ بثلاثِ أوراقٍ A4 .

1. ضَعْ 3 أوراقٍ بعضها فوق بعض بحيثُ تبعد كل ورقة عن الأخرى 2 cm

2. اطوِ الأوراقَ بحيث تكونَ لحوافها الظاهرة العرض نفسه.

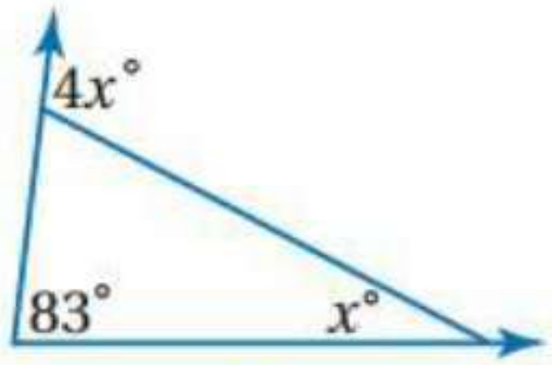
3. ثَبِّتِ الأوراقَ على طُولِ خطِّ الطَّيِّ.

4. أُكتبْ عنوان الفصل وأرقام الدُّروسِ، وسجِّلْ مُلاحظاتِكَ.

التهيئة

أوجد قيمة x مقربة إلى أقرب عُشْر :

1)



الزاوية الخارجة عن المثلث = مجموع الزاويتين الداخلتين البعيدتين

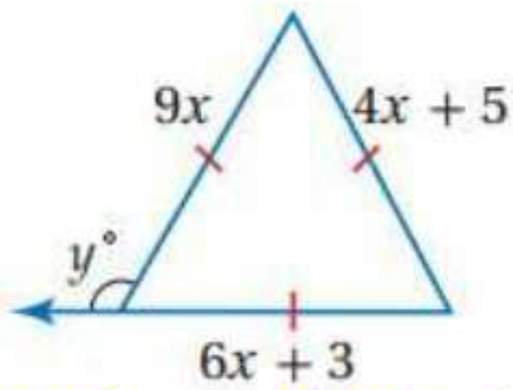
$4x = 83 + x$

$4x - x = 83$

$3x = 83$

$x = 27.7$

2)



بما أن المثلث جميع أضلاعه متطابقة إذا:

$9x = 4x + 5$

$9x - 4x = 5$

$5x = 5$

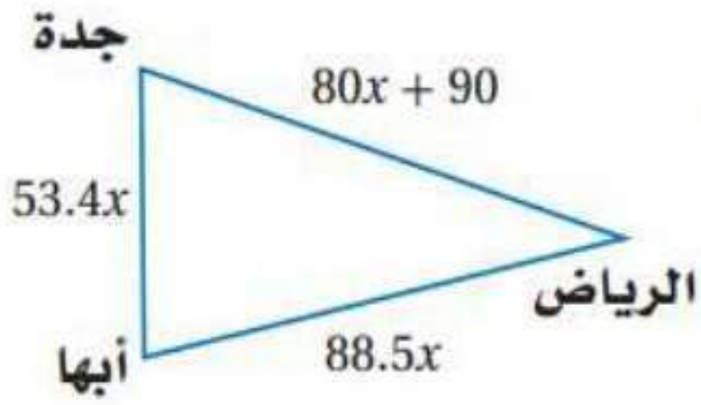
$x = 1$

بما أن المثلث جميع أضلاعه متطابقة إذا: جميع زواياة متطابقة و= 60°

$y = 180 - 60$

$y = 120^\circ$

3) **مدن:** تمثل مواقع كل من الرياض وجدة وأبها رؤوس مثلث كما في الشكل أدناه. إذا كان محيط هذا المثلث 2198 km، فأوجد المسافة الجوية بين كل من المدن الثلاث.



محيط المثلث = مجموع أطوال أضلاعه

$= (53.4x + 80x + 90 + 88.5x) = 2198$

$(221.9x) = 90 - 2198$

$(221.9x) = 2108$

$x = 9.5$

المسافة بين الرياض وجدة $= 80x + 90 = 80 \times 9.5 + 90 = 850$

المسافة بين الرياض وأبها $= 88.5x = 88.5 \times 9.5 = 840.8$

المسافة بين جدة وأبها $= 53.4x = 53.4 \times 9.5 = 507.3$

حدِّد ما إذا كان $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$ متوازيين أو متعامدين أو غير ذلك في كل مما يلي:

4) A(3, 3), B(8, 2), C(6, −1), D(1, 0)

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ميل $\overleftrightarrow{AB}$: $\frac{-1}{5} = \frac{2-3}{8-3}$

ميل $\overleftrightarrow{CD}$: $\frac{1}{-5} = \frac{0+1}{1-6}$

بما أن ميل كل من $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{CD}$ متساوينن إذا فهما متوازيين

5) A(4, 2), B(1, −3), C(−3, 5), D(2, 2)

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ميل $\overleftrightarrow{AB}$: $\frac{5}{3} = \frac{-5}{-3} = \frac{-3-2}{1-4}$

ميل $\overleftrightarrow{CD}$: $\frac{2-5}{2-(-3)} = \frac{-3}{5}$

بما أن ميل كل من $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{CD}$ حاصل ضربهم = -1 إذا فهما متعامدان

6) $A(-8, -7), B(4, -4), C(-2, -5), D(1, 7)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ميل $\overleftrightarrow{AB}$: $\frac{-4+7}{4+8} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

ميل $\overleftrightarrow{CD}$: $\frac{7+5}{1+2} = \frac{12}{3} = 4$

بما أن ميل كل من $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{CD}$ غير متساويين فهما غير متوازيين وليس حاصل ضربهم = -1 إذا فهما غير ذلك.

7) **حدائق:** صمَّم مهندس رسمًا لحديقة رباعيّة الشكل، إحداثيات رؤوسها: $A(-2, 1), B(3, -3), C(5, 7), D(-3, 4)$، إذا رسم ممرين يقطعانها $\overleftrightarrow{BD}$, $\overleftrightarrow{AC}$، فهل الممران متعامدان؟ فسّر إجابتك.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ميل $\overleftrightarrow{BD}$: $\frac{-3-4}{3+3} = \frac{-7}{6}$

ميل $\overleftrightarrow{AC}$: $\frac{7-1}{5+2} = \frac{6}{7}$

بما أن ميل كل من $\overleftrightarrow{BD}$ و $\overleftrightarrow{AC}$ حاصل ضربهم = -1 إذا فهما متعامدان

أوجد المسافة بين كل نقطتين، ثم أوجد إحداثيات نقطة منتصف القطعة الواصلة بينهما في كل مما يلي:

8) $J(-6, 2), K(-1, 3)$

$$JK = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$JK = \sqrt{(-1+6)^2 + (3-2)^2}$$

$$JK = \sqrt{(-1+6)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{26}$$

9) R(2, 5), S(8, 4)

$$RS = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$RS = \sqrt{(8-2)^2 + (4-5)^2}$$

$$RS = \sqrt{(6)^2 + (-1)^2} = \sqrt{37}$$

10) **مسافات:** وقف شخص عند النقطة T(80, 20) من مستوى إحداثي، ورغب في الانتقال إلى كل من U(20, 60) وَ V(110, 85)، فما أقصر مسافة يمكن أن يقطعها الشخص؟ فسِّر إجابتك.

$$TU = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$TU = \sqrt{(20-80)^2 + (60-20)^2}$$

$$TU = \sqrt{(-60)^2 + (40)^2} = 20\sqrt{13} = 72.11$$

$$TV = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$TV = \sqrt{(110-80)^2 + (85-20)^2}$$

$$TV = \sqrt{(30)^2 + (65)^2} = 5\sqrt{205} = 71.6$$

أقصر مسافة يقطعها الشخص هي من النقطة T إلى U

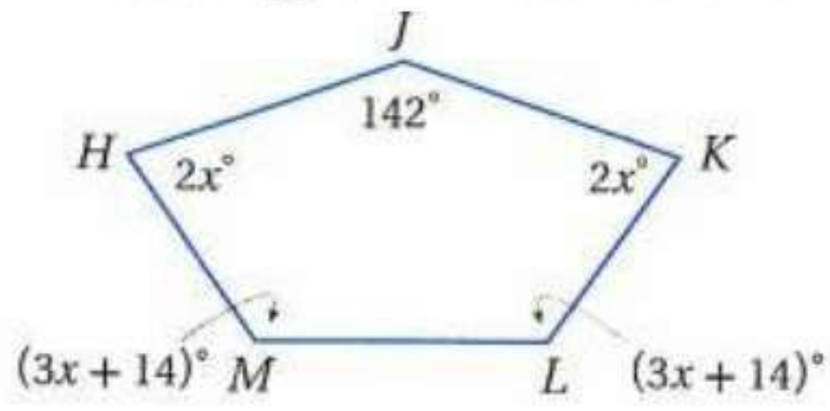
5-1 زوايا المضلع

تحقق

1A) أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للثماني المحدّب.

$$(n-2).180 = (8-2).180 = 1080^\circ$$

1B) أوجد قياسات جميع الزوايا الداخلية للخماسي المجاور.



مجموع قياسات زواياة =

$$(n-2).180 = (5-2).180 = 540^\circ$$

$$2x + 142 + 2x + (3x + 14) + (3x + 14) = 540^\circ$$

$$4x + 142 + 6x + 28 = 540$$

$$10x = 540 - (142 + 28)$$

$$10x = 370$$

$$x = 37$$

$$\angle H = \angle K = 2x = 2 \times 37 = 74$$

$$\angle L = \angle M = (3x + 14) = 3 \times 37 + 14 = 125^\circ$$

2A) سجاد: أوجد قياس زاوية داخلية لسجادة على شكل ثماني منتظم.

مجموع قياسات الزوايا الداخلية =

$(n-2).180 = (8-2).180 = 1080^\circ$

قياس كب زاوية داخلية = مجموع قياسات الزوايا الداخلية ÷ عدد الزاويا الداخلية

$\frac{1080}{6} = 135^\circ$

2B) نوافير: تزين النوافير الأماكن العامة، ويقام بعضها على شكل مضلعات منتظمة.

أوجد قياس زاوية داخلية لنافورة على شكل تساعي منتظم.

مجموع قياسات الزوايا الداخلية =

$(n-2).180 = (9-2).180 = 1260^\circ$

قياس كب زاوية داخلية = مجموع قياسات الزوايا الداخلية ÷ عدد الزاويا الداخلية

$\frac{1260}{9} = 140^\circ$

3) إذا كان قياس زاوية داخليّة لمضلع منتظم يساوي 144°، فأوجد عدد أضلاعه.

$144n = (n-2) . 180$ (كتابة معادلة)

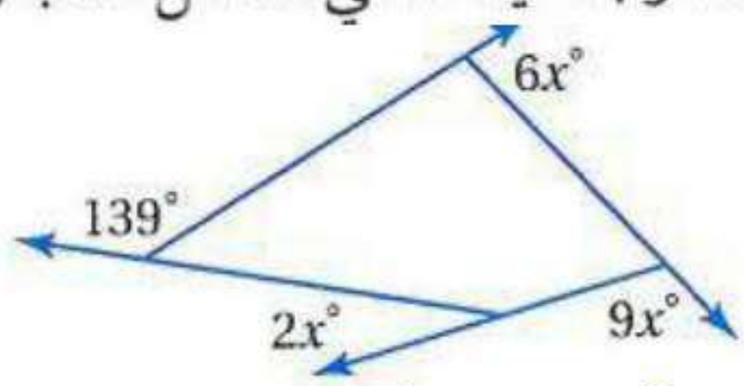
$144n = 180n - 360$ (خاصية التوزيع)

$-36n = -360$ (بطرح 180n من كلا الطرفين)

$n = 10$ (بقسمة كلا الطرفين على 36–)

إذن للمضلع 10 أضلاع

4A) أوجد قيمة x في الشكل المجاور .



(نظرية مجموع قياسات الزوايا الخارجية للمضلع)

$6x + 9x + 2x + 139 = 360^\circ$

$17x = 360^\circ - 139$

$17x = 360^\circ - 139^\circ$

$x = 13^\circ$

4B) أوجد قياس زاوية خارجيّة لمضلع منتظم ذي 12 ضلعًا.

$12n = 360$ (نظرية مجموع قياسات الزوايا الخارجية للمضلع)

$n = 30$

إذن قياس كل زاوية خارجية للمضلع المنتظم ذي 12 ضلعا يساوي 30°

تأكد:

المثال 1 أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لكل من المضلعين المحدبين الآتيين:

1) العشاري

$n = 10$

$(n-2).180 = (10-2).180 = 1440^\circ$

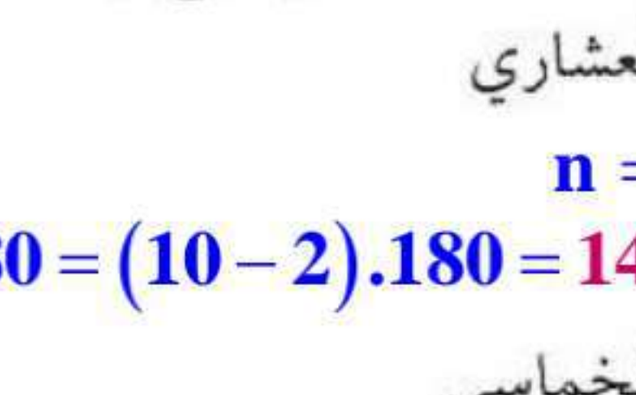
2) الخماسي

$n = 5$

$(n-2).180 = (5-2).180 = 540^\circ$

أوجد قياسات جميع الزوايا الداخلية لكل من المضلعين الآتيين:

3)



مجموع قياسات زوايا الشكل =

$(n-2).180 = (4-2).180 = 360^\circ$

$x + 2x + 3x + 4x = 360^\circ$

$10x = 360^\circ$

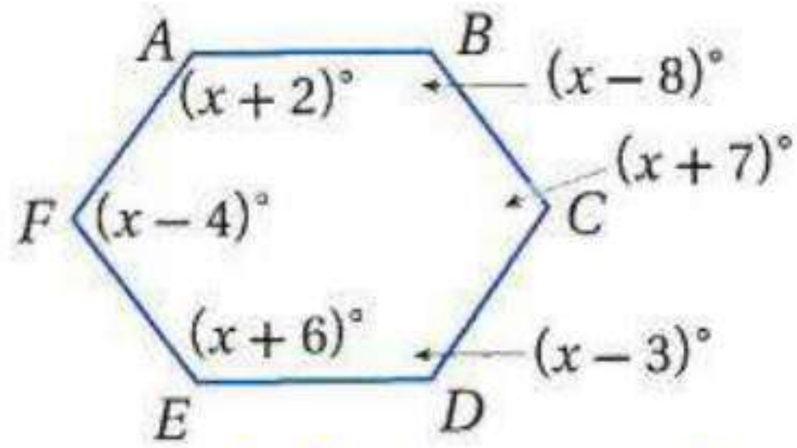
$\angle X = 36$

$\angle Y = 2 \times 36 = 72^\circ$

$\angle W = 3 \times 36 = 108^\circ$

$\angle Z = 4 \times 36 = 144^\circ$

(4



مجموع قياسات زوايا الشكل =

$$(n-2).180=(6-2).180=720^\circ$$

$$(x+2)+(x-8)+(x-4)+(x+7)+(x+6)+(x-3)=720^\circ$$

$$6x+0=720$$

$$x=120$$

$$\angle A=120+2=122^\circ$$

$$\angle B=120-8=112^\circ$$

$$\angle C=120+7=127^\circ$$

$$\angle D=120-3=117^\circ$$

$$\angle E=120+6=126^\circ$$

$$\angle F=120-4=116^\circ$$

المثال 2 5) **عجلة دوارة:** العجلة الدوّارة فى الصورة المجاورة على شكل مضلع منتظم عدد أضلاعه 15 ضلعًا. أوجد قياس زاوية داخليّة له.

مجموع زوايا المضلع عند $(n=15)$ =

$$(n-2).180=(15-2).180=2340^\circ$$

قياس أي زاوية داخلية له = $\frac{2340}{15}=156^\circ$

إذا كان قياس إحدى الزوايا الداخلية لمضلع منتظم معطى، فأوجد عدد الأضلاع في كل مما يأتي:

6) 150°

$150n = (n-2) \cdot 180$ (كتابة معادلة)

$150n = 180n - 360$ (خاصية التوزيع)

$-30n = -360$ (بطرح 180n من كلا الطرفين)

$n = 12$ (بقسمة كلا الطرفين على 30–)

إذن للمضلع 12 ضلع

7) 170°

$170n = (n-2) \cdot 180$ (كتابة معادلة)

$170n = 180n - 360$ (خاصية التوزيع)

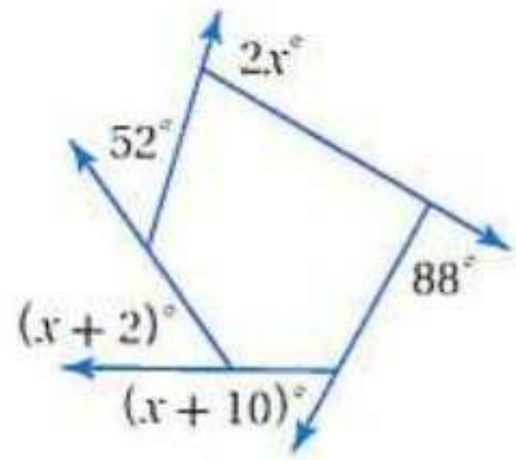
$-10n = -360$ (بطرح 180n من كلا الطرفين)

$n = 36$ (بقسمة كلا الطرفين على 30–)

إذن للمضلع 36 ضلع

المثال 4 أوجد قيمة x في كلٍّ من الشكلين الآتيين :

8)



(نظرية مجموع قياسات الزوايا الخارجية للمضلع)

$$2x + 52 + (x+2) + (x+10) + 88 = 360^\circ$$

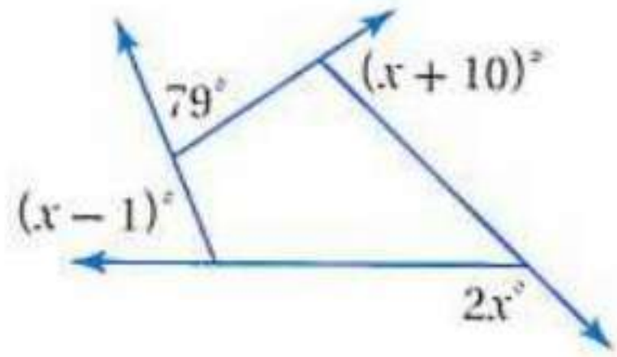
$$4x + 152 = 360^\circ$$

$$4x = 360^\circ - 152$$

$$4x = 208^\circ$$

$$x = 52$$

9)



(نظرية مجموع قياسات الزوايا الخارجية للمضلع)

$$79 + (x + 10) + (x - 1) + 2x = 360^\circ$$

$$4x + 88 = 360^\circ$$

$$4x = 360^\circ - 88$$

$$4x = 272^\circ$$

$$x = 68$$

أوجد قياس زاوية خارجيّة لكل من المضلعين المنتظمين الآتيين:

10) رباعي

$4n = 360^\circ$ (نظرية مجموع قياسات الزوايا الخارجية للمضلع)

$n = 90^\circ$

إذن قياس كل زاوية خارجية للمضلع المنتظم ذي 4 ضلعا يساوي 90°

11) ثُماني

$8n = 360^\circ$ (نظرية مجموع قياسات الزوايا الخارجية للمضلع)

$n = 45^\circ$

إذن قياس كل زاوية خارجية للمضلع المنتظم ذي 4 ضلعا يساوي 45°

تدرب وحل المسائل:

المثال 1 أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لكل من المضلعات المحدبة الآتية:

12) ذو 12 ضلعًا

$n = 12$

$(n-2).180 = (12-2).180^\circ = 1800^\circ$

13) ذو 20 ضلعًا

$n = 20$

$(n-2).180 = (20-2).180^\circ = 3240^\circ$

14) ذو 29 ضلعًا

$n = 29$

$(n-2).180 = (29-2).180^\circ = 4860^\circ$

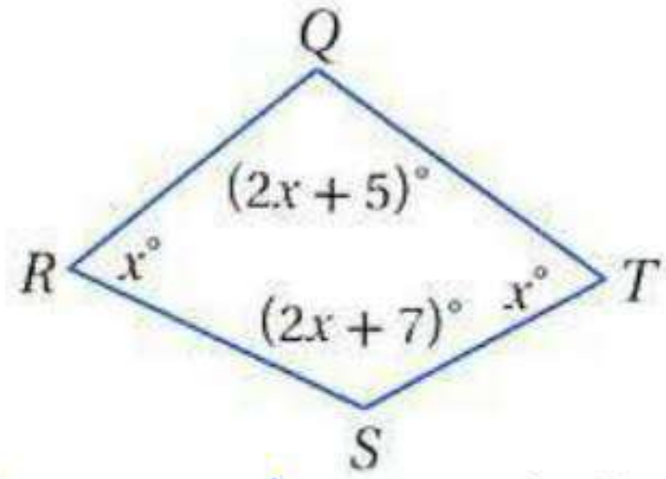
15) ذو 32 ضلعًا

$n = 32$

$(n-2).180 = (32-2).180^\circ = 4500^\circ$

أوجد قياسات جميع الزوايا الداخلية لكل من المضلعات الآتية:

16)

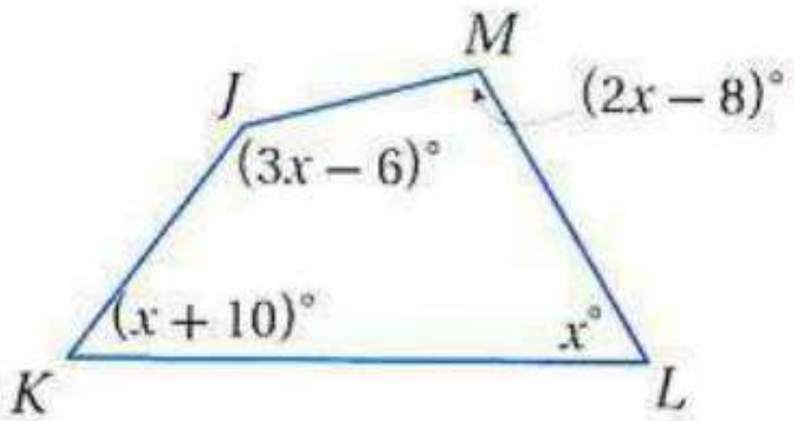


بما أن الشكل رباعي إذن مجموع قياسات الزوايا الداخلية له =

$(n-2).180 = (4-2).180^\circ = 360^\circ$

$$360^\circ = m\angle Q + m\angle R + m\angle S + m\angle T$$
$$360^\circ = (2x+5) + x + (2x+7) + x$$
$$360^\circ = 6x + 12$$
$$360 - 12 = 6x$$
$$348 = 6x$$
$$x = 58$$
$$m\angle R = m\angle T = 58^\circ$$
$$m\angle Q = (2x+5) = (2\times 58+5) = 121^\circ$$
$$m\angle S = (2x+7) = (2\times 58+5) = 123^\circ$$

(17

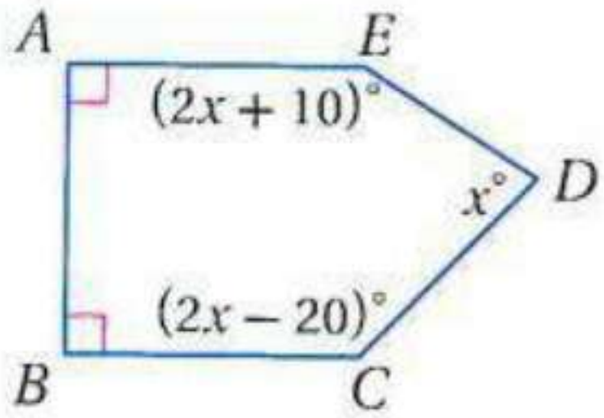


بما أن الشكل رباعي إذن مجموع قياسات الزوايا الداخلية له =

$$(n-2).180 = (4-2).180^\circ = 360^\circ$$
$$360^\circ = m\angle J + m\angle M + m\angle L + m\angle K$$
$$360^\circ = (3x-6) + (2x-8) + x + (x+10)$$
$$360^\circ = 7x - 4$$
$$360 + 4 = 7x$$
$$348 = 6x$$
$$x = 52$$
$$m\angle J = (3\times 52 - 6) = 150^\circ$$
$$m\angle M = (2\times 52 - 8) = 96^\circ$$
$$m\angle L = x = 52^\circ$$

$$m\angle K = (x+10) = (52+10) = 62^\circ$$

(18



بما أن الشكل خماسي إذن مجموع قياسات الزوايا الداخلية له =

$$(n-2).180 = (5-2).180^\circ = 540^\circ$$

$$540^\circ = m\angle A + m\angle B + m\angle C + m\angle D + m\angle E$$

$$540^\circ = 90 + 90 + (2x-20) + x + (2x+10)$$

$$540^\circ = 5x + 170$$

$$540 - 170 = 5x$$

$$540 = 5x$$

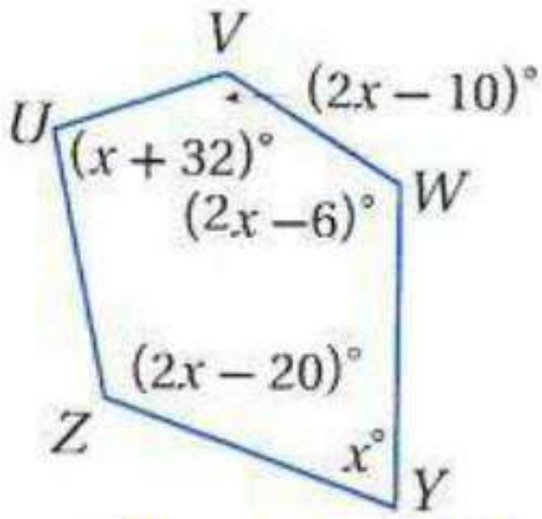
$$x = 74$$

$$m\angle D = 74^\circ$$

$$m\angle C = (2\times 74 - 20) = 128^\circ$$

$$m\angle E = (2\times 74 + 10) = 158^\circ$$

(19



بما أن الشكل خماسي إذن مجموع قياسات الزوايا الداخلية له =

$$(n-2).180 = (5-2).180^\circ = 540^\circ$$

$$540^\circ = m\angle U + m\angle V + m\angle W + m\angle Y + m\angle Z$$

$$540^\circ = (x+32)+(2x-10)+(2x-6)+x+(2x-20)$$

$$540^\circ = 8x-4$$

$$x = 68$$

$$m\angle U = (68+32) = 100^\circ$$

$$m\angle V = (2\times 68-10) = 126^\circ$$

$$m\angle W = (2\times 68-6) = 130^\circ$$

$$m\angle Y = x = 68^\circ$$

$$m\angle Z = (2\times 68-20) = 116^\circ$$

20) ما مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للمضلع فى الشكل المجاور؟

$n = 5$

$$(n-2).180 = (5-2).180^\circ = 540^\circ$$

المثال 2 أوجد قياس زاوية داخليّة لكل من المضلعات المنتظمة الآتية:

21) الاثنا عشري

$n = 12$

$$(n-2).180 = (12-2).180^\circ = 1800^\circ$$

$$\frac{1800}{12} = 150^\circ$$

22) الخماسي

$n = 5$

$$(n-2).180 = (5-2).180^\circ = 540^\circ$$

$$\frac{540}{5} = 108^\circ$$

23) العشاري

$n = 10$

$(n-2).180 = (10-2).180^\circ = 1440^\circ$

$\frac{1440}{10} = 144^\circ$

24) التُّساعي

$n = 9$

$(n-2).180 = (9-2).180^\circ = 1260^\circ$

$\frac{1260}{9} = 140^\circ$

المثال 3 إذا كان قياس إحدى الزوايا الداخلية لمضلع منتظم معطى، فأوجد عدد الأضلاع في كل مما يأتي:

25) 60°

$60n = (n-2).180$

$60n = n180 - 360$

$60n - n180 = -360$

$-120n = -360$

$n = 3$

إذن قياس كل زاوية خارجية للمضلع المنتظم ذي 3 ضلعا يساوي 60°

26) 90°

$90n = (n-2).180$

$90n = n180 - 360$

$90n - n180 = -360$

$-90n = -360$

$n = 4$

إذن قياس كل زاوية خارجية للمضلع المنتظم ذي 4 ضلعا يساوي 60°

27) 120°

$$120n = (n-2).180$$
$$120n = n180 - 360$$
$$120n - n180 = -360$$
$$-n60 = -360$$
$$n = 6$$

إذن قياس كل زاوية خارجية للمضلع المنتظم ذي 6 ضلعا يساوي 120°

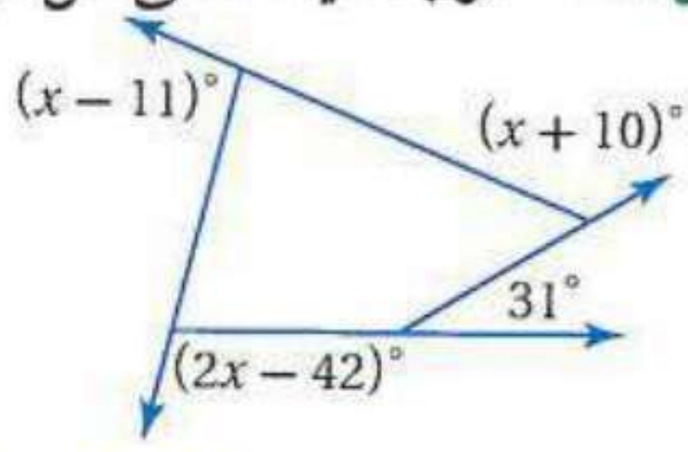
28) 156°

$$156n = (n-2).180$$
$$156n = n180 - 360$$
$$156n - n180 = -360$$
$$-24n = -360$$
$$n = 15$$

إذن قياس كل زاوية خارجية للمضلع المنتظم ذي 15 ضلعا يساوي 156°

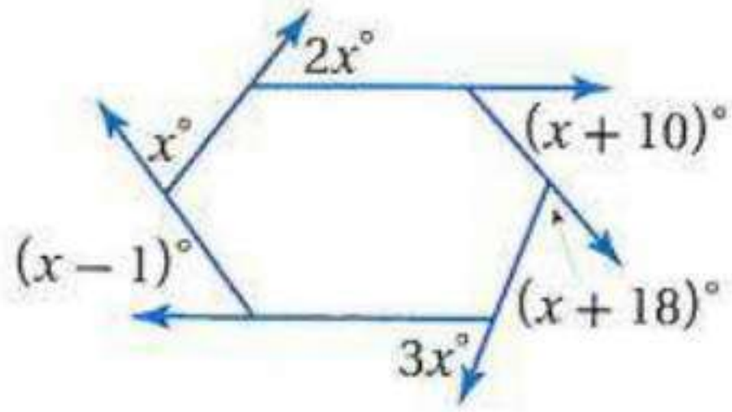
المثال 4 أوجد قيمة x في كل من الشكلين الآتيين:

29)



$$(x-11)+(x+10)+(2x-42)+31^\circ = 360^\circ$$
$$4x - 12 = 360$$
$$4x = 372$$
$$x = \frac{372}{4} = 93$$

(30



$$(2x)+(x+10)+(x+18)+3x+(x-1)+x=360^\circ$$

$$9x+27=360$$

$$9x=333$$

$$x=\frac{333}{9}=37$$

أوجد قياس زاوية خارجيّة لكل من المضلعات المنتظمة الآتية:

31) العشاري

$10n=360$ نظرية مجموع الزوايا الخارجية للمضلع

$$n=\frac{360}{10}=36^\circ$$

32) الخماسي

$5n=360$ نظرية مجموع الزوايا الخارجية للمضلع

$$n=\frac{360}{5}=72^\circ$$

33) السداسي

$6n=360$ نظرية مجموع الزوايا الخارجية للمضلع

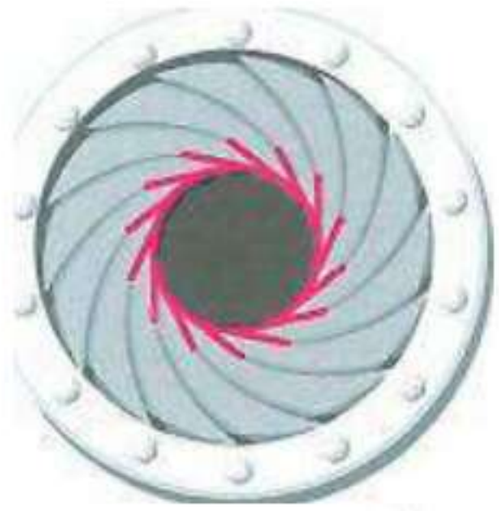
$$n=\frac{360}{6}=60^\circ$$

34) ذو 15 ضلعًا

$15n=360$ نظرية مجموع الزوايا الخارجية للمضلع

$$n=\frac{360}{15}=24^\circ$$

35) **تصوير:** تشكّل الفتحة التي ينفذ منها الضوء إلى عدسة آلة التصوير في الشكل المجاور مضلعًا منتظمًا ذا 14 ضلعًا.



a) أوجد قياس زاوية داخلية؟

$(14-2).180 = 2160^\circ$ $\quad$ $n = 14$

قياس الزاوية الداخلية $= \frac{2160}{14} = 154.3^\circ$ تقريبا

b) أوجد قياس زاوية خارجية؟

$14n = 360^\circ$ (نظرية مجموع قياسات الزوايا الخارجية للمضلع)

$n = 25.7$ (بقسمة كلا الطرفين على 14)

إذن قياس كل زاوية خارجية للمضلع $= 25.7^\circ$ تقريباً

أوجد قياس زاوية خارجية وزاوية داخلية للمضلع المنتظم المعطى عدد أضلاعه في كل إلى أقرب عُشر:

36) 7

$(7-2).180 = 900^\circ$ $\quad$ $n = 7$

قياس الزاوية الداخلية $= \frac{900}{7} = 128.6^\circ$ تقريباً

$7n = 360^\circ$ (نظرية مجموع قياسات الزوايا الخارجية للمضلع)

$n = 51.4$ (بقسمة كلا الطرفين على 7)

إذن قياس كل زاوية خارجية للمضلع $= 51.4^\circ$ تقريباً

37) 13

$(13-2).180 = 1980^\circ$ $\quad$ $n = 13$

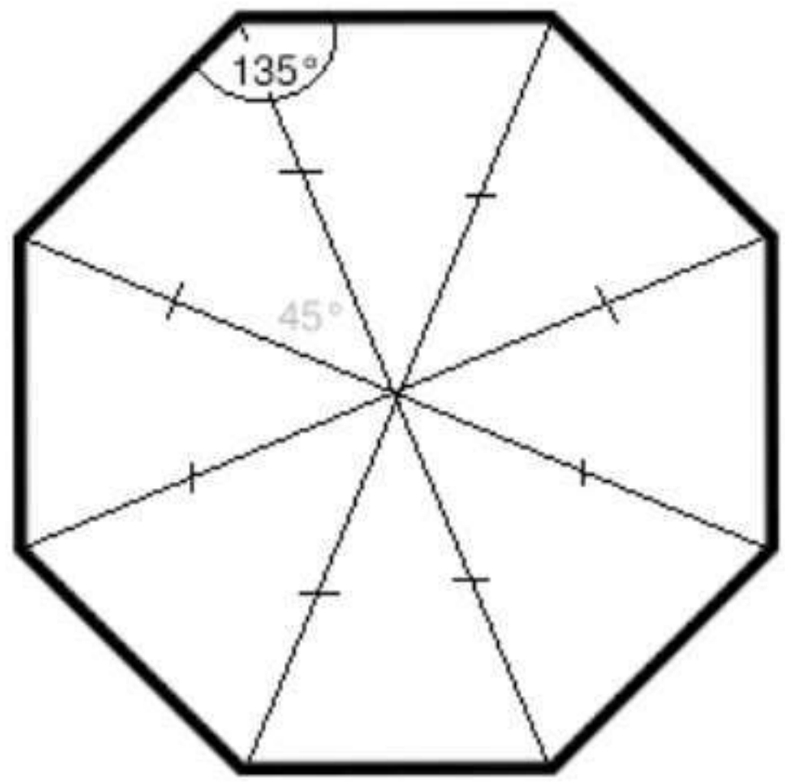
قياس الزاوية الداخلية $= \frac{1980}{13} = 152.3^\circ$ تقريباً

$13n = 360^\circ$ (نظرية مجموع قياسات الزوايا الخارجية للمضلع)

$n = 51.4$ (بقسمة كلا الطرفين على 13)

إذن قياس كل زاوية خارجية للمضلع = 27.7° تقريباً

38) أثبت أن مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمضلع الثماني يساوي 1080°، دون استعمال صيغة مجموع الزوايا الداخلية للمضلع.



يقسم المضلع الى ثمان مثلثات

مجموع زوايا 8 مثلثات = $8 \times 180^\circ = 1440^\circ$

مجموع الزوايا حول نقطة المركز = 360°

∴ مجموع زوايا المضلع الثماني الداخلية = $1440^\circ - 360^\circ = 1080^\circ$

قياس الزاوية الداخلية للمضلع الثماني المنتظم = $1080^\circ \div 8 = 135^\circ$

39) **برهان:** استعمل الجبر لإثبات نظرية مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة للمضلع.

افرض أن N تساوي مجموع قياسات الزوايا الخارجية لمضلع عدد أضلاعه n.
N تساوي مجموع قياسات الأزواج الخطية مطروحاً منه مجموع قياسات الزوايا الداخلية.

$$= 180n - 180\,(n - 2)$$
$$= 180n - 180n + 360 = 360$$

لذا، فإن مجموع قياسات الزوايا الخارجية لأي مضلع محدب يساوي 360°.

جبر: أوجد قياسات جميع الزوايا الداخلية لكل من المضلعين الآتيين :

40) عشاري قياسات زواياه الداخليّة:

$x+5, x+10, x+20, x+30, x+35, x+40, x+60, x+70, x+80, x+90$

$$(n-2).180 = (10-2).180^\circ = 1440^\circ$$

$$1440^\circ = (x+5)+(x+10)+(x+20)+(x+30)+(x+35)$$
$$+(x+40)+(x+60)+(x+70)+(x+80)+(x+90)$$

$$1440^\circ = 10x + 440$$
$$1440^\circ - 440 = 10x$$
$$1000 = 10x$$
$$x = 100$$
$$(x+5) = 100+5 = 105^\circ$$
$$(x+10) = 100+10 = 110^\circ$$
$$(x+20) = 100+20 = 120^\circ$$
$$(x+30) = 100+30 = 130^\circ$$
$$(x+35) = 100+35 = 135^\circ$$
$$(x+40) = 100+40 = 145^\circ$$
$$(x+60) = 100+60 = 160^\circ$$
$$(x+70) = 100+70 = 170^\circ$$
$$(x+80) = 100+80 = 180^\circ$$
$$(x+90) = 100+90 = 190^\circ$$

الزوايا هي: $190^\circ, 180^\circ, 170^\circ, 160^\circ, 140^\circ, 135^\circ, 130^\circ, 120^\circ, 110^\circ, 105^\circ$

41) الخماسي $ABCDE$ الذي قياسات زواياه الداخليّة: $(4x-1)^\circ$, $(2x-8)^\circ$, $(x+9)^\circ$, $6x$, $(4x+13)^\circ$,

$$(n-2).180 = (5-2).180^\circ = 540^\circ$$

$$540^\circ = (4x-1)+(2x-8)+(x+9)+(4x+13)+6x$$

$$540^\circ = 17x+13$$

$$540^\circ - 13 = 17x$$

$$527 = 17x$$

$$x = 31$$

$$m\angle E = 4x-1 = 4\times 31 - 1 = 123^\circ$$

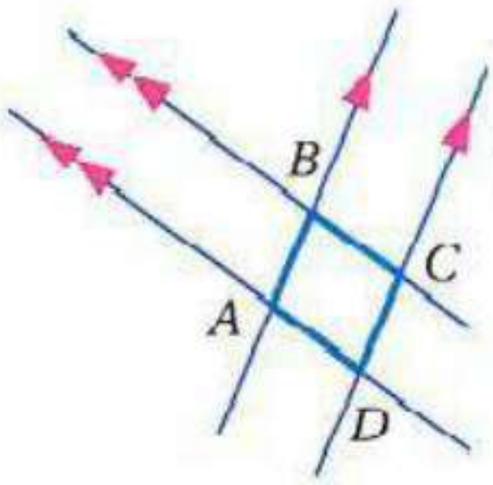
$$m\angle D = 2x-8 = 2\times 31 - 8 = 54^\circ$$

$$m\angle C = x+9 = 31+9 = 40^\circ$$

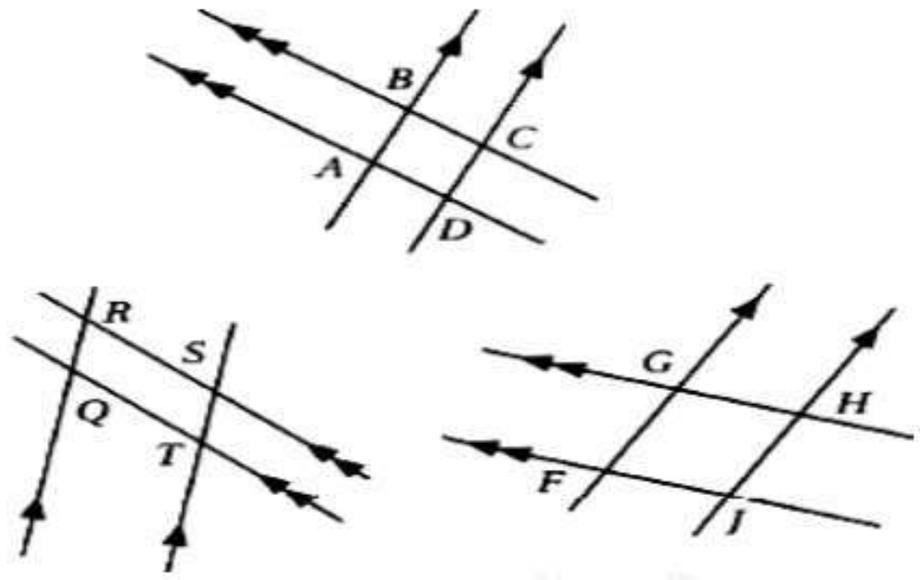
$$m\angle B = 4x+13 = 4\times 31 + 13 = 137^\circ$$

$$m\angle A = 6x = 6\times 31 = 186^\circ$$

42) **تمثيلات متعدّدة:** سوف تستقصي في هذه المسألة العلاقات بين الزوايا والأضلاع في أشكال رباعيّة خاصّة.



a) **هندسيًّا:** ارسم زوجين من المستقيمات المتوازية تتقاطع كما في الشكل المجاور، وسمِّ الشكل الرباعي الناتج $ABCD$. ثم كرّر هذه الخطوات لتكوين شكلين آخرين: $QRST$, $FGHJ$.



b) جدوليًا : أكمل الجدول الآتي :

الشكل الرباعي	أطوال الأضلاع وقياسات الزوايا							
ABCD	$m\angle A$	101	$m\angle B$	97	$m\angle C$	101	$m\angle D$	97
	AB	0.6cm	BC	0.6cm	CD	0.6cm	DA	0.6cm
FGHJ	$m\angle F$	76	$m\angle G$	104	$m\angle H$	76	$m\angle J$	104
	FG	1cm	GH	0.9cm	HJ	1cm	JF	0.9cm
QRST	$m\angle Q$	121	$m\angle R$	95	$m\angle S$	121	$m\angle T$	95
	QR	0.5cm	RS	1.2cm	ST	0.5cm	TQ	1.2cm

c) لفظيًا : خمّن العلاقة بين كل زاويتين متقابلتين في الشكل الرباعي الناتج عن زوجين من المستقيمات المتوازية.

في الشكل الرباعي المتكون من زوجين من المستقيمات المتوازية تكون الزاويتان المتقابلتان متطابقتين.

d) لفظيًا : خمّن العلاقة بين كل زاويتين متحالفتين في الشكل الرباعي الناتج عن زوجين من المستقيمات

في الشكل الرباعي المتكون من زوجين من المستقيمات المتوازية تكون الزاويتان المتحالفتان متكاملتين.

e) لفظيًا : خمّن العلاقة بين كل ضلعين متقابلين في الشكل الرباعي الناتج عن زوجين من المستقيمات المتوازية.

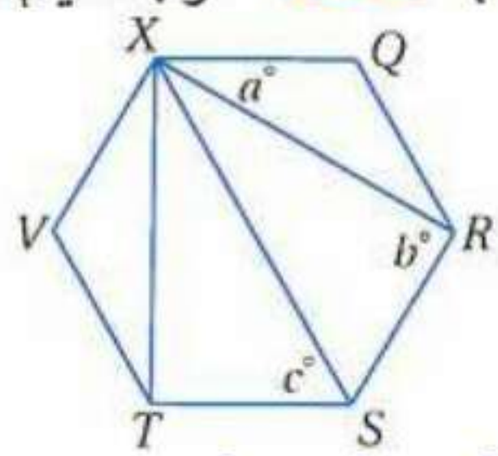
في الشكل الرباعي المتكون من زوجين من المستقيمات المتوازية تكون الضلعان المتقابلان متطابقين.

مسائل مهارات التفكير العليا:

43) اكتشف الخطأ: قالت مريم: إنّ مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة للعشاري أكبر منه للسباعي؛ لأنّ عدد أضلاع العشاري أكثر من أضلاع السباعي. وقالت لبنى: إنّ مجموع قياسات الزوايا الخارجية لكلا المضلعين متساوٍ. فهل أيٌّ منهما إدعاؤها صحيح؟ وضّح تبريرك.

لبنى؛ حسب نظرية مجموع قياسات الزوايا الخارجية، سيكون مجموع قياسات الزوايا الخارجية لأي مضلع محدب يساوي 360°.

44) تحدٍّ: أوجد قيم a, b, c في الشكل السداسي المنتظم $QRSTVX$ المجاور. برّر إجابتك.



$30^\circ, 90^\circ, 60^\circ$؛ حسب نظرية مجموع قياسات الزوايا الداخلية يكون مجموع قياسات الزوايا الداخلية 720°، وبما أن المضلع QRSTVX منتظم فإن له 6 زوايا متطابقة. وقياس كل زاوية 120°، لذلك

$m\angle XVT = m\angle XQR = 120^\circ$ وكذلك $XQ = QR$

وحسب نظرية المثلث متطابق الضلعين يكون

$$m\angle QXR = m\angle QRX$$

وبما أن مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمثلث 180°، فإن

$$m\angle QXR + m\angle QRX + m\angle XQR = 180^\circ$$

وبالتعويض ينتج أن $a + a + 120^\circ = 180^\circ$ ، أي أن $2a = 60^\circ$ ومنها $a = 30^\circ$

وحسب مسلمة جمع الزوايا $m\angle QRS = m\angle QRX + m\angle XRS$

وبالتعويض، $m\angle XRS + 30^\circ = 120^\circ$

$m\angle XRS + 30^\circ = 120^\circ$ وبالطرح يكون $m\angle XRS = 90^\circ$

إذن $b = 90^\circ$

وحسب (SAS) يكون $\Delta XVT = \Delta XQR$ و $\Delta XTS = \Delta XRS$

وبناءً على مسلمة جمع الزوايا يكون

$$m\angle VXQ = m\angle VXT + m\angle TXS + m\angle SXR + m\angle RXQ$$

وبالتعويض

$$m\angle TXS + m\angle SXR + 30^\circ + 30^\circ = 120^\circ$$

إذن $m\angle TXS + m\angle SXR = 60^\circ$ وبما أن

$m\angle TXS + m\angle SXR$ ولأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة، فإن $m\angle TXS = m\angle SXR = 30^\circ$

وفي ΔXTS ، $m\angle XTS + m\angle TSX + m\angle SXT = 180^\circ$

وبالتعويض $c + 30^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ ، إذن $c = 60^\circ$

45) **تبرير:** إذا مُدَّ ضلعان لسداسي منتظم بحيث يلتقيان في نقطة خارجه، فهل يكون المثلث الناتج متطابق الأضلاع دائمًا، أو أحيانًا، أو لا يمكن أن يكون متطابق الأضلاع أبدًا؟ برّر إجابتك.

دائماً؛ حسب نظرية مجموع الزوايا الخارجية

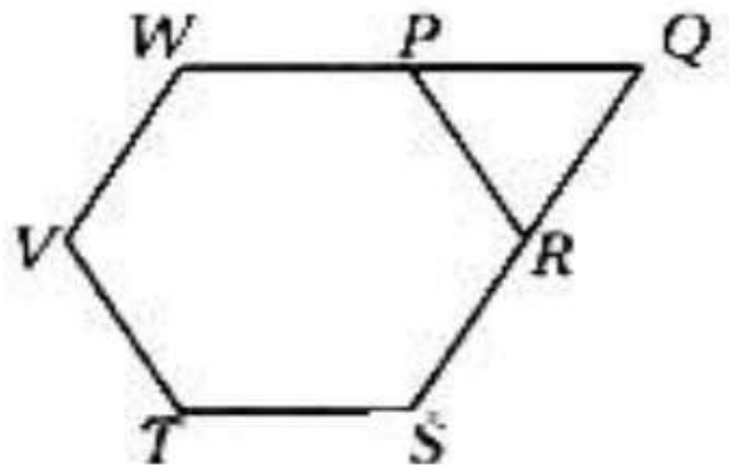
$$m\angle QRP = 60^\circ, m\angle QPR = 60^\circ$$

ولما كان مجموع قياسات الزوايا الداخلية لأي مثلث يساوي 180°، فإن

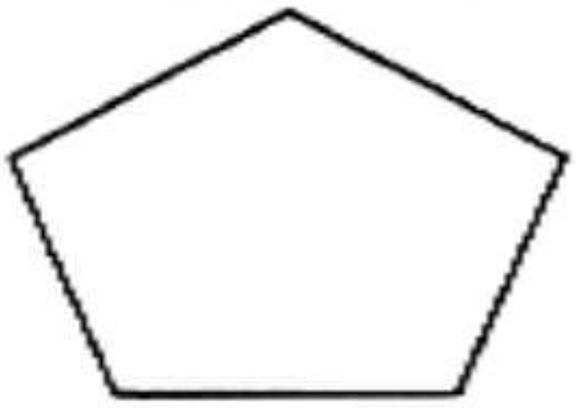
$$180^\circ - m\angle QPR - m\angle QRP = m\angle PQR$$

$$180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$$

إذن فالمثلث ΔPQR متطابق الأضلاع.



46) مسألة مفتوحة: ارسم مضلعًا، وأوجد مجموع قياسات زواياه الداخليّة. ما عدد أضلاع المضلع الذي مجموع قياسات زواياه الداخليّة مِثلا المجموع الذي أوجدته؟ برّر إجابتك.



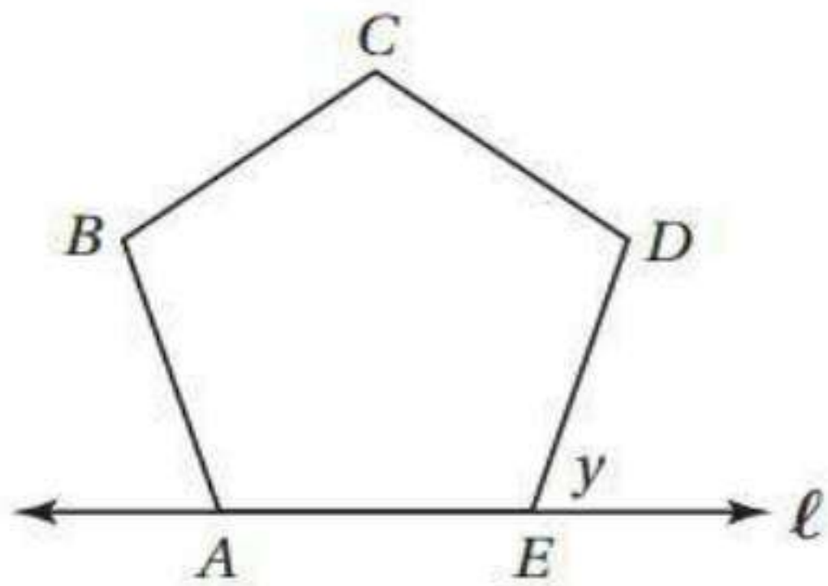
مجموع قياسات الزوايا الداخلية لهذا المضلع يساوي $(5-2).180^\circ = 540^\circ$
ومِثلا هذا المجموع يساوي $2 .(540)$ أو 1080
وعدد أضلاع المضلع الذي مجموع قياسات زواياه الداخلية 1080°
هو حل المعادلة $(n-2) . 180^\circ = 1080^\circ$ ومنها $n = 8$.

48) اكتب: وضّح العلاقة بين المثلثات ونظرية مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للمضلع.

اشتقت نظرية مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمضلع من النمط الذي يربط عدد أضلاع المضلع بعدد المثلثات. والصيغة هي حاصل ضرب مجموع قياسات زوايا المثلث أي 180° في عدد المثلثات في المضلع.

تدريب على اختبار

48) إجابة قصيرة: الشكل $ABCDE$ خماسي منتظم، والمستقيم ℓ يحوي $\overline{AE}$. ما قياس $\angle y$؟



$$(5-2).180^\circ = 540^\circ$$

$$\angle DEA = \frac{540^\circ}{5} = 108^\circ$$

$$\angle Y = 180 - 108^\circ = 72^\circ$$

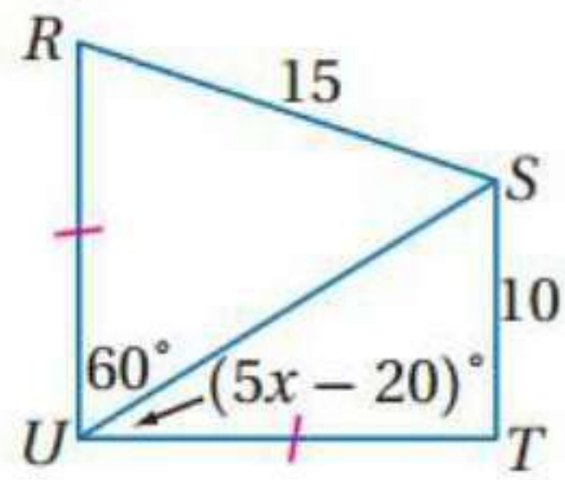
49) إذا كان مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لمضلع مِثْلي مجموع قياسات زواياه الخارجيّة، فما نوع هذا المضلع؟

A مربع
C سداسي
B خماسي
D ثماني

C سداسي

مراجعة تراكمية

50) **جبر:** اكتب متباينة تمثِّل مدى القيم الممكنة لِـ x (الدرس 4-6)



$$60 + 5x - 20 = 90$$

$$40 + 5x = 90$$

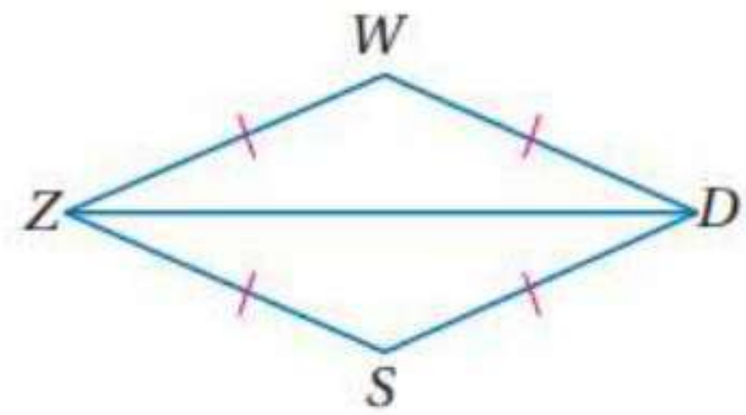
$$5x = 90 - 40$$

$$5x = 50$$

$$x = 10$$

بيّن في كل مما يأتي أن المثلثين متطابقان، وحدِّد حالة التطابق، ثم اكتب عبارة تطابق : (الدرسان 3-4, 3-5)

(51

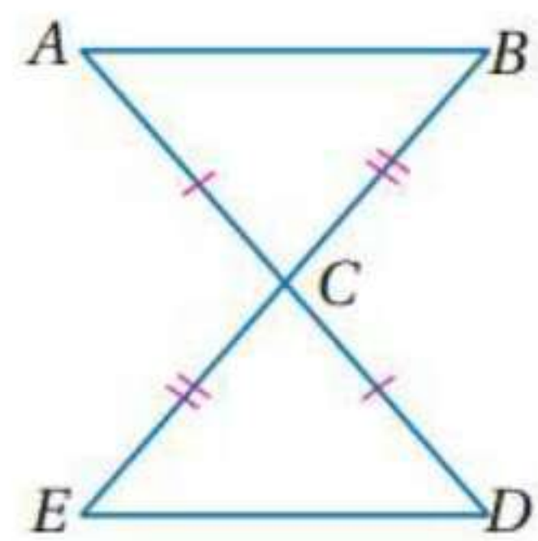


$\overline{WD} \cong \overline{DS}$, $\overline{WZ} \cong \overline{ZS}$ (معطى)

$\overline{ZD} \cong \overline{ZD}$ حسب خاصية الانعكاس

إذا $\Delta ZWD \cong \Delta ZSD$ حسب SSS

(52

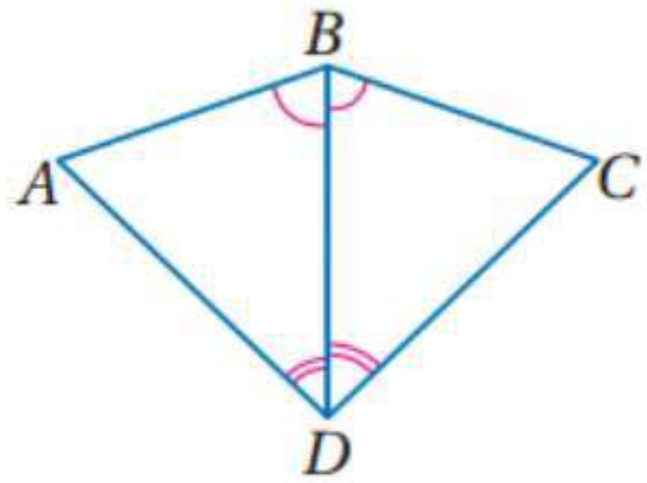


$\overline{CB} \cong \overline{CE}$, $\overline{AC} \cong \overline{CD}$ (معطى)

$\angle ACB \cong \angle ECD$ بالتقابل بالرأس

$\Delta ACB \cong \Delta ECD$ حسب SAS

(53



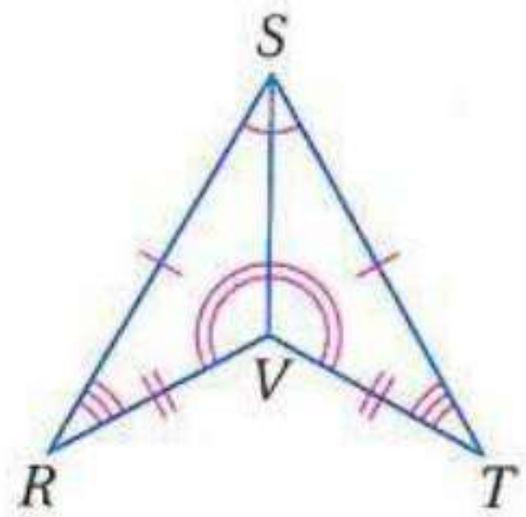
$\Delta CBD \cong \Delta ABD$

$\angle CBD = \angle ABD$

$\angle BDC = \angle BDA$

$BD = BD$ (خاصية الانعكاس)

(54



$SV = SV$ (حسب خاصية الانعكاس)

$ST = SR$ (معطى)

$VR = VT$ (معطى)

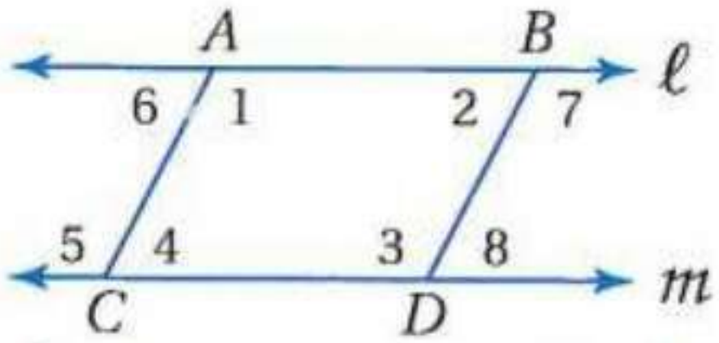
$\angle TSV = \angle RSV$

$\angle SVT = \angle SVR$

$\Delta SVT \cong \Delta SVR$ لأن جميع الأضلاع المتناظرة متطابقة وجميع الزوايا المتناظرة متطابقة

استعد للدرس اللاحق

في الشكل المجاور $\overline{AC} \parallel \overline{BD}$, $m \parallel \ell$ ، حدد جميع أزواج الزوايا في كل مما يأتي:



54) زاويتان متبادلتان داخليًّا.

الزوايا 1 و5؛ 4 و6؛ 2 و8؛ 3 و7

55) زاويتان متحالفتان.

الزوايا 1 و4؛ 2 و3؛ 1 و2؛ 3 و4؛ 8 و7؛ 6 و5

5-1 توسع: معمل الجداول الإلكترونية: زوايا المضلع

تمارين ومسائل:

1) اكتب صيغة لإيجاد قياس زاوية داخلية للمضلع المنتظم.

$$\frac{C\,2}{A2}$$

2) اكتب صيغة لإيجاد مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة للمضلع المنتظم.

$$A2 * E\,2$$

3) ما قياس كل زاوية داخليّة إذا كان عدد الأضلاع 1 أو 2؟

$$0^{\circ} - 180^{\circ}$$

4) هل من الممكن أن يكون عدد الأضلاع 1 أو 2؟ وضّح إجابتك.

لا؛ لأن المضلع شكل مغلق مكون من قطع مستقيمة تقع في المستوى نفسه.

استعمل جدولًا إلكترونيًا لحل الأسئلة 8–5 :

5) ما عدد المثلثات في مضلع عدد أضلاعه 17 ضلعًا؟

15

6) أوجد قياس الزاوية الخارجية لمضلع منتظم عدد أضلاعه 16 ضلعًا.

$$16n = 360$$

$$n = \frac{360}{16} = 22.5^{\circ}$$

7) أوجد قياس زاوية داخلية لمضلع منتظم عدد أضلاعه 115 ضلعًا.

$$20340 = 180.(n - 2)$$

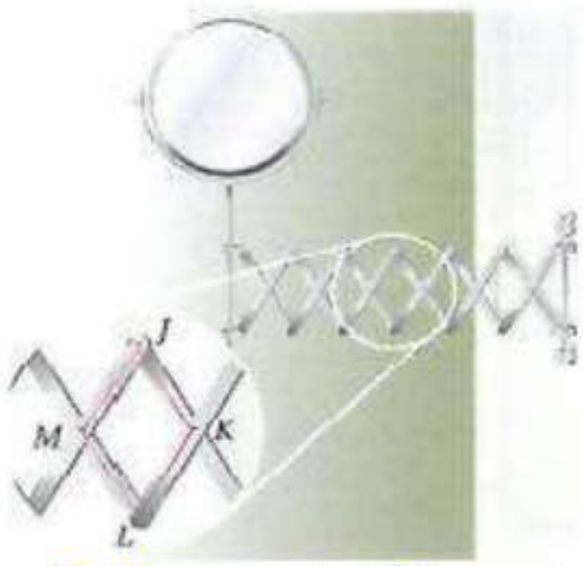
$$176.9^{\circ} = \frac{20340}{115}$$

8) إذا كان قياس كل من الزوايا الخارجية $0°$، فأوجد قياسات جميع الزوايا الداخليّة.
وهل هذا ممكن؟ وضّح إجابتك.

سيكون قياس كل زاوية داخلية، $180°$ وهذا غير ممكن للمضلع.

5-2 متوازي الأضلاع

تحقق



1) **مرايا :** تُستعمل في مرآة الحائط المبينة جانبًا متوازيات أضلاع يتغير شكلها كُلّما مُدّ الذراع. في $\square JKLM$ ، إذا كان $m\angle J = 47, MJ = 8$ cm، فأوجد كلًّا مما يأتي:

A) LK

LK = MJ = 8cm

(كل ضلعين في متوازي الأضلاع متطابقان)

B) $m\angle L$

m∠L = m∠J = 47°

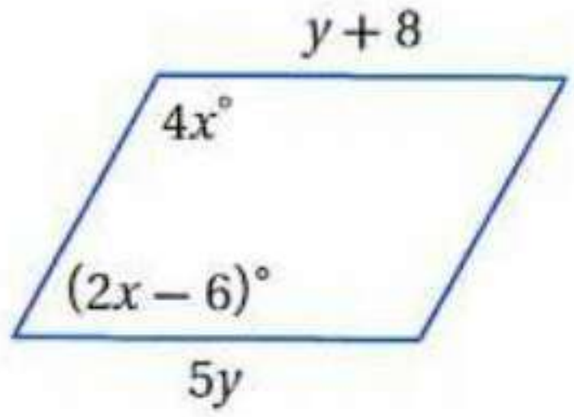
(كل زاويتين متقابلتين في متوازي الأضلاع متطابقتان)

C) إذا مُدّ الذراع حتى أصبح $m\angle J = 90°$، فكم يصبح قياس كلّ من $\angle K, \angle L, \angle M$؟ برّر إجابتك.

سيكون قياس كل من الزوايا الأخرى 90° تبعاً للنظرية 1.6.

أوجد قيمة المتغير في كل من متوازيي الأضلاع الآتيين :

2A)



y + 8 = 5y (تعريف تطابق القطع المستقيمة)

4y = 8

y = 2

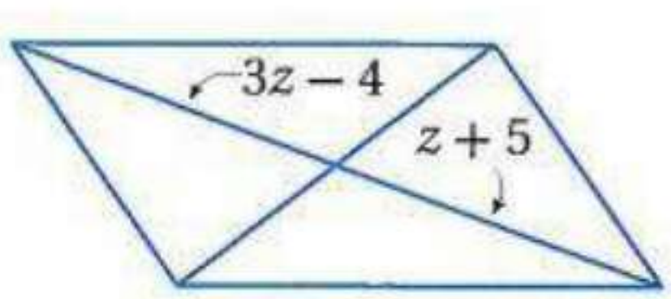
$$4x + (2x - 6) = 180^\circ$$

$$6x = 186^\circ$$

$$x = 31$$

$$x = 31,\ y = 2$$

(2B



(قطرا متوازي الأضلاع ينصف كلا منهما الآخر)

$$3z - 4 = z + 5$$

$$2z = 9$$

$$z = 4.5$$

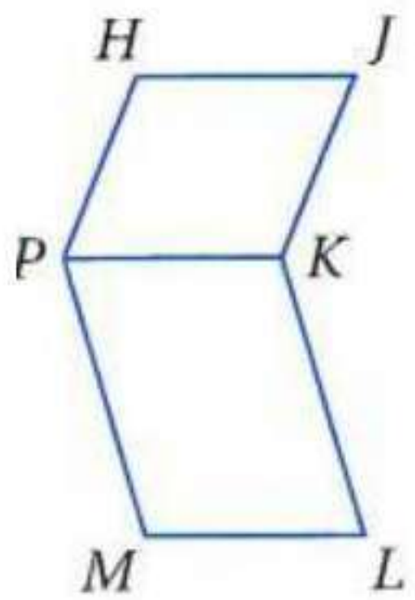
3) **هندسة إحداثيّة:** أوجد إحداثيي نقطة تقاطع قطري $\square RSTU$ الذي رؤوسه $R(-8, -2), S(-6, 7), T(6, 7), U(4, -2)$.

بما أن قطري متوازي الأضلاع ينصف كلا منهما الآخر، فإن نقطة تقاطعهما هي نقطة منتصف كل من $\overline{SU}$, $\overline{RT}$. أوجد نقطة منتصف $\overline{RT}$ التي طرفاها $(-8، -2), (6\ 7)$

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = \left(\frac{-8+6}{2}, \frac{-2+7}{2}\right)$$ (صيغة نقطة المنتصف)

$$= (-1، 2.5)$$ (بالتبسيط)

إذن إحداثيا نقطة تقاطع قطري RSTU هما $(-1، 2.5)$



4) اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $\square HJKP$, $PKLM$

المطلوب: $\overline{HJ} \cong \overline{ML}$

المعطيات: متوازيا الأضلاع HJKP, PKLM

المطلوب: $\overline{HJ} \cong \overline{ML}$

البرهان:

العبارات (المبررات):

1) HJKP, PKLM متوازيا أضلاع (معطيات)

2) $\overline{HJ} \cong \overline{PK}$, $\overline{PK} \cong \overline{ML}$ (الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة)

3) HJ = ML (خاصية التعدي)

تأكد :

1) **ملاحة :** يستعمل البحّارة مسطرتين متوازيتين يصل بينهما ذراعان متساويا الطول لتحديد اتجاه إبحارهم، فيضعون حافة إحدى المسطرتين بمحاذاة مسار الإبحار ثم يحركون المسطرة الأخرى حتى تصل إلى قرص بوصلة مرسوم على الخريطة. تُشكّل المسطرتين والذراعين الواصلين بينهما ▱$MNPQ$.

a) إذا كان $MQ = 2in$ ، فأوجد NP.

$NP = 2in$ لأن كل ضلعين متناظرين متطابقين

b) إذا كان $m\angle NMQ = 38^\circ$ ، فأوجد $m\angle MNP$.

كل زاويتين متحالفتين مجموعهم $= 180^\circ$

$38 + m\angle NMQ = 180^\circ$

$m\angle NMQ = 180 - 38$

$m\angle NMQ = 142^\circ$

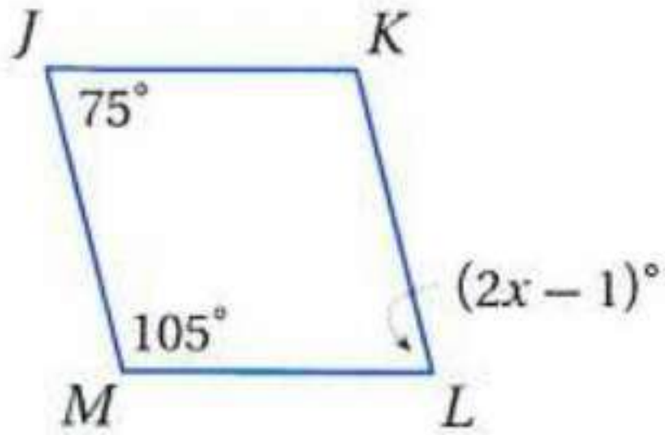
c) إذا كان $m\angle MQP = 128^\circ$ ، فأوجد $m\angle MNP$.

من خصائص متوازي الأضلاع كل زاويتين متقابلين متطابقين

$\angle MNP = 128^\circ$

المثال 2 **جبر :** أوجد قيم المتغيرات في كل من متوازيات الأضلاع الآتية :

2)



من خصائص متوازي الأضلاع كل زاويتين متقابلين متطابقين

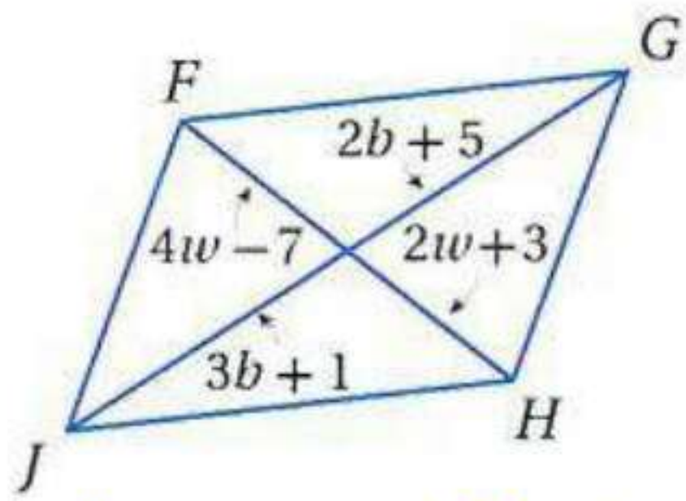
$\angle L = 75^\circ$

$2x - 1 = 75$

$2x = 76$

$x = 38$

(3



حسب نظرية قطرا منوازي الأضلاع

$2w + 3 = 4w - 7$

$2w - 4w = -7 - 3$

$-2w = -10$

$w = 5$

$2b + 5 = 3b + 1$

$2b - 3b = 1 - 5$

$-b = -4$

$b = 4$

المثال 3 4) **هندسة إحداثيّة:** أوجد إحداثيي نقطة تقاطع قطري $\square ABCD$ الذي رؤوسه $A(-4, 6), B(5, 6), C(4, -2), D(-5, -2)$.

بما أن قطري متوازي الأضلاع ينصف كلا منهما الآخر، فإن نقطة تقاطعهما هي نقطة منتصف كل من $\overline{BD}$, $\overline{AC}$. أوجد نقطة منتصف $\overline{AC}$ التي طرفاها $(-4،6), (4 \ -2)$

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = \left(\frac{-4+4}{2}, \frac{6-2}{2}\right)$$ (صيغة نقطة المنتصف)

$m\angle WZX + m\angle ZXW = 90^\circ$

$x - 11 + x - 9 = 90$

$2x - 20 = 90$

$2x = 110$

$x = 55$

$\angle ZXW = x - 11 = 55 - 11$

$\angle ZXW = 44$

$\angle ZXY = 90 - 44 = 46^\circ$

(بالتبسيط)

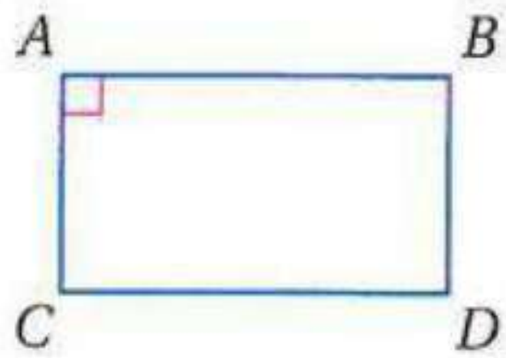
إذن إحداثيا نقطة تقاطع قطري $\overline{ABCD}$ هما $(0،2)$

المثال 4 **برهان:** اكتب برهانًا من النوع المحدد في كل من السؤالين الآتيين :

5) برهانًا حرًّا.

المعطيات: $ABCD$ متوازي أضلاع، $\angle A$ قائمة.

المطلوب: $\angle B, \angle C, \angle D$ قوائم. (النظرية 5.6)



المعطيات: ABCD متوازي أضلاع فيه الزاوية A قائمة.

المطلوب: الزوايا B, C, D قوائم. (النظرية 5.6).

البرهان: حسب تعريف متوازي الأضلاع $\overline{AD} \parallel \overline{CB}$

ولأن $\angle A$ قائمة فإن $\overline{AD} \perp \overline{AB}$.

وحسب نظرية القاطع العمودي يكون $\overline{AB} \perp \overline{CB}$.

إذن $\angle B$ قائمة لأن المستقيمين المتعامدين يشكلان زاوية قائمة

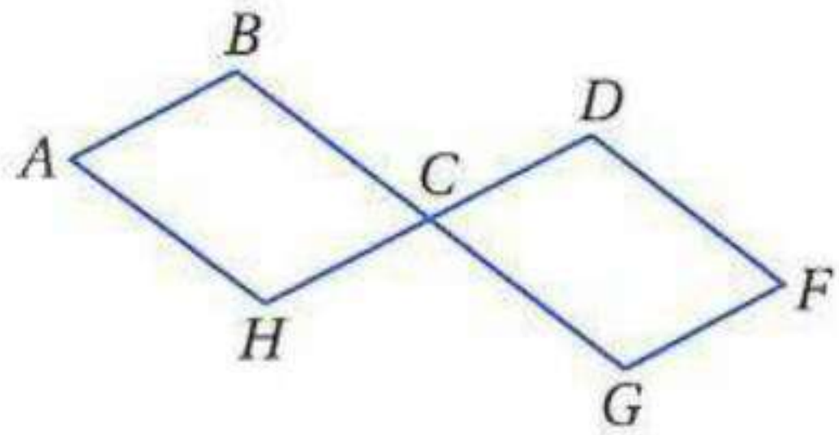
وكذلك $\angle D \cong \angle B$ و $\angle A \cong \angle C$ لأن الزوايا المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة.

إذن الزوايا C, D قائمتان لأن لجميع الزوايا المتطابقة القياس نفسه.

6) برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $ABCH$, $DCGF$ متوازيا أضلاع.

المطلوب: $\angle A \cong \angle F$.



المعطيات: متوازيا الأضلاع DCGF, ABCH.

المطلوب: $\angle A \cong \angle F$

البرهان:

العبارات (المبررات):

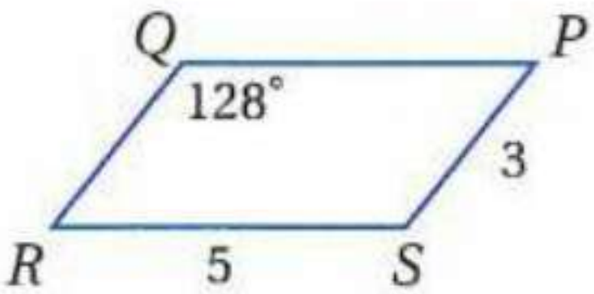
1) ABCH و DCGF متوازيا أضلاع. (معطى)

2) $\hat{E}$ DCG ≅ $\hat{E}$ BCH (الزاويتان المتقابلتان بالرأس متطابقتان)

3) $\hat{E}$ BCH ≅ $\hat{E}$ A و $\hat{E}$ DCG ≅ $\hat{E}$ F (الزوايا المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة)

4) $\hat{E}$ F ≅ $\hat{E}$ A (خاصية التعدي)

تدرب وحل المسائل:



استعمل $\square PQRS$ المبين جانبًا لإيجاد كل مما يأتي :

7) $m\angle R$

كل زاويتين متحالفتين مجموعهم = 180°

$$128 + m\angle QRS = 180^\circ$$

$$m\angle QRS = 180^\circ - 128^\circ$$

$$m\angle QRS = 52^\circ$$

8) QR

كل ضلعين متناظرين متطابقين في متوازي الأضلاع

$$QR = PS = 3cm$$

9) QP

كل ضلعين متناظرين متطابقين في متوازي الأضلاع

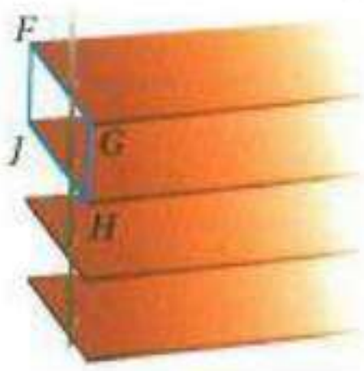
$$QP = RS = 5cm$$

10) $m\angle S$

كل زاويتين متقابلتين متساويتين

$$m\angle Q = m\angle S = 128^\circ$$

11) **ستائر:** في الشكل المقابل صورة لشرائح ستائر النوافذ المتوازية دائمًا؛ لتسمح بدخول أشعة الشمس. في $\square FGHJ$ ، إذا كان $FJ = \frac{3}{4}$ in, $FG = 1$ in, $\angle JHG = 62^\circ$ ، فأوجد كلًّا مما يأتي :



a) JH

كل ضلعين في متوازي الأضلاع متقابلين متطابقين

$$FG = JH = 1in$$

(b GH

كل ضلعين في متوازي الأضلاع متقابلين متطابقين

$$FG = GH = \frac{3}{4}\text{in}$$

(c $m\angle JFG$

كل زاويتين في متوازي الأضلاع متقابلين متطابقين

$$m\angle JHG = m\angle JFG = 62^\circ$$

(d $m\angle FJH$

كل زاويتين متحالفتين مجموعهم = 180°

$$m\angle JFG + m\angle FJH = 180^\circ$$

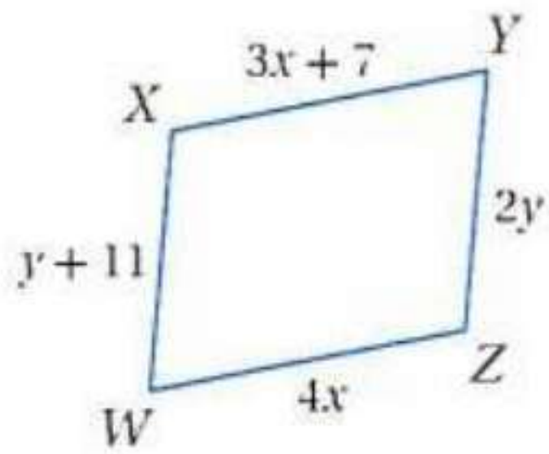
$$62^\circ + m\angle FJH = 180^\circ$$

$$m\angle FJH = 180^\circ - 62^\circ$$

$$m\angle QRS = 118^\circ$$

جبر: أوجد قيمتي x, y في كل من متوازيات الأضلاع الآتية :

(12



بما أن الشكل متوازي أضلاع إذن كل ضلعين متقابلين متطابقين

$$3x + 7 = 4x$$

$$4x - 3x = 7$$

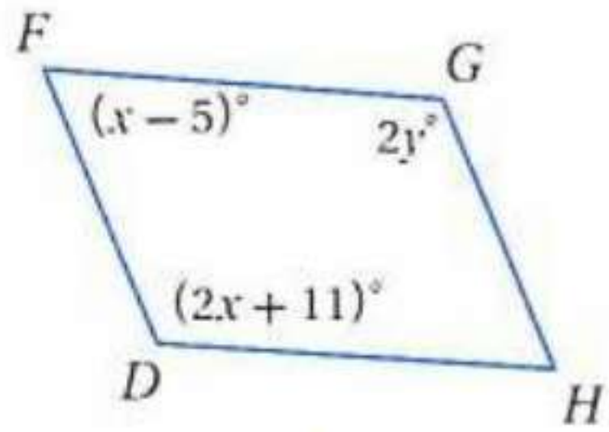
$$x = 7$$

$$2y = y + 11$$

$$2y - y = 11$$

$$y = 11$$

(13



كل زاويتين متحالفتين مجموعهم = 180°

$x-5+2x+11=180^\circ$

$x+16=180$

$x=164$

$x-5+2y=180$

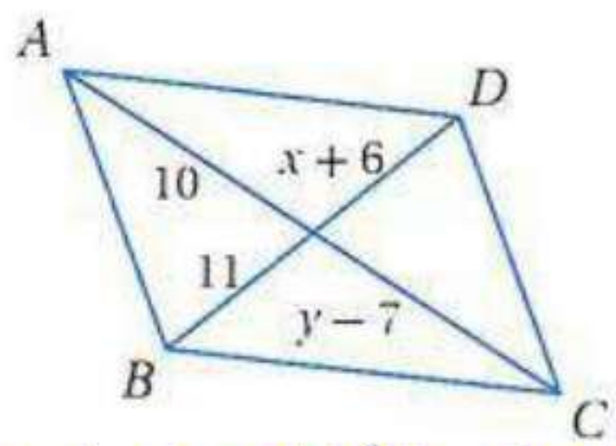
$164-5+2y=180$

$159+2y=180$

$2y=180-159=21$

$y=10.5$

(14



قطرا متوازي الأضلاع ينصف كل منهما الأخر

$x+6=11$

$x=5$

$10=y-7$

$y=10+7$

$y=17$

هندسة إحداثية: أوجد إحداثيي نقطة تقاطع قطري ▱$WXYZ$ المعطاة رؤوسه في كل من السؤالين الآتيين :

15) $W(-1, 7), X(8, 7), Y(6, -2), Z(-3, -2)$

بما أن قطري متوازي الأضلاع ينصف كلا منهما الآخر، فإن نقطة تقاطعهما هي نقطة منتصف كل من $\overline{XZ}$, $\overline{WY}$. أوجد نقطة منتصف $\overline{WY}$ التي طرفاها

$(-1،7), (6\ -2)$

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) = \left(\frac{-1+6}{2}, \frac{7-2}{2}\right)$$ **(صيغة نقطة المنتصف)**

$(2.5،2.5)$ **(بالتبسيط)**

إذن إحداثيا نقطة تقاطع قطري $\overline{ABCD}$ هما $(2.5،2.5)$

16) $W(-4, 5), X(5, 7), Y(4, -2), Z(-5, -4)$

بما أن قطري متوازي الأضلاع ينصف كلا منهما الآخر، فإن نقطة تقاطعهما هي نقطة منتصف كل من $\overline{XZ}$, $\overline{WY}$. أوجد نقطة منتصف $\overline{WY}$ التي طرفاها

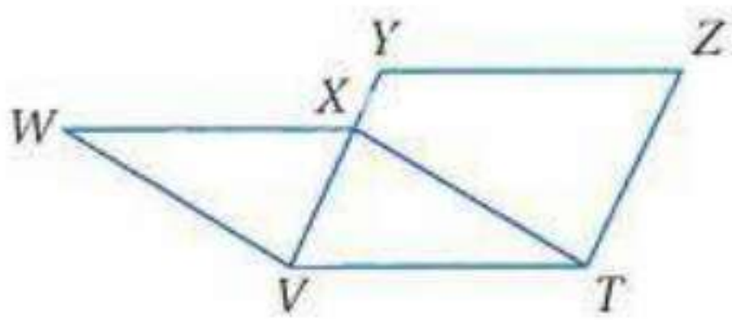
$(-4،5), (4\ -2)$

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) = \left(\frac{-4+4}{2}, \frac{5-2}{2}\right)$$ **(صيغة نقطة المنتصف)**

$(0،1.5)$ **(بالتبسيط)**

إذن إحداثيا نقطة تقاطع قطري $\overline{ABCD}$ هما $(0،1.5)$

برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين فيما يأتي :



17) المعطيات: ▱$WXTV$, ▱$ZYVT$

المطلوب: $\overline{WX} \cong \overline{ZY}$

المعطيات: متوازيا الأضلاع WXTV, ZYVT.

المطلوب: $\overline{WX} \cong \overline{ZY}$

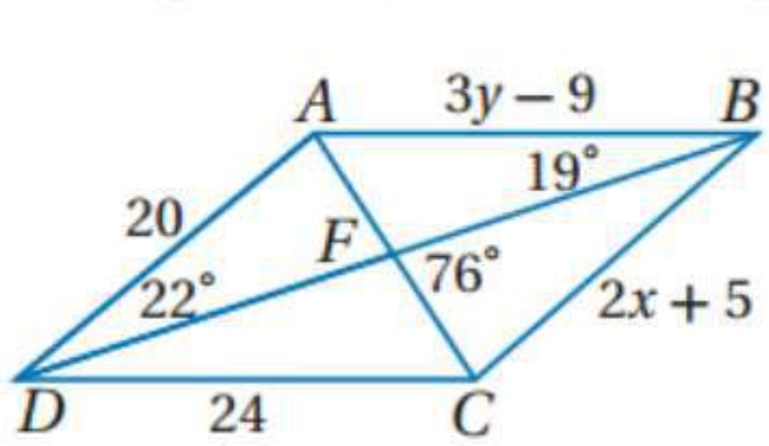
البرهان: العبارات (المبررات):

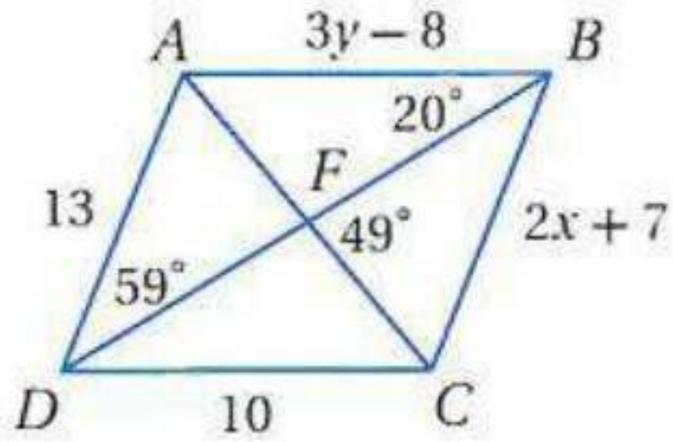
1) متوازيا الأضلاع WXTV, ZYVT (معطى)

2) $\overline{VT} \cong \overline{YZ}$, $\overline{WX} \cong \overline{VT}$. (الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة)

3) $\overline{WX} \cong \overline{YZ}$ (خاصية التعدي)

جبر: استعمل $\square ABCD$ المبين جانبًا لإيجاد كل مما يأتي :





18) x

كل ضلعين متقابلين متطابقين

$2x + 5 = 20$

$2x = 20 - 5$

$2x = 15$

$x = 7.5$

19) y

$3y - 9 = 24$

$3y = 24 + 9$

$3y = 33$

$y = 11$

20) $m\angle AFB$

$\angle AFB = 180 - 76$

$\angle AFB = 104^\circ$

21) $m\angle DAC$

$\angle DAC = 180 - (76 + 22)$

$\angle DAC = 82^\circ$

22) $m\angle ACD$

$\angle CAB = 180 - (\angle AFB + \angle ABF)$

$\angle CAB = 180 - (19 + 76) = 85^\circ$

$\angle ACD = \angle CAB = 85^\circ$ بالتبادل داخليا

23) $m\angle DAB$

$\angle AFD = 76$ بالتقابل بالرأس

$\angle DAF = 180 - (76 + 22) = 82$

$\angle DAB = \angle DAF + \angle CAB$

$\angle DAB = 82 + 85 = 167^\circ$

24) **هندسة إحداثيّة:** إذا كانت $A(-2, 5), B(2, 2), C(4, -4)$ رؤوسًا في $\square ABCD$، فأوجد إحداثيات الرأس D. وضّح تبريرك.

الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع متوازية

وبما أن ميل $\overline{BC}$ يساوي $\frac{-6}{2}$ فإن ميل $\overline{AD}$ يساوي $\frac{-6}{2}$ أيضاً.

ولتعيين الرأس D، ابدأ من الرأس A وتحرك إلى الأسفل 6 وحدات وإلى اليمين وحدتين.

إذن الرأس $D = (0, -1)$

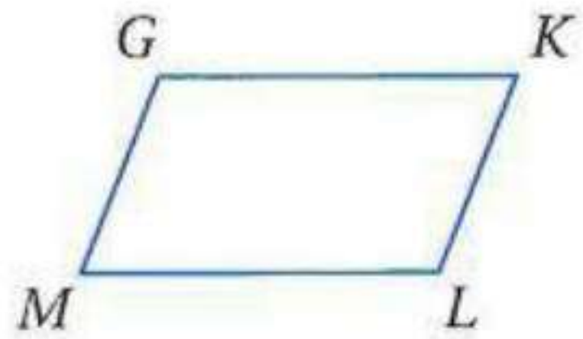
برهان: اكتب برهانًا من النوع المحدد في كل مما يأتي :

25) برهان ذو عمودين.

المعطيات: $GKLM$ متوازي أضلاع ،

المطلوب: $\angle G$ و $\angle K$ ، $\angle K$ و $\angle L$ ، $\angle L$ و $\angle M$ ، $\angle M$ و $\angle G$ زوايا متكاملة.

(النظرية 5.5)



البرهان:

العبارات (المبررات):

1) متوازي الأضلاع GKLM **(معطى)**

2) $\overline{GK} \parallel \overline{ML}$, $\overline{GM} \parallel \overline{KL}$ **(الأضلاع المتقابلة لمتوازي الأضلاع متوازية)**

3) $\bar{E}K$ و $\bar{E}G$ ، $\bar{E}K$ و $\bar{E}L$ ، $\bar{E}L$ و $\bar{E}M$ ، $\bar{E}M$ و $\bar{E}G$ زوايا متكاملة

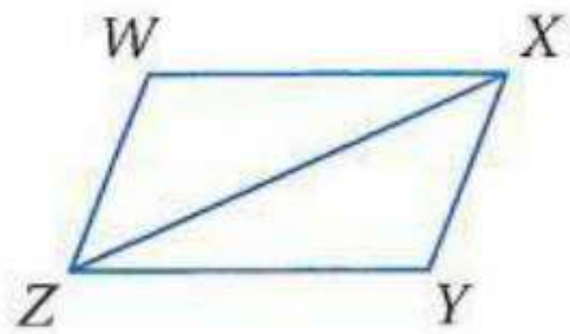
(كل زاويتين متحالفتين في متوازي الأضلاع متكاملتين)

26) برهان ذو عمودين.

المعطيات: $WXYZ$ متوازي أضلاع ،

المطلوب: $\triangle WXZ \cong \triangle YZX$

(النظرية 5.8)



البرهان:

العبارات (المبررات):

2) متوازي الأضلاع WXYZ (معطى)

$WX = ZY$, $XY = WZ$ ضلعين متناظرين متطابقين

$XZ = ZX$ خاصية الانعكاس

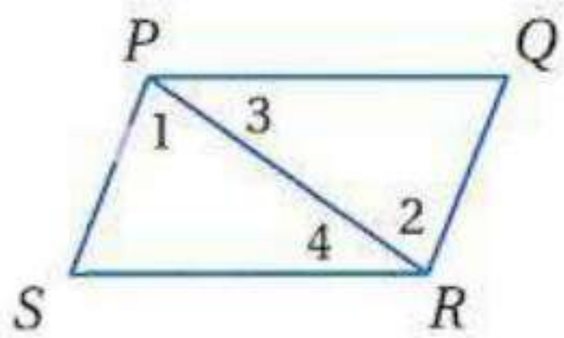
3) $\triangle XYZ \cong \triangle YZX$ (SSS)

27) برهان ذو عمودين.

المعطيات: $PQRS$ متوازي أضلاع.

المطلوب: $\overline{PQ} \cong \overline{RS}$, $\overline{QR} \cong \overline{SP}$

(النظرية 5.3)



البرهان:

العبارات (المبررات):

1) متوازي الأضلاع PQRS (معطى)

2) ارسم قطعة مستقيمة مساعدة PR (قطر PQRS) وسمِ الزوايا 1، 2، 3، 4 كما هو مبين.

3) $\overline{PQ} \parallel \overline{SR}$, $\overline{PS} \parallel \overline{QR}$ (الأضلاع المتقابلة لمتوازي الأضلاع متوازية)

4) $\angle 1 = \angle 2 =$ ، و $\angle 3 = \angle 4$ (نظرية الزوايا المتبادلة داخلياً)

5) $PR = RP$ (خاصية الانعكاس)

6) $\Delta QRP \cong \Delta SRP$ (SAS)

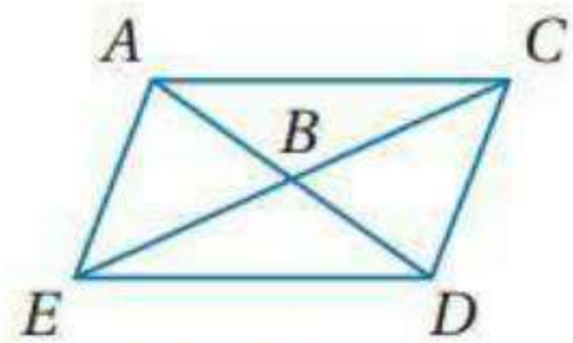
7) $\overline{PQ} \cong \overline{RS}$, $\overline{QR} \cong \overline{SP}$ (العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين متطابقة)

28) برهانًا حرًّا.

المعطيات: $ACDE$ متوازي أضلاع.

المطلوب: القطران $\overline{AC}$ وَ $\overline{AD}$ ينصف كلٌّ منهما الآخر.

(النظرية 5.7)



البرهان: معطى أن ACDE متوازي أضلاع.

بما أن الأضلاع المتقابلة لمتوازي الأضلاع متطابقة فإن $\overline{EA} \cong \overline{DC}$.

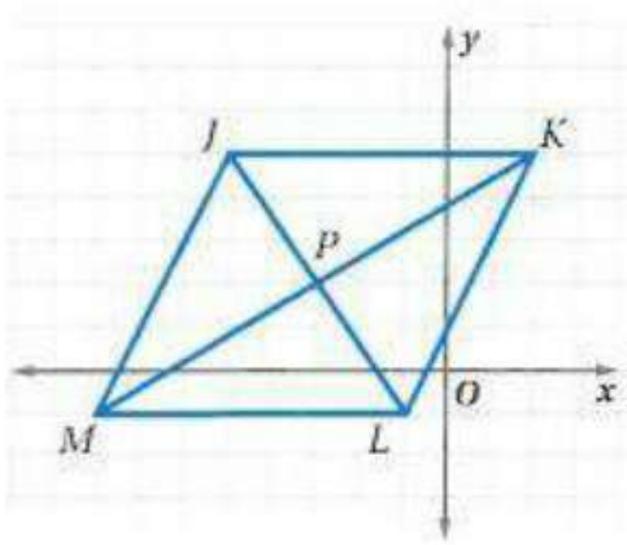
ومن تعريف متوازي الأضلاع $\overline{EA} \parallel \overline{DC}$

وتكون $\angle AEB \cong \angle DCB$ و $\angle CDB \cong \angle EAB$ لأن الزوايا المتبادلة داخلياً متطابقة.

لأن الزوايا المتبادلة داخلياً متطابقة. إذن $\Delta CBD \cong EBA$ حسب ASA.

و $\overline{BC} \cong \overline{EB}$ و $\overline{BD} \cong \overline{AB}$ لأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة ومن تعريف منصف القطعة المستقيمة فإن $\overline{EC}$ تنصف $\overline{AD}$ و $\overline{AD}$ تنصف $\overline{EC}$.

29) هندسة إحداثية: استعن بالشكل المجاور في كل مما يأتي:



a) استعمل صيغة المسافة بين نقطتين لتحديد ما إذا كان قطرا $JKLM$ ينصّف كل منهما الآخر. وضّح إجابتك.

$(-3,2)$ ، $(2,5)$

$PK = \sqrt{(-3-2)^2+(2-5)^2}$

$PK = \sqrt{34}$

$(-8,-1)$ ، $(-3,2)$

$MP = \sqrt{(-8+3)^2+(-1-2)^2}$

$MP = \sqrt{34}$

$MP = PK = \sqrt{34}$

$L,P = (-1,-1)$ ، $(-3,2)$

$LP = \sqrt{(-1+3)^2+(-1-2)^2}$

$LP = \sqrt{13}$

$J,P = (-5,5)$ ، $(-3,2)$

$JP = \sqrt{(-5+3)^2+(5-2)^2}$

$JP = \sqrt{13}$

$JP = LP = \sqrt{13}$

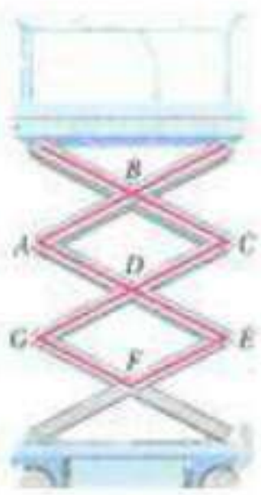
بما أن $JP = LP, MP = KP$ فإن القطرين ينصف كل منهما الآخر.

b) حدّد ما إذا كان قطرا $JKLM$ متطابقين. وضّح إجابتك.

لا؛ $JP + LP \neq MP + KP$

c) استعمل صيغة الميل لتحديد ما إذا كانت الأضلاع المتتالية متعامدة أم لا. وضّح إجابتك.

لا؛ ميل JK يساوي 0، وميل JM يساوي 2؛ أحدهما لا يساوي سالب معكوس الآخر.



30) **رافعات:** في الشكل المجاور: $DEFG$ ، $ABCD$ متوازيا أضلاع متطابقان.

a) حدد الزوايا التي تطابق $\angle A$. وضّح تبريرك.

الزوايا C, E, G؛ إجابة ممكنة: $\angle C \cong \angle A$ لأن الزوايا المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة.

$\angle E \cong \angle A$ لأن متوازيي الأضلاع متطابقان، $\angle G \cong \angle E$ لأن الزوايا المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة وتطابق $\angle A$ حسب خاصية التعدي.

b) حدد القطع المستقيمة التي تطابق $\overline{BC}$. وضّح تبريرك.

$\overline{AD}, \overline{DE}, \overline{GF}$

$\overline{AD} \cong \overline{BC}$ لأن الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة.

$\overline{DE} \cong \overline{BC}$ لأن متوازيي الأضلاع متطابقان

$\overline{GF} \cong \overline{DE}$ لأن الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة وتطابق $\overline{BC}$ حسب خاصية التعدي.

c) حدد الزوايا المكملة للزاوية C. وضّح تبريرك.

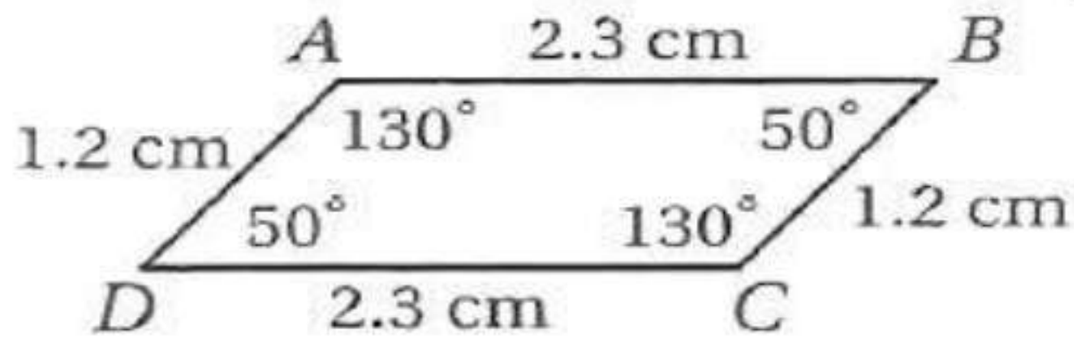
الزوايا $\angle EFG, \angle EDG, \angle ADC, \angle ABC$

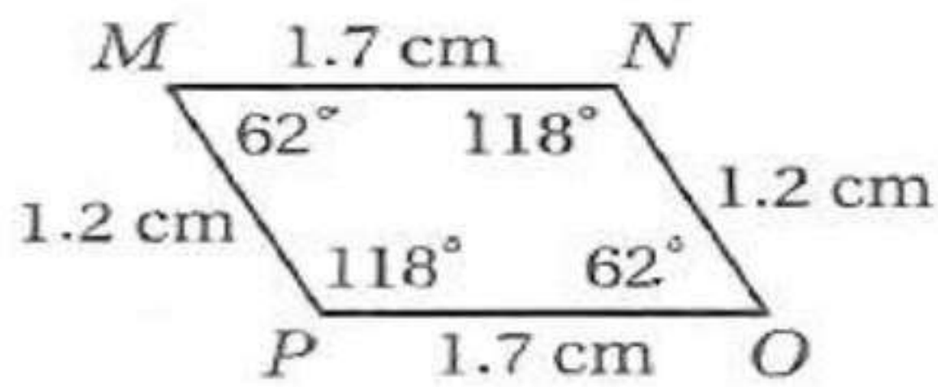
$\angle ABC$ و$\angle ADC$ مكملتان $\angle C$ ؛ لأن الزوايا المتحالفة في متوازي الأضلاع متكاملة.

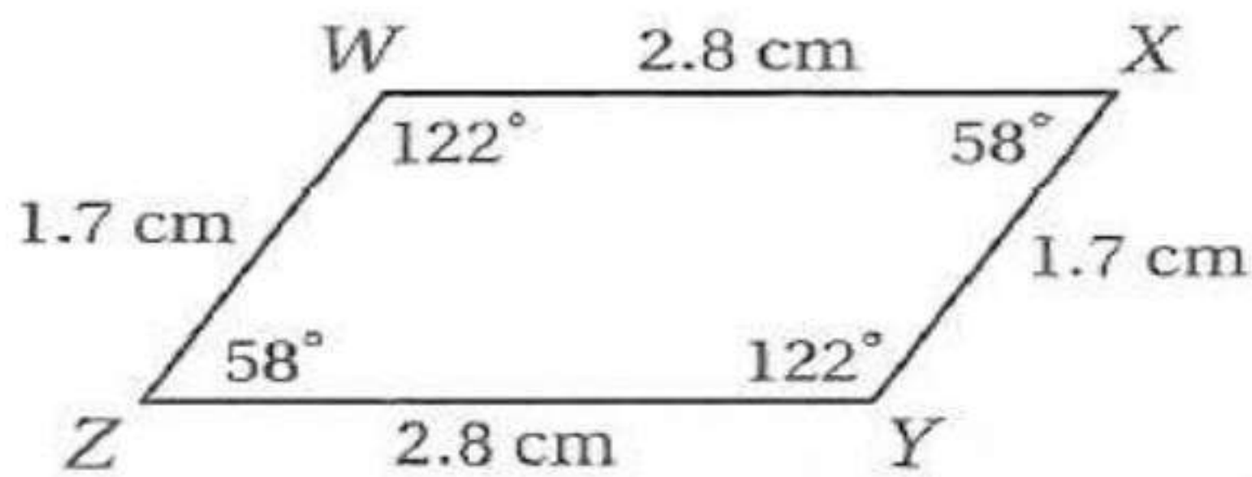
$\angle EDG$ مكملة $\angle C$ لأنها تطابق $\angle ADC$ حسب نظرية الزوايا المتقابلة بالرأس ومكملة $\angle C$ بالتعويض، $\angle EFG$ تطابق $\angle EDG$ لأن الزوايا المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة، ومكملة $\angle C$ بالتعويض.

31) **تمثيلات متعدّدة:** سوف تستقصي في هذه المسألة اختبارات لتمييز متوازي الأضلاع.

a) **هندسيًّا:** ارسم ثلاثة أزواج من القطع المستقيمة المتطابقة والمتوازية. صِل الأطراف لتكوِّن أشكالًا رباعية، وسمِّها $ABCD$, $MNOP$, $WXYZ$. ثم قِس أطوال الأضلاع وقياسات الزوايا لكل منها.







b) **جدوليًّا:** أكمل الجدول الآتي:

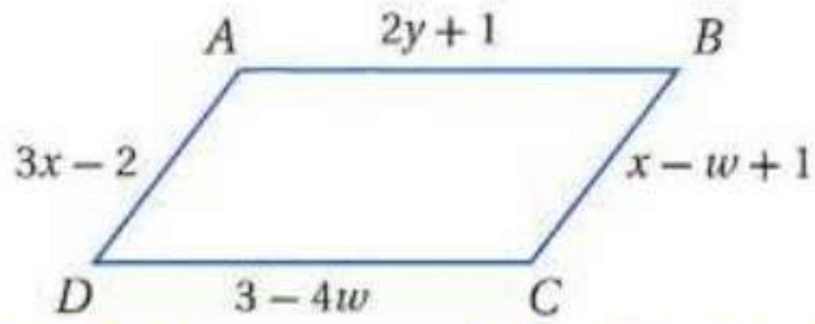
الشكل الرباعي	هل الأضلاع المتقابلة متطابقة؟	هل الزوايا المتقابلة متطابقة؟	هل الشكل متوازي أضلاع؟
ABCD	نعم	نعم	نعم
MNOP	نعم	نعم	نعم
WXYZ	نعم	نعم	نعم

c) **لفظيًّا:** ضع تخمينًا حول الأشكال الرباعيّة التي لها ضلعان متطابقان ومتوازيان.

إذا كان في الشكل الرباعي ضلعان متوازيان ومتطابقان فإن هذا الشكل متوازي أضلاع.

مسائل مهارات التفكير العليا:

32) تحدٍّ: إذا كان محيط $\square ABCD$ في الشكل أدناه يساوي 22 in ، فأوجد AB .



الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقان

$$AB = CD, \text{ and } AD = BC$$
$$2y+1 = 3-4w, \text{ and } 3x-2 = x-w+1$$
$$3x-2 = x-w+1$$
$$2x = 3-w$$
$$x = \frac{3-w}{2}$$

المحيط = مجموع أطوال الأضلاع

$$2y+1+x-w+1+3-4w+3x-2 = 22$$

حيث ان كل ضلعين متقابلين متساويين

$$2y+1 = 3-4w, \text{ and } 3x-2 = x-w+1$$

أي ان $2(3-4w+3x-2) = 22$

$$3x-4w+10$$

بالتعويض عن قيمة x

$$3\left(\frac{3-w}{2}\right)-4w = 10$$
$$9-3w-8w = 20$$
$$-11w = 11$$
$$w = -1$$

بالتعويض بقيمة w في اطوال الاضلاع

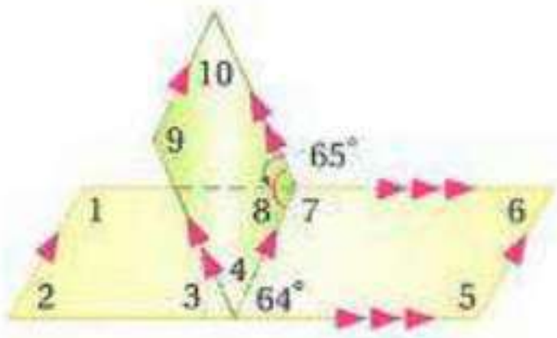
$$DC = 3-4(-1) = 7$$
$$AB = DC = 7\text{in}$$

33) **اكتب:** هل توجد نظرية $SSSS$ في تطابق متوازيات الأضلاع. برّر إجابتك.

لا توجد لأن كل ضلعين متقابلين متطابقين وليس جميع الأضلاع متطابقة

34) **إجابة مفتوحة:** أعط مثالًا مضادًّا يبيّن أن متوازيات الأضلاع ذات الأضلاع المتناظرة المتطابقة ليست متطابقة دائمًا.

35) **تبرير:** أوجد $m\angle 10$ ، $m\angle 1$ في الشكل المجاور. وضّح تبريرك.



بما أن الشكل متوازي أضلاع إذن:

$\angle 10$ مكملة للزاوية التي قياسها 65° لأن الزوايا المتحالفة في متوازي الأضلاع متكاملة.

$\angle 10 + 65^\circ = 180^\circ$

$\angle 10 = 180^\circ - 65^\circ$

$\angle 10 = 115^\circ$

$\angle 2 = 64^\circ$ **متساويتان بالتناظر**

$\angle 2$ مكملة للزاوية $\angle 1$ لأن الزوايا المتحالفة في متوازي الأضلاع متكاملة.

$\angle 1 + 64^\circ = 180^\circ$

$\angle 1 = 180^\circ - 64^\circ$

$\angle 1 = 116^\circ$

36) **اكتب:** لخّص خصائص أضلاع متوازي الأضلاع وزواياه وأقطاره.

في متوازي الأضلاع تكون الأضلاع المتقابلة متطابقة، والزوايا المتقابلة متطابقة، وتكون كل زاويتين متحالفتين متكاملتين.

وإذا كانت إحدى الزوايا قائمة تكون جميع زواياه قوائم. وقطرا متوازي الأضلاع ينصف كل منهما الآخر.

تدريب على الاختبار المعياري:

37) قياسا زاويتين متحالفتين في متوازي أضلاع هما: $9x - 18$, $3x + 42$. ما قياس الزاويتين؟

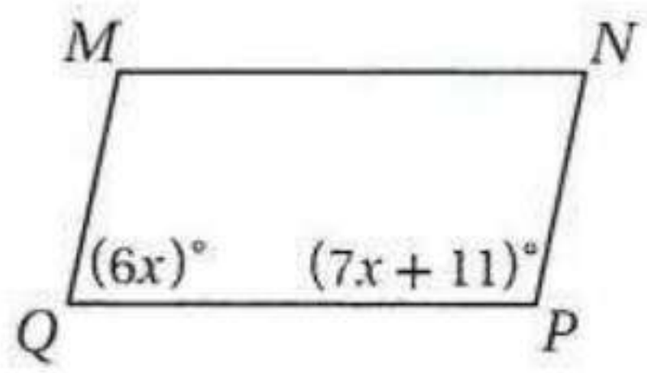
A 13, 167 **B** 58.5, 31.5

C 39, 141 **D** 81, 99

الاختيار **D**

$$3x + 42 + 9x - 18 = 180$$
$$12x + 24 = 180$$
$$12x = 180 - 24$$
$$12x = 156$$
$$x = 13$$
$$\angle 3x + 42 = 3 \times 13 + 42 = 81^\circ$$
$$\angle 9x - 18 = 9 \times 13 - 18 = 99^\circ$$

38) إجابة شبكية: إذا كان $MNPQ$ متوازي أضلاع، فما قيمة x؟



$$6x + 7x + 11 = 180$$
$$13x = 180 - 11$$
$$13x = 169$$
$$x = 13$$

مراجعة تراكمية

أوجد عدد أضلاع المضلع المنتظم المعطى قياس إحدى زواياه الداخلية في كل مما يأتي :

(الدرس 1-1)

39) 108°

$108n = (n-2).180$ (كتابة معادلة)

$108n = 180n - 360$ (خاصية التوزيع)

$-72n = -360$ (بطرح 180n من كلا الطرفين)

$n = 5$ (بقسمة كلا الطرفين على 72–)

إذن للمضلع 5 أضلاع

40) 140°

$140n = (n-2).180$ (كتابة معادلة)

$140n = 180n - 360$ (خاصية التوزيع)

$-40n = -360$ (بطرح 180n من كلا الطرفين)

$n = 9$ (بقسمة كلا الطرفين على 40–)

إذن للمضلع 9 أضلاع

41) 147.3°

$147.3n = (n-2).180$ (كتابة معادلة)

$147.3n = 180n - 360$ (خاصية التوزيع)

$-32.7n = -360$ (بطرح 180n من كلا الطرفين)

$n = 11$ (بقسمة كلا الطرفين على 32.7–)

إذن للمضلع 11 ضلع

42) 160°

$160n = (n-2).180$ (كتابة معادلة)

$160n = 180n - 360$ (خاصية التوزيع)

$-20n = -360$ (بطرح 180n من كلا الطرفين)

$n = 18$ (بقسمة كلا الطرفين على 20–)

إذن للمضلع 18 ضلع

43) 135°

$135n = (n-2).180$ (كتابة معادلة)

$135n = 180n - 360$ (خاصية التوزيع)

$-45n = -360$ (بطرح 180n من كلا الطرفين)

$n = 8$ (بقسمة كلا الطرفين على 45−)

إذن للمضلع 8 أضلاع

(44 176.4°

$176.4n = (n-2).180$ (كتابة معادلة)

$176.4n = 180n - 360$ (خاصية التوزيع)

$-3.6n = -360$ (بطرح 180n من كلا الطرفين)

$n = 100$ (بقسمة كلا الطرفين على 3.6−)

إذن للمضلع 100 ضلع

حدد ما إذا كان المستقيمان متوازيين أو متعامدين، أو غير ذلك فى كل مما يأتى: (الدرس 5-2)

(45 $y = -x + 6$

$x + y = 20$

$y = -x + 6$

$y = 20 - x$

معامل x في كل معادلة متساويين إذن المستقيمان متوازيين

(46 $y - 7x = 6$

$7y + x = 8$

$y = 6 + 7x$

$y = \frac{8}{7} - \frac{x}{7}$

حاصل ضرب معامل x في كل معادلة = 1− إذن المستقيمان متعامدين

(47 $3x + 4y = 12$

$6x + 2y = 6$

$4y = 12 - 3x \rightarrow y = 3 - \frac{3}{4}x$

$2y = 6 - 6x \rightarrow y = 3 - 3x$

معامل x في كل من المعادلتين غير متساويين إذا هما غير ذلك

(48 $2x + 5y = -1$

$10y = -4x - 20$

$$5y = -1 - 2x$$

$$\frac{10y}{2} = \frac{-4x}{2} - \frac{20}{2} \rightarrow 5y = -2x - 10$$

معامل x في كل معادلة متساويين إذن المستقيمان متوازيين

49) **زراعة:** عند زراعة الأشجار، تسند الشجرة بدعامة (على شكل عصا) ترتكز على الأرض وتربط في جذع الشجرة لتثبيتها. استعمل متباينة SAS لتفسير سبب فعالية هذه الطريقة في تثبيت الأشجار المزروعة رأسيًّا. (الدرس 6-4)

حسب نظرية المتباينة SAS، إذا بدأت الشجرة تميل، فإن إحدى زوايا المثلث المتكون من الشجرة وسطح الأرض والدعامة سوف تتغير، والضلع المقابل لتلك الزاوية سوف يتغير.
ولأن الدعامة ترتكز على الأرض ومثبتة في الشجرة فإنه لن يتغير طول أي ضلع من أضلاع المثلث. لذلك لا يمكن أن تتغير أي زاوية. وهذا يؤكد أن الشجرة ستبقى مستقيمة.

استعد للدرس اللاحق

رؤوس شكل رباعي هي $W(3, -1), X(4, 2), Y(-2, 3), Z(-3, 0)$. حدّد ما إذا كانت كل قطعة مستقيمة مما يأتي تمثل ضلعًا أو قطرًا في الشكل الرباعي، وأوجد ميل كل منها.

50) $\overline{YZ}$

ضلع؛ الميل $= \frac{3-0}{-2+3} = 3$

51) $\overline{YW}$

قطر؛ الميل $= \frac{3+1}{-2-3} = \frac{4}{-5}$

52) $\overline{ZW}$

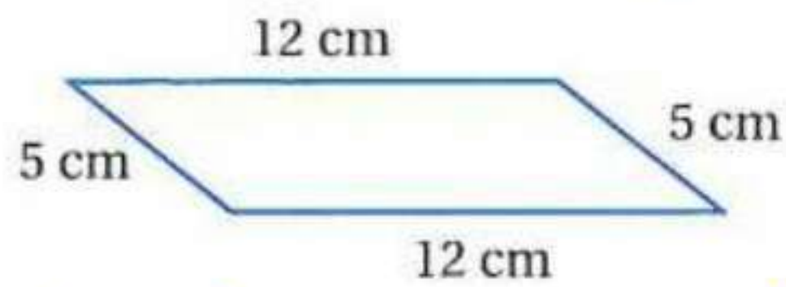
ضلع؛ الميل: $\frac{0+1}{-3-3} = \frac{-1}{6}$

تمييز متوازي الأضلاع

5-3

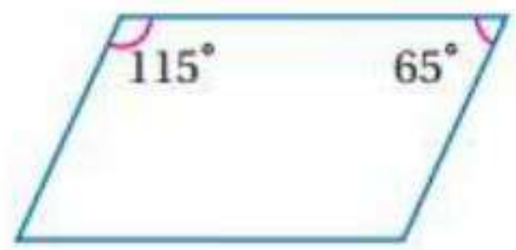
تحقق

(1A



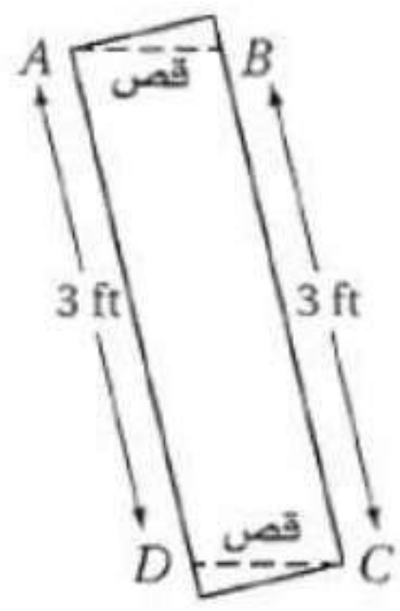
نعم؛ لأن كل ضلعين متقابلين فيه متطابقان.

(1B



لا؛ لأنه لا يحقق أي واحد من اختبارات متوازي الأضلاع.

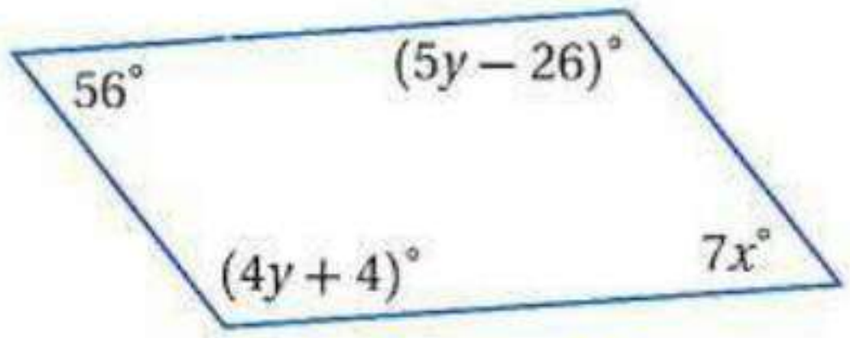
2) **لوحات:** عُد إلى فقرة "لماذا؟" بداية الدرس، وضّح لماذا يكون خطي القص أعلى وأسفل كل شريط متوازيين.



بما أن كل ضلعين متقابلين في الشكل الرباعي ABCD متطابقان فإن ABCD متوازي أضلاع إذن AB DC

أوجد قيمتي x, y في كل مما يأتي بحيث يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

(3A



كل زاويتين متقابلتين متطابقتين

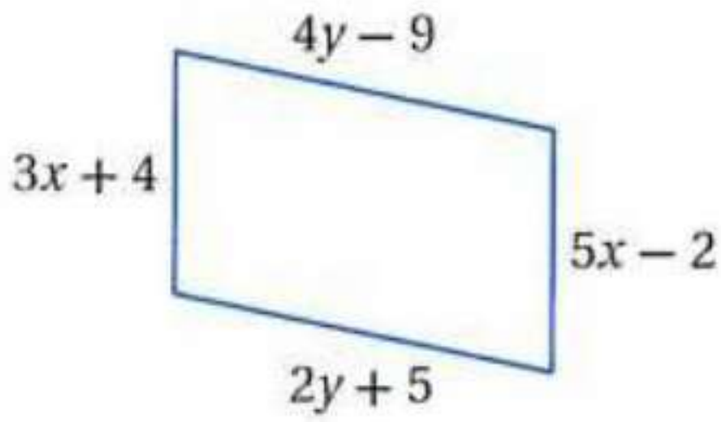
$7x = 56$

$x = 8$

$5y - 26 = 4y + 4$

$y = 4 + 26 = 30$

(3B



كل ضلعين متقابلين متطابقين

$4y - 9 = 2y + 5$

$4y - 2y = 5 + 9$

$2y = 14$

$y = 7$

$3x + 4 = 5x - 2$

$3x - 5x = -2 - 4$

$-2x = -6$

$x = 3$

حدّد ما إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع أم لا في كل مما يأتي. برّر إجابتك باستعمال الطريقة المحددة في السؤال :

4A) $A(3, 3), B(8, 2), C(6, -1), D(1, 0)$ ، صيغة المسافة

$$A,B = (3,3),(8,2)$$

$$AB = \sqrt{(3-2)^2 + (3-8)^2}$$

$$AB = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}$$

$$C,D = (6,-1),(1,0)$$

$$CD = \sqrt{(-1-0)^2 + (6-1)^2}$$

$$CD = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}$$

$$B,C = (8,2),(6,-1)$$

$$BC = \sqrt{(2+1)^2 + (8-6)^2}$$

$$BC = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

$$A,D = (3,3),(1,0)$$

$$AD = \sqrt{(3-0)^2 + (3-1)^2}$$

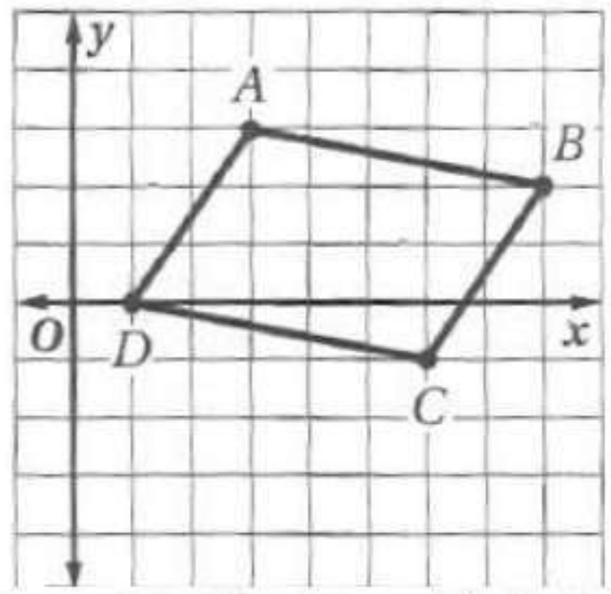
$$AD = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

إذا كانت الأضلاع المتقابلة لشكل رباعي متطابقة فإنه متوازي أضلاع.

$AB = \sqrt{26}$ ؛ $DC = \sqrt{26}$ ؛ $BC = \sqrt{13}$ ؛ $AD = \sqrt{13}$.

حيث أن المسافة بين أي نقطتين = $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

بما أن $AB = DC$ و $AD = BC$ فإن $AB = DC$ و $AD = BC$ لذلك فالشكل الرباعي ABCD متوازي أضلاع حسب النظرية 5.9.



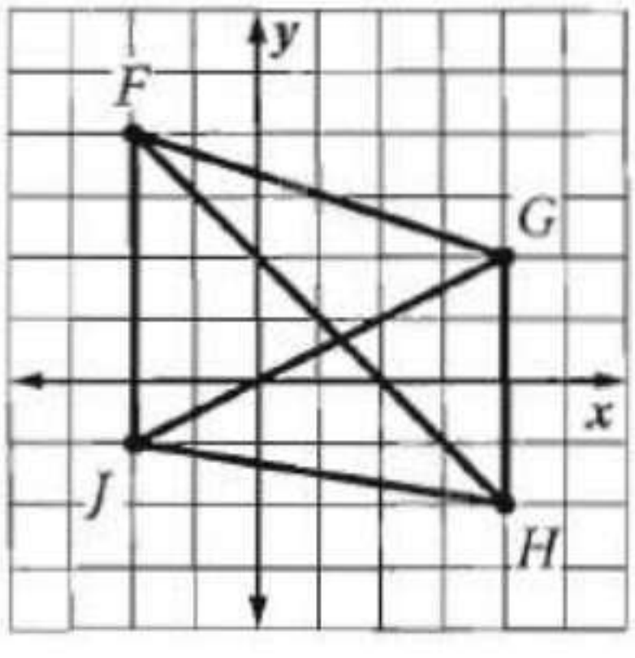
4B) $F(-2, 4), G(4, 2), H(4, -2), J(-2, -1)$ ، صيغة نقطة المنتصف

إذا كان قطرا شكل رباعي ينصف كل منهما الآخر، فإنه متوازي أضلاع، وينصف قطرا شكل رباعي كل منهما الآخر إذا كانت نقطتا منتصفيهما متطابقتين.

نقطة منتصف القطر $\overline{FH}$ هي $(1, 1)$. ونقطة منتصف القطر $\overline{GJ}$ هي $(1,0.5)$.

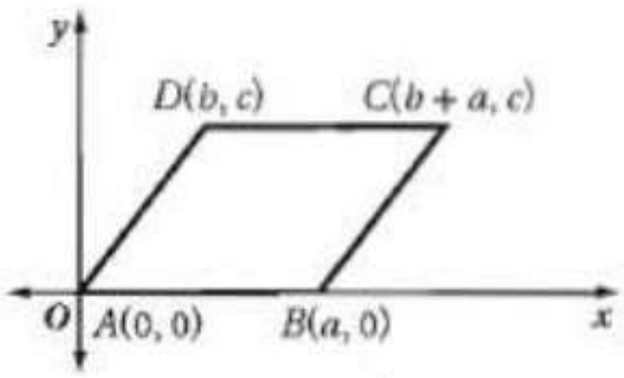
حيث أن نقطة المنتصف $= \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

وبما أن نقطتي منتصفي القطرين $\overline{FH}$ و $\overline{GJ}$ ليس لهما الإحداثيات نفسها، فإن الشكل الرباعي FGHJ ليس متوازي أضلاع.



5) اكتب برهانًا إحداثيًّا للعبارة الآتية: إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع فإنّ أضلاعه المتقابلة متطابقة.

المعطيات: ABCD متوازي أضلاع.
المطلوب: AB = CD, AD = BC



برهان إحداثي:

$$AB = \sqrt{((a-0)^2 + (0-0)^2)} = a$$

$$DC = \sqrt{((b+a-b)^2 + (c-c)^2)} = a$$

$$AD = \sqrt{((c-0)^2 + (b-0)^2)} = \sqrt{(c^2 + b^2)}$$

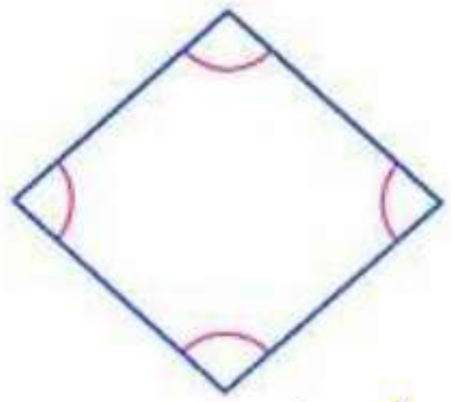
$$BC = \sqrt{((a-(b+a))^2 + (c-0)^2} = \sqrt{(c^2 + b^2)}$$

بما أن AB = DC وAD = BC، فإن AB = DC وAD = BC.

تأكد:

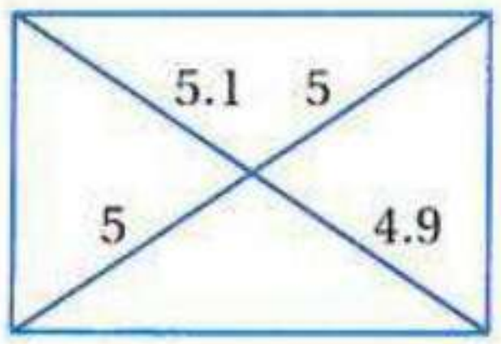
المثال 1 حدّد ما إذا كان شكل رباعي فيما يأتي متوازي أضلاع أم لا. برّر إجابتك.

1)



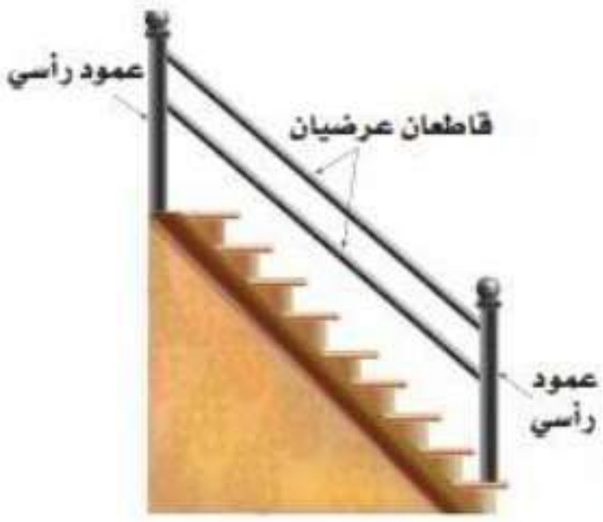
نعم؛ لأن كل زاويتين متقابلتين متطابقتان.

2)



لا؛ لأنه لا يحقق أي شرط من شروط متوازي الأضلاع.

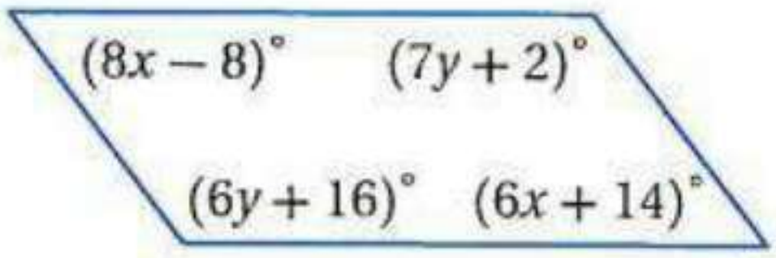
3) **نجارة:** صنع نجار دربزينًا لدَرَجٍ يتكوّن من عمودين رأسيين؛ الأول مثبت فوق الدرجة الأولى، والثاني مثبت فوق الدرجة الأخيرة، ويصل بينهما قاطعان خشبيان كما في الشكل المجاور. كيف يمكن للنجار التحقق من أن القاطعين الخشبيين العرضيين متوازيان، وذلك بأقل عدد من مرات القياس، إذا علمت بأن الدرجتين الأولى والأخيرة مستويتان مع الأرض.



إذا كان القاطعان الخشبيان متطابقان فإن الشكل متوازي أضلاع وبالتالي يكون القاطعان الخشبيين متوازيان.

جبر: أوجد قيمتي x, y في كل مما يأتي بحيث يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

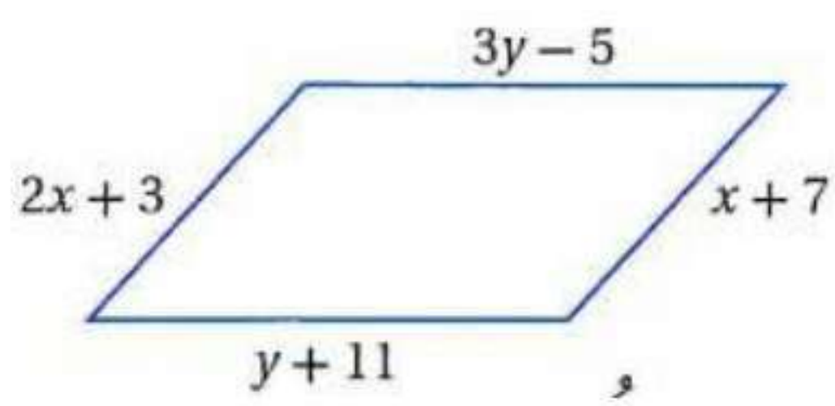
4)



$$8x - 8 = 6x + 14$$
$$8x - 6x = 14 + 8$$
$$2x = 22$$

$$x = 11$$
$$7y + 2 = 6y + 16$$
$$7y - 6y = 16 - 2$$
$$y = 14$$

(5



و

$$x + 7 = 2x + 3$$
$$2x - x = 7 - 3$$
$$x = 4$$

$$3y - 5 = y + 11$$
$$3y - y = 11 + 5$$
$$2y = 16$$
$$y = 8$$

هندسة إحداثيّة: مثل في المستوى الإحداثي الشكل الرباعي الذي أعطيت إحداثيات رؤوسه فيما يأتي. وحدّد ما إذا كان متوازي أضلاع أم لا، برّر إجابتك باستعمال

6) $A(-2, 4), B(5, 4), C(8, -1), D(-1, -1)$ ، صيغة الميل.

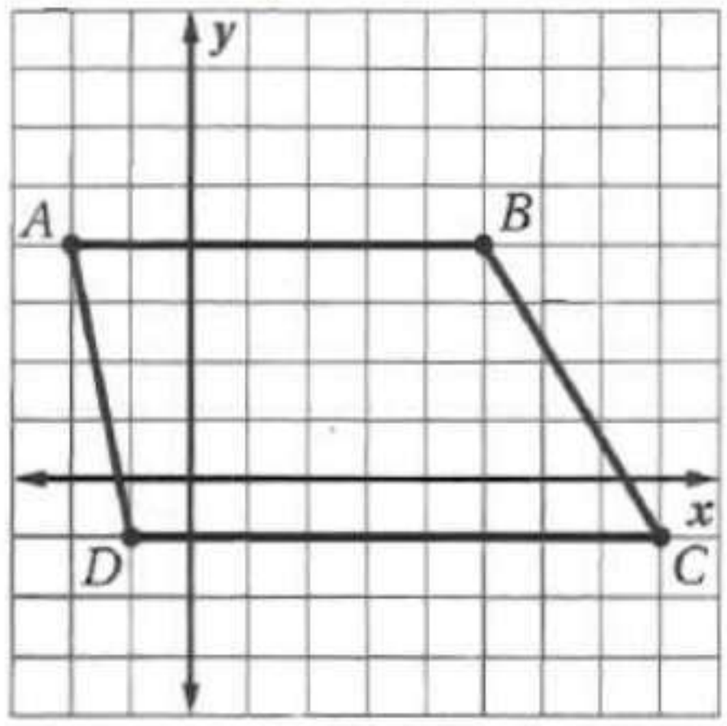
ميل $\overline{AB}$: $\frac{-7}{0} = \frac{-2-5}{4-4}$

ميل $\overline{BC}$: $\frac{3}{5} = \frac{5-8}{4+1}$

ميل $\overline{CD}$: $\frac{8+1}{0} = \frac{9}{5}$

ميل $\overline{AD}$: $\frac{-2+1}{4+1} = \frac{-1}{5}$

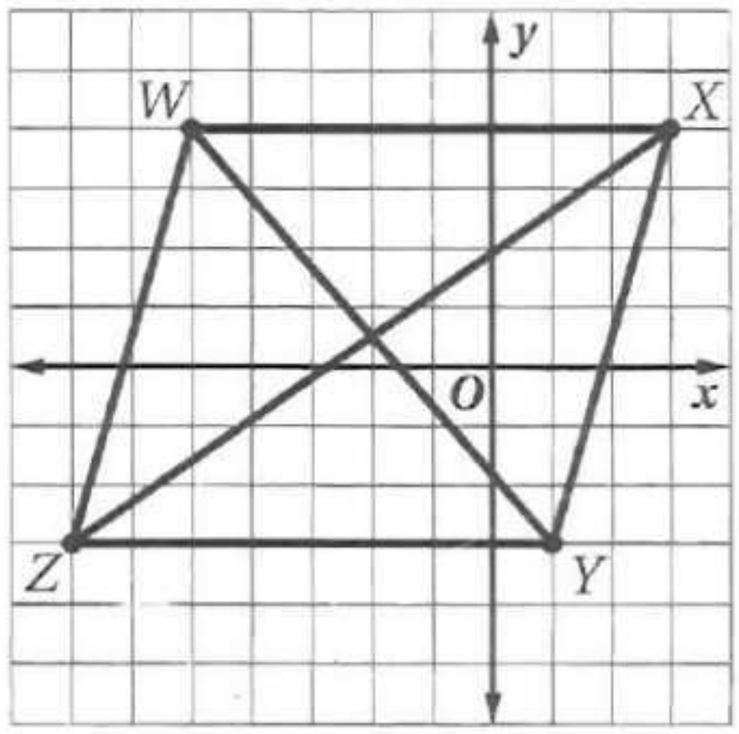
بما أن ميل $\overline{BC} \neq$ ميل $\overline{AD}$ ، فإن ABCD ليس متوازي أضلاع.



7) $W(-5, 4), X(3, 4), Y(1, -3), Z(-7, -3)$ ، صيغة نقطة المنتصف.

نعم؛ نقطة منتصف كل من $\overline{WY}$ و $\overline{XZ}$ هي $\left(-2, \frac{1}{2}\right)$

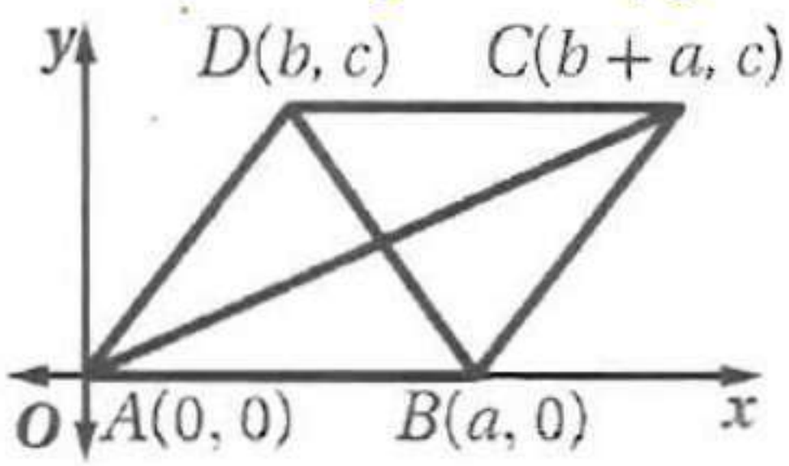
وبما أن القطرين ينصف كل منهما الآخر، فإن الشكل WXYZ متوازي أضلاع.



8) اكتب برهانًا إحداثيًّا للعبارة الآتية: إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع، فإنّ قطريه ينصّف كل منهما الآخر.

المعطيات: ABCD متوازي أضلاع.

المطلوب: $\overline{AC}$ و $\overline{DB}$ ينصف كل منهما الآخر.



البرهان:

نقطة منتصف $\overline{AC}$

$$\left(\frac{a+b}{2},\frac{c}{2}\right)=\left(\frac{0+(a+b)}{2},\frac{0+c}{2}\right)$$

ونقطة منتصف $\overline{DB}$

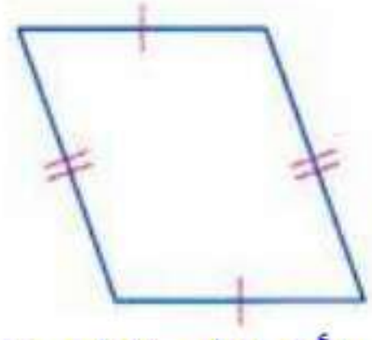
$$\left(\frac{a+b}{2},\frac{c}{2}\right)=\left(\frac{a+b}{2},\frac{0+c}{2}\right)$$

إذن، $\overline{AC}$ و $\overline{DB}$ ينصف كل منهما الآخر.

تدرب وحل المسائل:

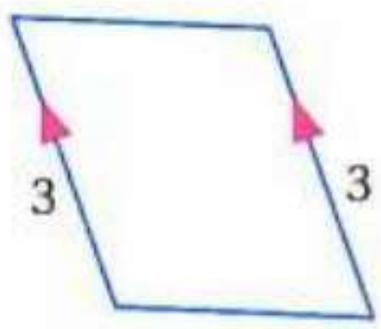
حدّد ما إذا كان كل شكل رباعي فيما يأتي متوازي أضلاع أم لا. برّر إجابتك.

9)



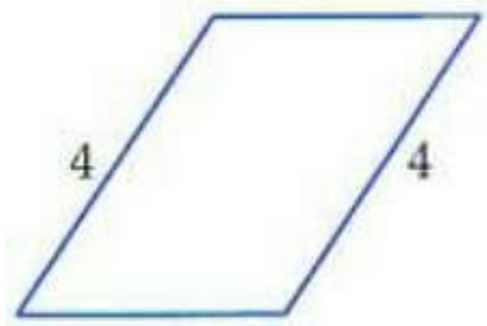
نعم؛ لأن كل ضلعين متقابلين متطابقان.

10)



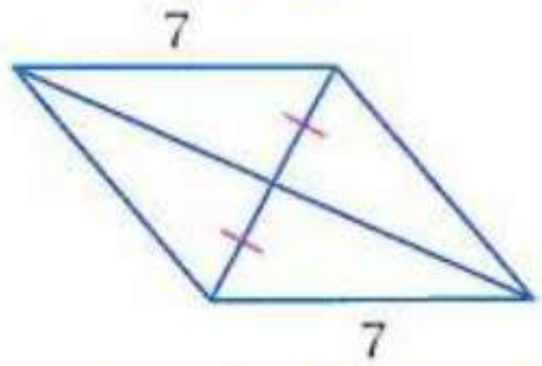
نعم؛ لأن فيه ضلعين متقابلين متوازيان ومتطابقان.

11)



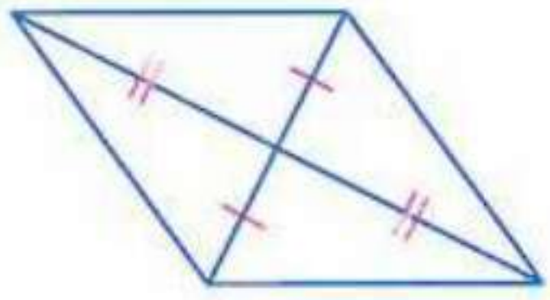
لا؛ لأنه لا يحقق أي واحد من اختبارات متوازي الأضلاع.

12)



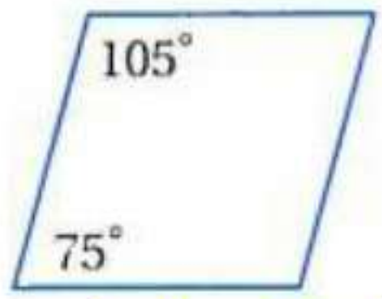
)لا؛ لأنه لا يحقق أي واحد من اختبارات متوازي الأضلاع.

13)



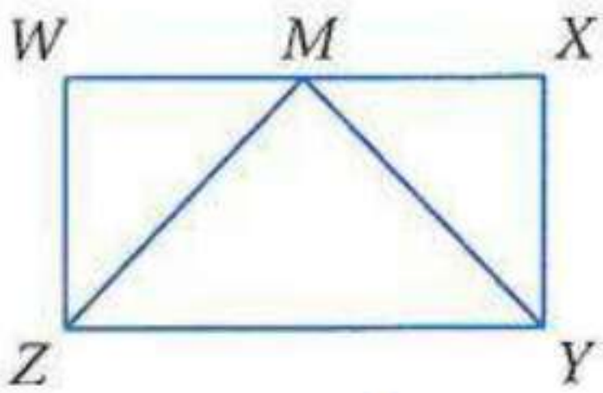
نعم؛ لأن قطرية ينصف كل منهما الآخر.

14)



لا؛ لأنه لا يحقق أي واحد من اختبارات متوازي الأضلاع.

15) **برهان:** إذا كان $WXYZ$ متوازي أضلاع، حيث $\angle W \cong \angle X$، M نقطة منتصف $\overline{WX}$ ، فاكتب برهانًا حرًّا لإثبات أن $\triangle ZMY$ متطابق الضلعين.



المعطيات: WXYZ متوازي أضلاع فيه $\angle W \cong \angle X$ و M نقطة منتصف $\overline{WX}$.

المطلوب: $\triangle ZMY$ متطابق الضلعين.

البرهان: بما أن WXYZ متوازي أضلاع، فإن $\overline{WZ} \cong \overline{XY}$.

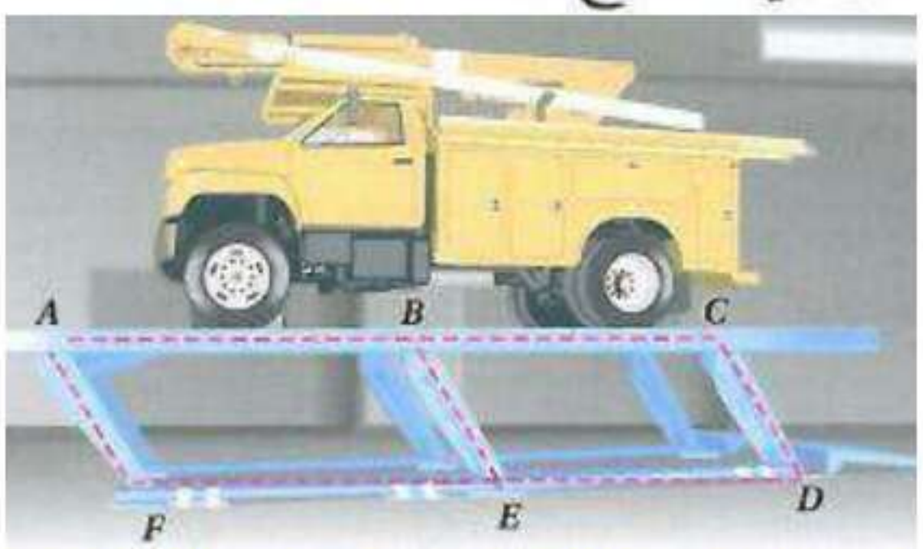
وبما أن M نقطة منتصف $\overline{WX}$، فإن $WM = MX$.

ومعطى أن $\angle W \cong \angle X$ ، لذلك وحسب SAS فإن $\triangle ZWM \cong \triangle YXM$

ولأن العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين متطابقة، فإن $\overline{ZM} \cong \overline{YM}$.

إذن ZMY مثلث متطابق الضلعين بحسب تعريف المثلث متطابق الضلعين.

16) **رافعات:** تستعمل رافعات متوازيات الأضلاع لرفع المركبات الثقيلة عند صيانتها. ففي الشكل أدناه: $ABEF$, $BCDE$ متوازيا أضلاع. اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات أن $ACDF$ متوازي أضلاع أيضًا.



المعطيات: ABEF متوازي أضلاع؛ BCDE متوازي أضلاع.

المطلوب: ACDF متوازي أضلاع.

البرهان: العبارات (المبررات):

1) ABEF متوازي أضلاع؛ BCDE متوازي أضلاع (معطيات)

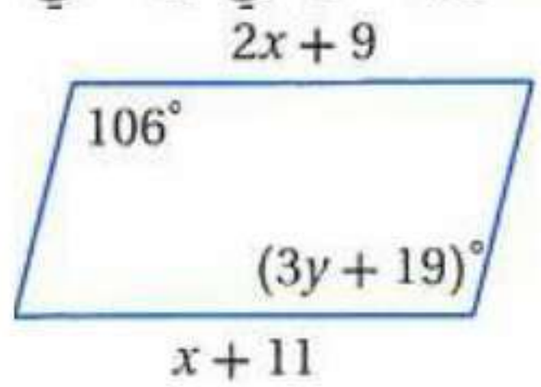
2) $\overline{AF} \parallel \overline{BE}$, $\overline{BE} \parallel \overline{CD}$, $AF = BE$, $BE = CD$ (تعريف متوازي الأضلاع)

3) $\overline{AF} \parallel \overline{CD}$, $AF = CD$ (خاصية التعدي)

4) ACDF متوازي أضلاع. (إذا كان ضلعان في شكل رباعي متطابقين ومتوازيين فإنه متوازي أضلاع)

جبر: أوجد قيمتي x, y في كل مما يأتي بحيث يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

17)



$2x + 9 = x + 11$

$2x - x = 11 - 9$

$x = 2$

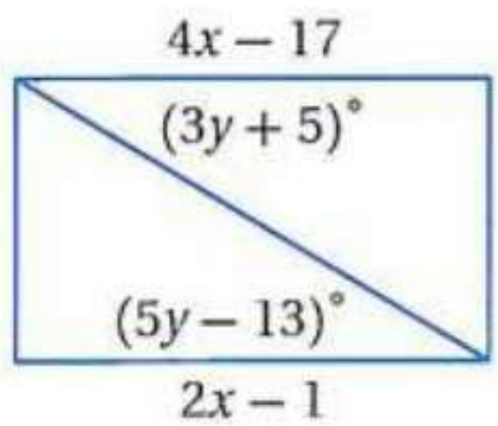
$106 = 3y + 19$

$3y = 106 - 19$

$3y = 87$

$y = 29$

18)



$4x - 17 = 2x - 1$

$4x - 2x = 17 - 1$

$2x = 16$

$x = 8$

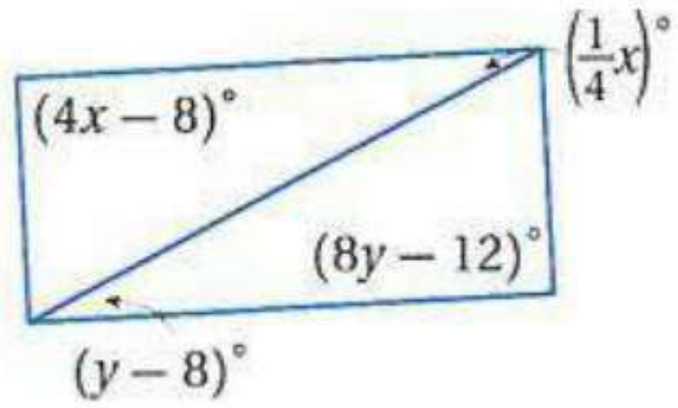
$3y + 5 = 5y - 13$

$3y - 5y = -13 - 5$

$-2y = -18$

$y = 9$

(19



$4x - 8 = 8y - 12 \quad \div 4$

$x - 2 = 2y - 3$

$x = 2y - 3 + 2$

$x = 2y - 1$

$\frac{1}{4}x = y - 8$

$\frac{1}{4}(2y - 1) = y - 8$

$\frac{1}{2}y - \frac{1}{4} = y - 8 \quad \times 4$

$2y - 1 = 4y - 32$

$2y - 4y = -32 + 1$

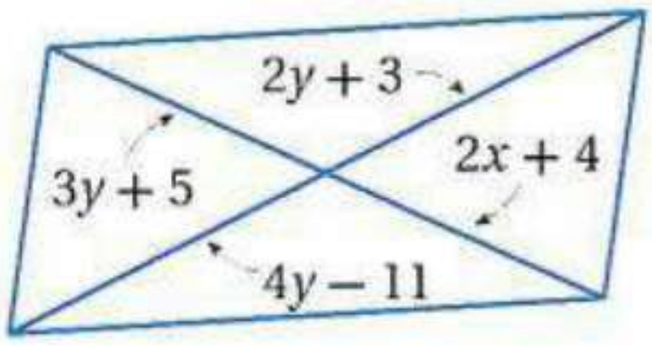
$-2y = -31$

$y = 15.5$

$\because x = 2y - 1$

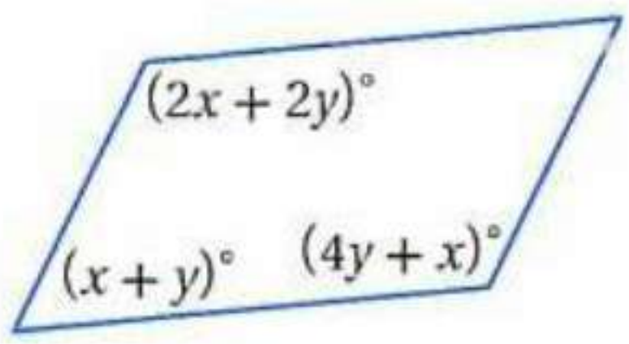
$\therefore x = 2 \times 15.5 - 1 = 30$

(20



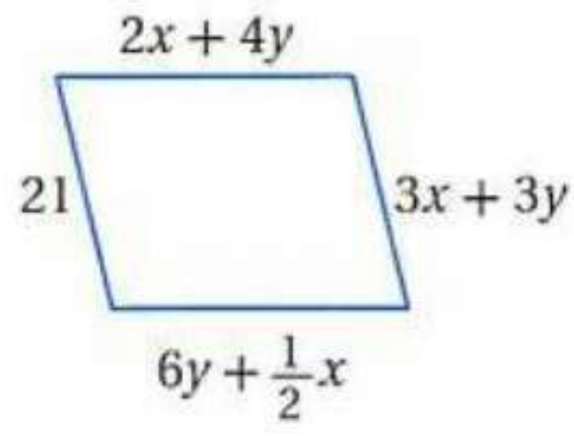
$$2y + 3 = 4y - 11$$
$$2y - 4y = -11 - 3$$
$$-2y = -14$$
$$y = 7$$
$$2x + 4 = 3y + 5$$
$$2x + 4 = 21 + 5$$
$$2x = 26 - 4$$
$$2x = 22$$
$$x = 11$$

(21



$$2x + 2y = 4y + x$$
$$x = 4y - 2y$$
$$x = 2y$$
$$(x + y) + (4y + x) = 180$$
$$(2y + y) + (4y + 2y) = 180$$
$$9y = 180$$
$$y = 20$$
$$x = 40$$

(22



$$3x + 3y = 21$$
$$x + y = 7$$
$$x = 7 - y$$
$$2x + 4y = 6y + \frac{1}{2}x$$
$$2(7 - y) + 4y = 6y + \frac{1}{2}(7 - y)$$
$$14 - 2y + 4y = 6y + \frac{7}{2} - \frac{1}{2}y$$
$$14 + 2y = 5.5y + \frac{7}{2}$$
$$2y - 5.5y = \frac{7}{2} - 14$$
$$-3.5y = -10.5$$
$$y = 3$$
$$x = 7 - y = 7 - 3 = 4$$

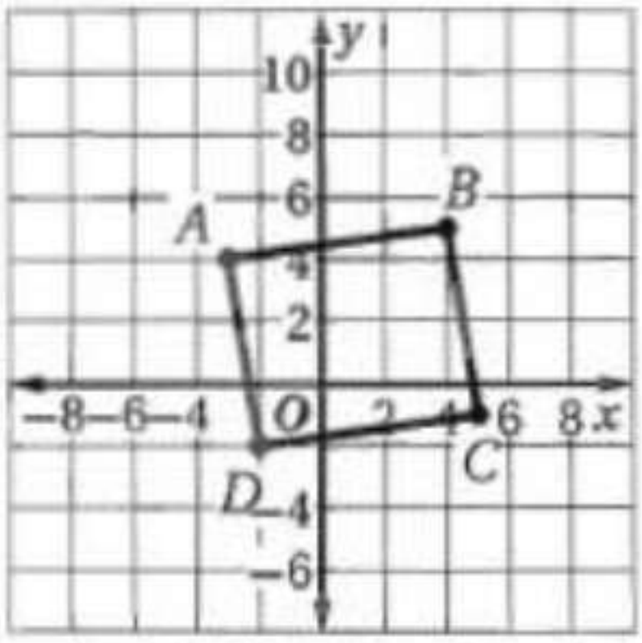
هندسة إحداثيّة: مثّل في المستوى الإحداثي الشكل الرباعي الذي أُعطيت إحداثيات رؤوسه فيما يأتي. وحدّد ما إذا كان متوازي أضلاع أم لا، برّر إجابتك باستعمال الطريقة المحدّدة في السؤال.

23) $A(-3, 4)$، $B(4, 5)$، $C(5, -1)$، $D(-2, -2)$، صيغة الميل.

نعم؛ ميل $\overline{AB}$ يساوي ميل $\overline{CD}$ ويساوي $\frac{1}{7}$ لذلك $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.

حيث أن الميل $= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

وبما أن ميل $\overline{BC}$ يساوي ميل $\overline{AD}$ ويساوي 6 –
فإن $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ولأن كل ضلعين متقابلين متوازيان فإن ABCD متوازي أضلاع.



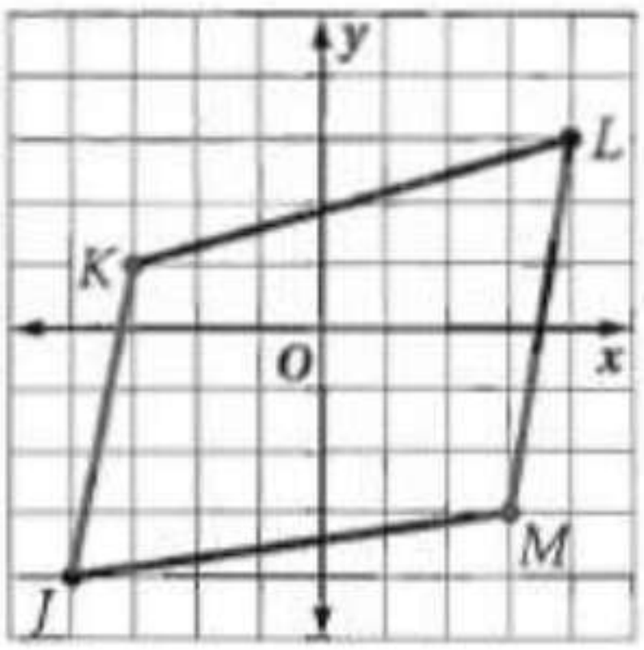
24) $J(-4, -4)$، $K(-3, 1)$، $L(4, 3)$، $M(3, -3)$ ، صيغة المسافة بين نقطتين.

لا؛ يجب أن يكون كل ضلعين متقابلين متطابقين.
والمسافة بين K وL تساوي $\sqrt{53}$.والمسافة بين L وM تساوي $\sqrt{37}$.

والمسافة بين M وJ تساوي $\sqrt{50}$. والمسافة بين J وK تساوي $\sqrt{26}$.

حيث أن المسافة بين أي نقطتين = $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

وبما أن كل ضلعين متقابلين ليسا متطابقين، فإن JKLM ليس متوازي أضلاع.



25) $V(3, 5)$، $W(1, -2)$، $X(-6, 2)$، $Y(-4, 7)$ ، صيغتا الميل والمسافة بين نقطتين.

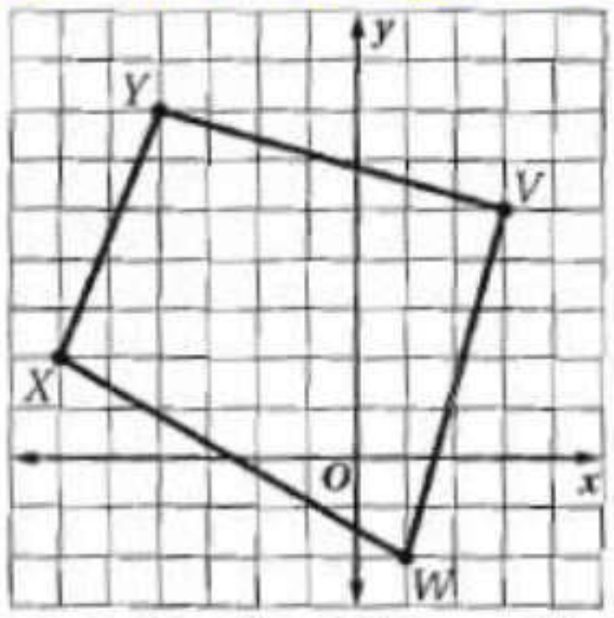
ميل $\overline{YX}$: $\frac{-4+6}{7-2} = \frac{2}{5}$

ميل $\overline{XW}$: $\frac{-6-1}{2+2} = \frac{-7}{4}$

ميل $\overline{WV}$: $\frac{1-3}{-2-5} = \frac{-2}{-7} = \frac{2}{7}$

ميل $\overline{YV}$: $\frac{-4-3}{7-5} = \frac{-7}{2}$

ميل $\overline{YV}$ يساوي $\frac{-7}{2}$، وميل $\overline{XW}$ يساوي $\frac{-7}{4}$، وميل $\overline{YX}$ يساوي $\frac{2}{5}$، وميل $\overline{VW}$ يساوي $\frac{2}{7}$. وبما أن ميل $\overline{YV}$ لا يساوي ميل $\overline{XW}$، وميل $\overline{YX}$ لا يساوي ميل $\overline{VW}$ فإن VWXY ليس متوازي أضلاع.



26) $Q(2, -4)$، $R(4, 3)$، $S(-3, 6)$، $T(-5, -1)$ ، صيغتا الميل والمسافة بين نقطتين.

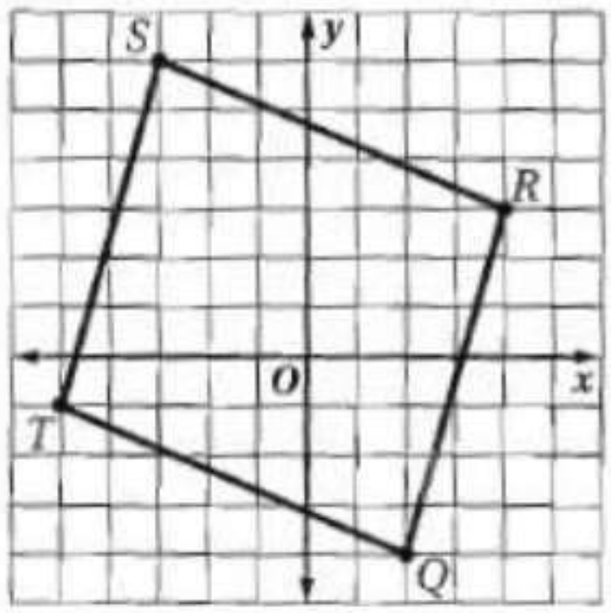
ميل $\overline{TS}$: $\frac{-5+3}{-1-6} = \frac{-2}{-7} = \frac{2}{7}$

ميل $\overline{RQ}$: $\frac{4-2}{3+4} = \frac{2}{7}$

يجب أن يكون فيه ضلعان متقابلان متوازيين ومتطابقين. وبما أن ميل $\overline{RQ}$ يساوي ميل $\overline{TS}$ ويساوي $\frac{2}{7}$، فإن $\overline{QR} \parallel \overline{ST}$ ولأن $QR = ST$

$= \sqrt{53}$

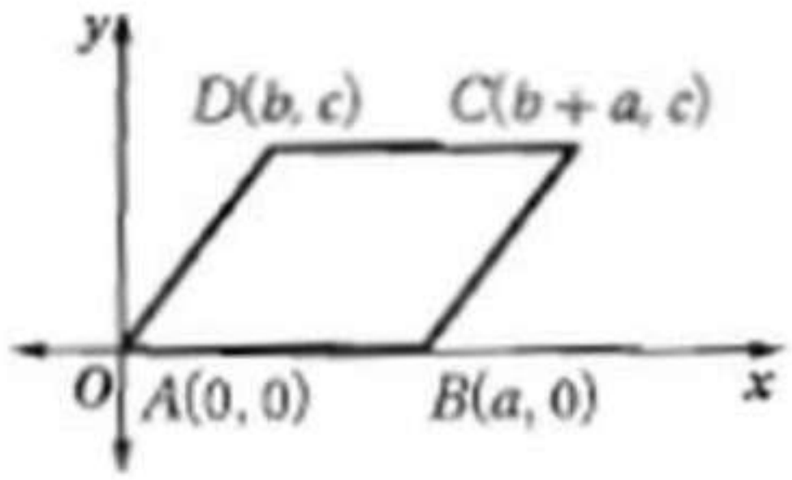
فإن $\overline{QR} \cong \overline{TS}$ إذن، QRST متوازي أضلاع.



27) اكتب برهانًا إحداثيًّا للعبارة: إذا كان كل ضلعين متقابلين في الشكل الرباعي متطابقين، فإنه متوازي أضلاع.

المعطيات: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $\overline{AD} \cong \overline{BC}$

المطلوب: متوازي أضلاع ABCD .



البرهان:

ميل $\overline{AD}$: $m = \frac{c-0}{b-0} = \frac{c}{b}$

ميل $\overline{AB}$: $m = \frac{0-0}{a-0} = 0$

ميل $\overline{BC}$: $m = \frac{c-0}{b+a-a} = \frac{c}{b}$

ميل $\overline{DC}$: $m = \frac{c - c}{b + a - b} = 0$

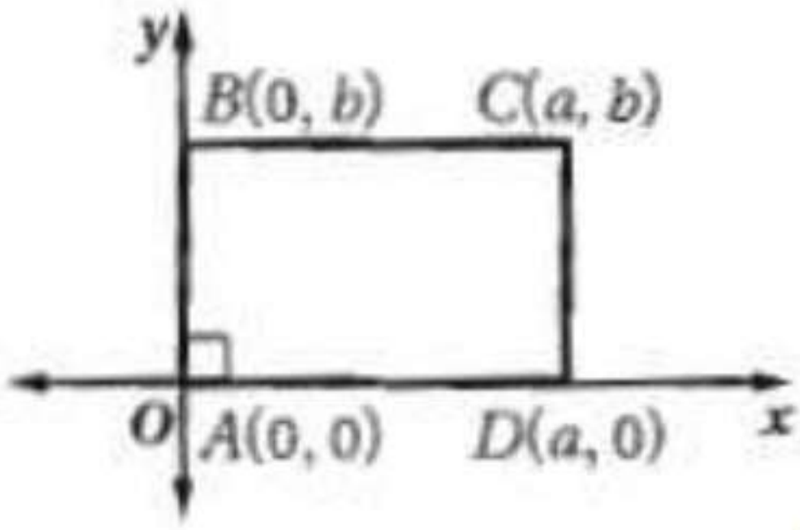
لذلك $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ و $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.

إذن وحسب تعريف متوازي الأضلاع يكون ABCD متوازي أضلاع.

28) اكتب برهانًا إحداثيًا للعبارة: إذا كانت إحدى زوايا متوازي الأضلاع قائمة، فإنّ جميع زواياه قوائم.

المعطيات: ABCD متوازي أضلاع، الزاوية A زاوية قائمة.

المطلوب: الزوايا B, C, D قوائم.



البرهان:

ميل $\overline{BC}$: $m = \frac{b - b}{a - 0} = 0$، ميل $\overline{CD}$: غير معرف

ميل $\overline{AD}$: $m = \frac{0 - 0}{a - 0} = 0$، ميل $\overline{AB}$: غير معرف

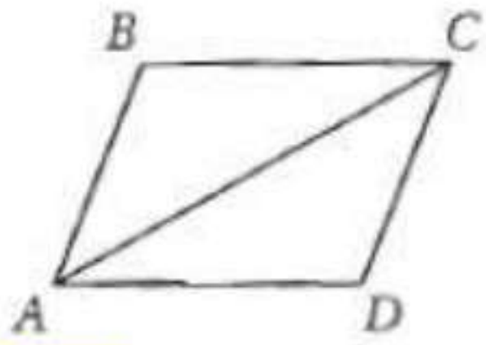
لذلك $\overline{AB} \perp \overline{BC}$, $\overline{CD} \perp \overline{AD}$, $\overline{BC} \perp \overline{CD}$.

إذن، الزوايا D, C, B قوائم.

29) **برهان:** اكتب برهانًا حرًّا للنظرية 1.10.

المعطيات: $\angle A \cong \angle C$, $\angle B \cong \angle D$

المطلوب: ABCD متوازي أضلاع.



البرهان: ارسم $\overline{AC}$ لتشكل مثلثين.

وبما أن مجموع قياسات زوايا أي مثلث يساوي 180° فإن مجموع قياسات زوايا المثلثين يساوي 360°.

إذن $m\angle A + m\angle B + m\angle C + m\angle D = 360^\circ$

وبما أن $\angle A \cong \angle C$ و $\angle B \cong \angle D$ فإن $m\angle A = m\angle C$

و $m\angle B = m\angle D$.

وبالتعويض $m\angle A + m\angle A + m\angle B + m\angle B = 360^\circ$

إذن $2\,(m\angle A) + 2\,(m\angle B) = 360^\circ$

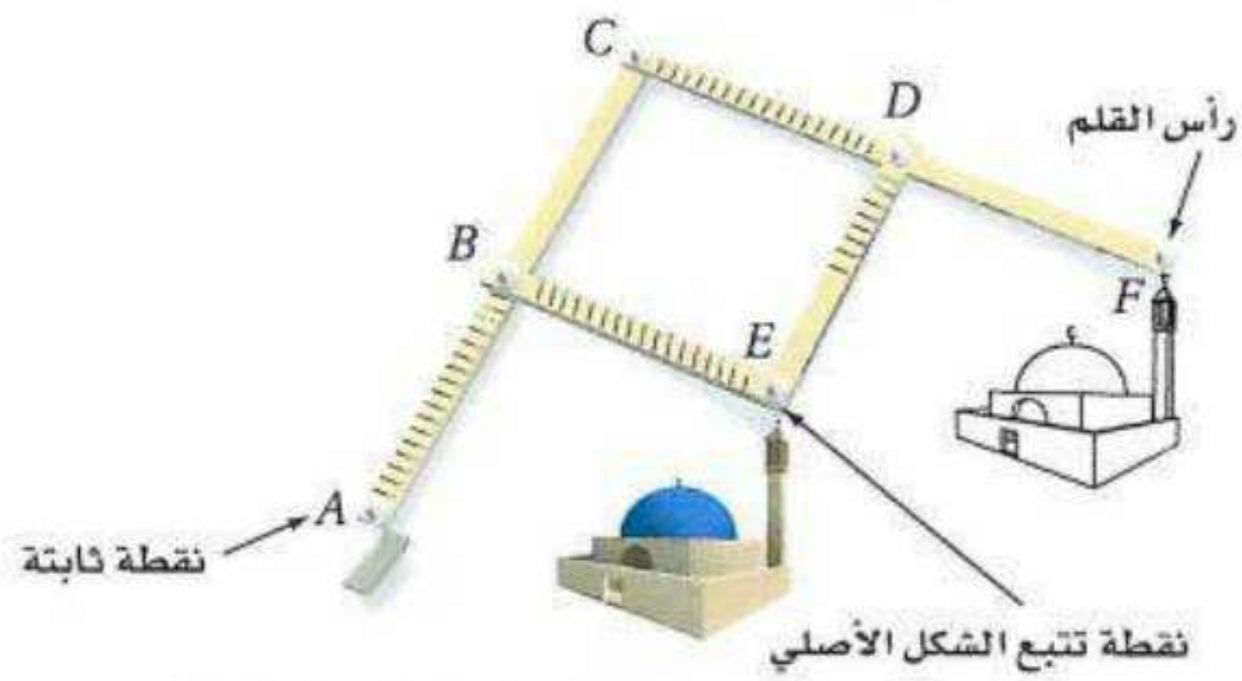
وبقسمة كلا الطرفين على 2 ينتج $m\angle A + m\angle B = 180^\circ$ لذا فإن الزاويتين المتحالفتين متكاملتان و $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$.

وبالمثل $2(m\angle A) + 2(m\angle D) = 360^\circ$ أو $m\angle A + m\angle D = 180^\circ$

إذن هاتان الزاويتان المتحالفتان متكاملتان و $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.

إذن الأضلاع المتقابلة متوازية، لذلك فالشكل ABCD متوازي أضلاع.

30) **المنَساخ:** استعن بمعلومات الربط مع الحياة إلى اليمين والشكل أدناه.



a) إذا كان $\overline{DF} \cong \overline{DE}$, $\overline{AB} \cong \overline{CD} \cong \overline{BE}$, $\overline{AC} \cong \overline{CF}$، فاكتب برهانًا حرًّا لإثبات أنّ $\overline{BE} \parallel \overline{CD}$.

المعطيات: $\overline{DF} \cong \overline{DE}$, $\overline{AB} \cong \overline{CD} \cong \overline{BE}$, $\overline{AC} \cong \overline{CF}$

المطلوب: $\overline{BE} \parallel \overline{CD}$.

البرهان: نعلم أن $\overline{DF} \cong \overline{DE}$, $\overline{AB} \cong \overline{CD} \cong \overline{BE}$, $\overline{AC} \cong \overline{CF}$

إذن $AC = CF$ حسب تعريف التطابق

$AC = AB + BC$ و $CF = CD + DF$ (حسب مسلمة جمع القطع المستقيمة)

وبالتعويض، يكون $AB + BC = CD + DF$، وباستعمال التعويض مرة أخرى يكون $AB + BC = AB + DF$ وحسب خاصية الطرح $BC = DF$

إذن $\overline{BC} \cong \overline{DF}$ حسب تعريف التطابق، و $\overline{BC} \cong \overline{DE}$ (حسب خاصية التعدي)

وإذا كان كل ضلعين متقابلين لشكل رباعي متطابقين فإن الشكل الرباعي متوازي أضلاع. إذن BCDE متوازي أضلاع ومن تعريف متوازي الأضلاع يكون $\overline{BE} \square \overline{CD}$.

b) مقياس الرسم للشكل المنسوخ هو نسبة CF إلى BE، فإذا كان $AB = 12\,\text{in}, DF = 8\text{in}$، وطول الشكل الأصلي $5.5\,\text{in}$، فما طول الصورة؟

$$\overline{AB} = \overline{CD}, \quad \overline{AB} = 12$$

$$\overline{CD} = 12$$

$$\overline{CF} = \overline{CD} + \overline{DF}$$

$$\overline{CF} = 12 + \overline{DF}$$

$$\overline{CF} = 12 + 8 = 20$$

$$\frac{\overline{CF}}{\overline{BE}} = \frac{20}{12}$$

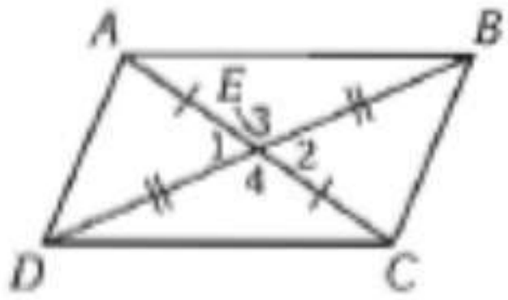
$$\frac{20}{12} = \frac{?}{5.5}$$

$$\frac{20 \times 5.5}{12} \approx 9.2\text{in}$$

31) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين للنظرية 5.11

المعطيات: $\overline{DE} \cong \overline{EB}, \overline{AE} \cong \overline{EC}$

المطلوب: ABCD متوازي أضلاع.



العبارات (المبررات):

1) $\overline{AE} \cong \overline{EC}, \overline{DE} \cong \overline{EB}$ (معطيات)

2) $\angle 1 \cong \angle 2, \angle 3 \cong \angle 4$ (الزاويتان المتقابلتان بالرأس متطابقتان)

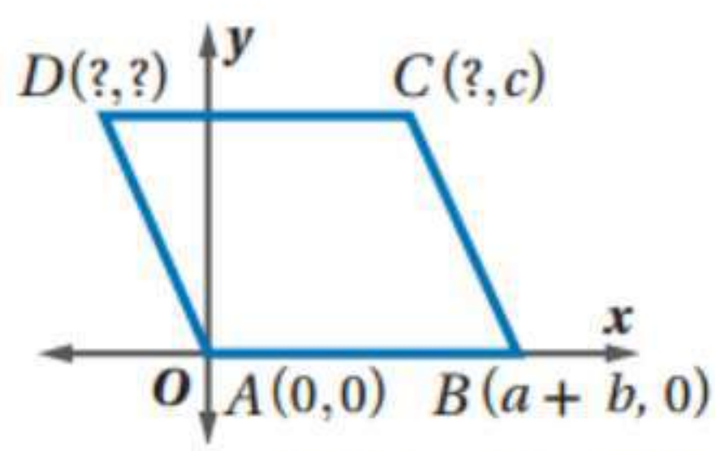
3) $\Delta ADE \cong \Delta CBE, \Delta ABE \cong \Delta CDE$ (SAS)

4) $\overline{AB} \cong \overline{DC}$, $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ (العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة)

5) ABCD متوازي أضلاع (إذا كان كل ضلعين متقابلين في شكل رباعي متطابقين فإنه متوازي أضلاع)

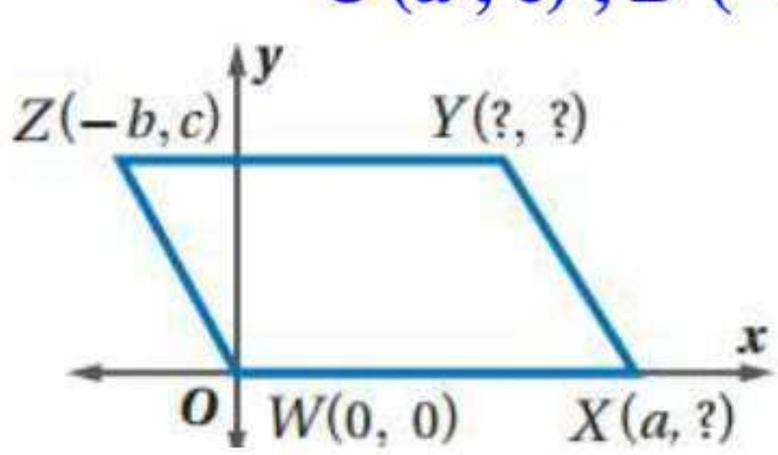
أوجد الإحداثيات المجهولة لرؤوس كل من متوازيي الأضلاع الآتيين:

32)



C (a , c) , D (- b , c)

33)



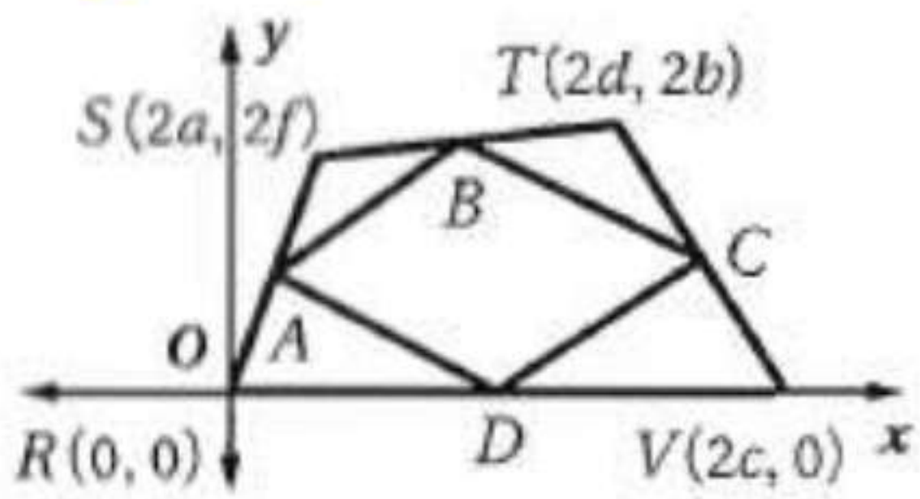
Y (a – b , c) , X (a , 0)

34) **برهان:** اكتب برهانًا إحداثيًا لإثبات أن القطع المستقيمة الواصلة بين منتصفات أضلاع أي شكل رباعي تشكِّل متوازي أضلاع.

المعطيات: RSTV شكل رباعي

والنقاط A, B, C, D منتصفات الأضلاع $\overline{VR}$, $\overline{TV}$, $\overline{ST}$, $\overline{RS}$ على الترتيب.

المطلوب: ABCD متوازي أضلاع.



البرهان:

ارسم الشكل الرباعي RSTV في المستوى الإحداثي، وسِم الإحداثيات كما هو مبين في الشكل (استعمال إحداثيات من مضاعفات العدد 2 سيجعل الحسابات أسهل) ومن صيغة نقطة المنتصف تكون إحداثيات النقاط A, B, C, D هي:

$$A\left(\frac{2a}{2},\frac{2f}{2}\right)=(a\ ,\ f)$$

$$B\left(\frac{2d+2a}{2},\frac{2f+2b}{2}\right)=(d+a,\ f+b)$$

$$C\left(\frac{2d+2c}{2},\frac{2b}{2}\right)=(d+c\ ,\ b)$$

$$D\left(\frac{2c}{2},\frac{0}{2}\right)=(c\ ,\ 0)$$

أوجد ميل كل من $\overline{AB}$ و $\overline{DC}$.

ولأن ميلي $\overline{AB}$ و $\overline{DC}$ متساويان، فإن القطعتين المستقيمتين متوازيتان.

استعمل صيغة المسافة بين نقطتين لإيجاد $\overline{AB}$,$\overline{DC}$.

$$\overline{AB}=\sqrt{((d+a-a)^2+(f+b-f)^2)}$$

$$=\sqrt{(d^2+b^2)}$$

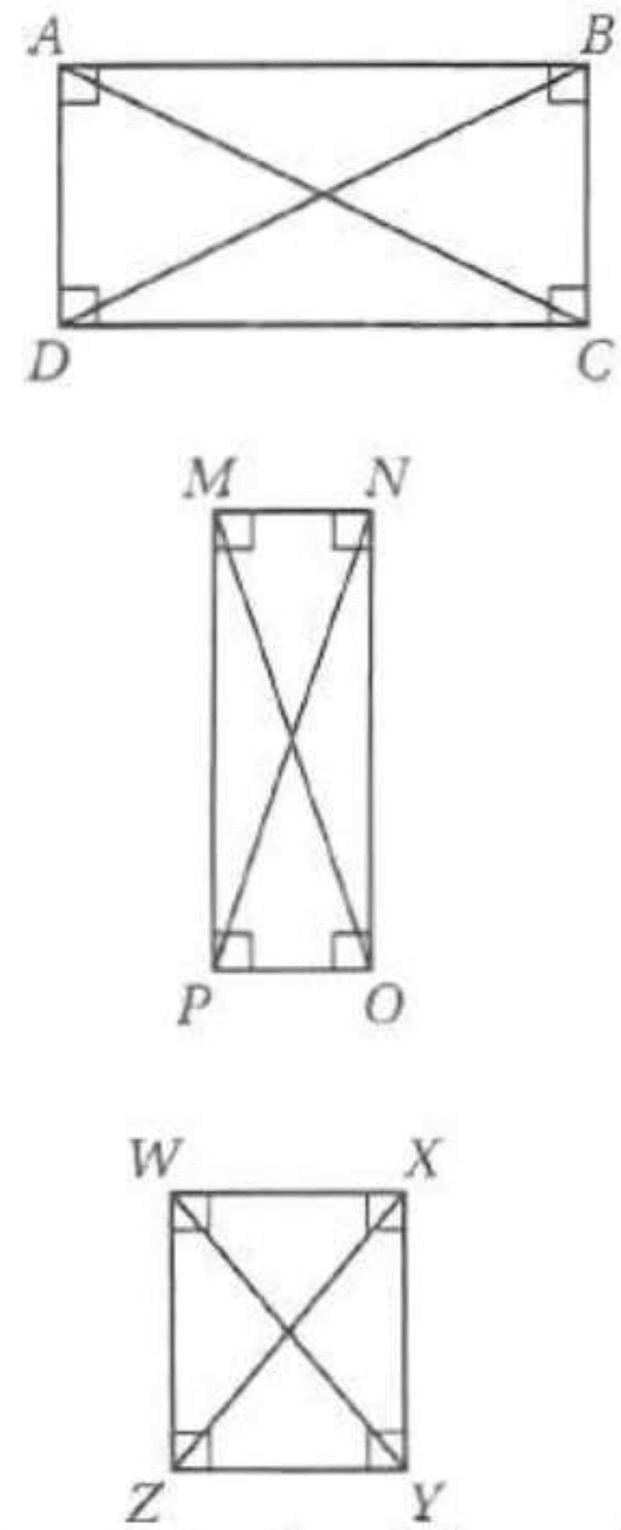
$$\overline{AB}=\sqrt{((d+c-c)^2+(b-0)^2)}$$

$$=\sqrt{(d^2+b^2)}$$

إذن $\overline{AB}\ \square\ \overline{DC}$ و $\overline{AB}\cong\overline{DC}$. لذلك ABCD متوازي أضلاع لأنه إذا كان ضلعان متقابلان في شكل رباعي متوازيين ومتطابقين فإنه متوازي أضلاع.

35) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة سوف تستقصي إحدى خصائص المستطيل.

a) **هندسيًّا:** ارسم ثلاثة مستطيلات بأبعاد مختلفة وسمِّها *ABCD, MNOP, WXYZ*، ثم ارسم قطري كل منها.



b) قِس طولي قطري كل مستطيل، ثم أكمل الجدول المجاور.

المستطيل	القطر	الطول
ABCD	AC	3.3 cm
	BD	3.3 cm
MNOP	MO	2.8 cm
	NP	2.8 cm
WXYZ	WY	2.0 cm
	XZ	2.0 cm

c) **لفظيًّا :** اكتب تخمينًا حول قطري المستطيل.

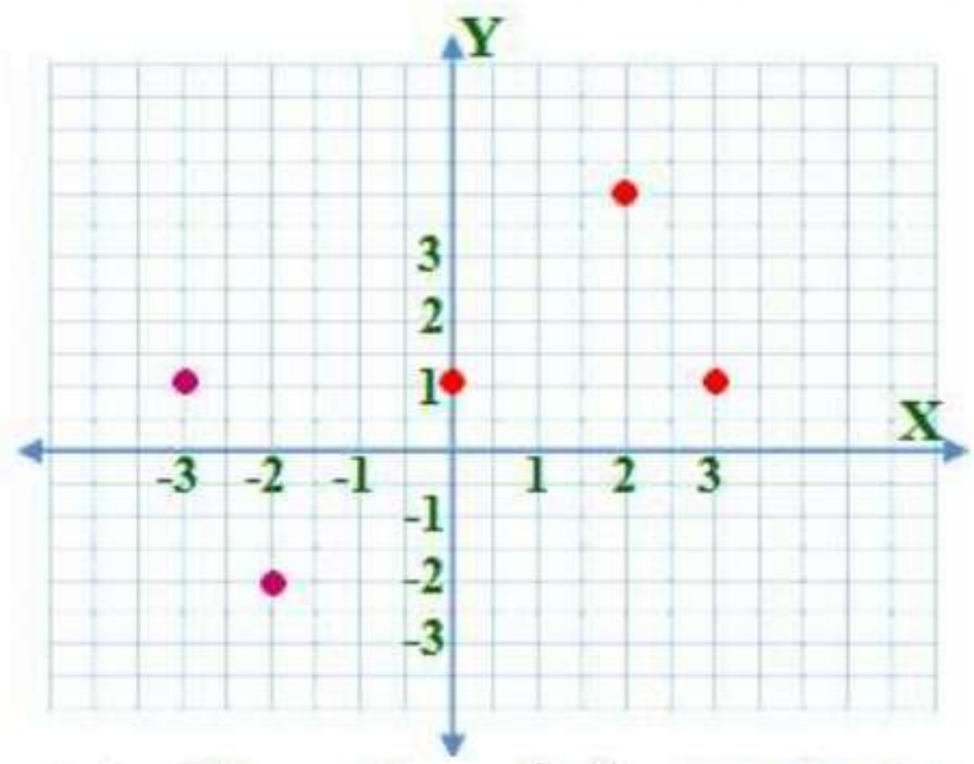
قطرا المستطيل متطابقان.

مسائل مهارات التفكير العليا:

36) **تحدٍّ:** يتقاطع قطرا متوازي أضلاع عند النقطة (0، 1). ويقع أحد رؤوسه عند النقطة (2، 4)، بينما يقع رأس آخر عند النقطة (3، 1). أوجد موقعي الرأسين الآخرين.

قطرا متوازي الأضلاع ينصف كل منهما الأخر

$(-2,-2),(-3,1)$



37) **اكتب:** بيِّن أوجه الشبه والاختلاف بين النظريتين 5.9 و 5.3 .

النظريتان إحداهما عكس الأخرى

فرضية النظرية 1.3 "الشكل متوازي الأضلاع"

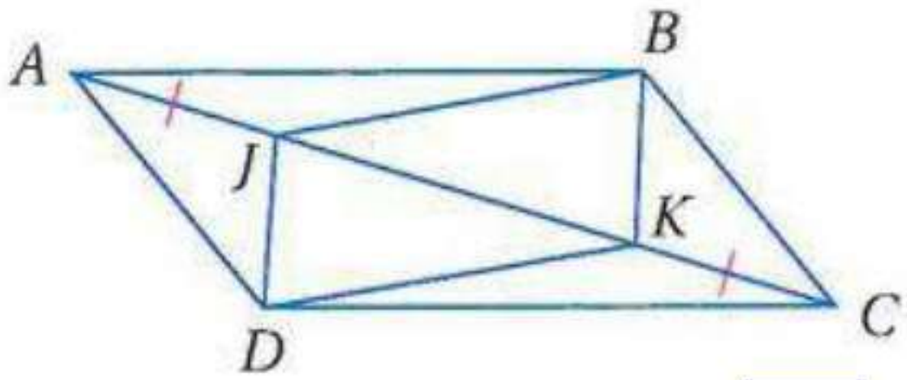
وفرضية النظرية 1.9 "الأضلاع المتقابلة في الشكل الرباعي متطابقة".

نتيجة النظرية 1.3 الأضلاع المتقابلة متطابقة ونتيجة النظرية 1.9 الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

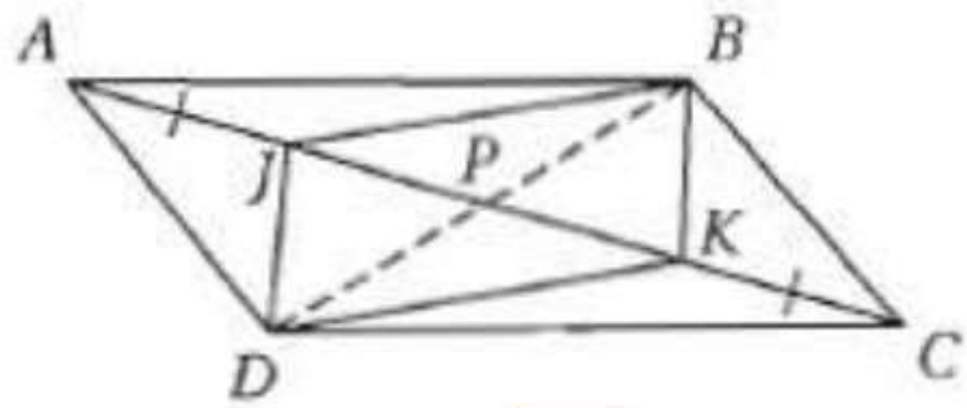
38) **تبرير:** إذا كانت الزوايا المتناظرة في متوازيي أضلاع متطابقة، فهل يكون متوازيا الأضلاع متطابقين أحيانًا، أم دائمًا، أم لا يكونان متطابقين أبدًا؟

أحياناً؛ يمكن أن يكون متوازيا الأضلاع متطابقين، إلا أنه يمكنك أيضاً جعل متوازي الأضلاع أكبر أو أصغر بتغيير أطوال الأضلاع ودون تغيير قياسات الزوايا.

39) تحدٍّ: في الشكل المجاور، $ABCD$ متوازي أضلاع، $\overline{AJ} \cong \overline{KC}$.
بيّن أن الشكل الرباعي $JBKD$ متوازي أضلاع.



المعطيات: ABCD متوازي أضلاع و $\overline{AJ} \cong \overline{KC}$.
المطلوب: JBKD متوازي أضلاع.



البرهان: ارسم $\overline{DB}$.
بما أن ABCD متوازي أضلاع، فإن القطرين $\overline{DB}$ و $\overline{AC}$ ينصف كل منهما الآخر حسب النظرية 1.7. سمِ نقطة تقاطعهما P.
ومن تعريف نقطة المنتصف يكون $\overline{AP} \cong \overline{PC}$ ، إذن $AP = PC$.
وحسب مسلمة جمع القطع المستقيمة فإن
$AP = AJ + JP$, $PC = PK + KC$ وبالتعويض
$AJ + JP = PK + KC$ وبما أن $\overline{AJ} \cong \overline{KC}$ ، فإن $AJ = KC$ حسب تعريف التطابق.
$KC + JP = PK + KC$
وبالتعويض $KC + JP = PK + KC$ ومن خاصية الطرح يكون
$JP = PK$.
إذن ومن تعريف التطابق تكون
$\overline{JP} \cong \overline{PK}$ إذن P نقطة منتصف $\overline{JK}$.
وبما أن $\overline{JK}$ و $\overline{DB}$ تنصف كل منهما الأخرى.
وهما قطران للشكل الرباعي JBKD، فحسب النظرية 1.11 يكون الشكل الرباعي JBKD متوازي أضلاع.

40) **اكتب:** استعمل العبارات الشرطية الثنائية "إذا وفقط إذا" في دمج كل من النظريات: 5.9 وَ 5.10 وَ 5.11 وَ 5.12 وعكسها.

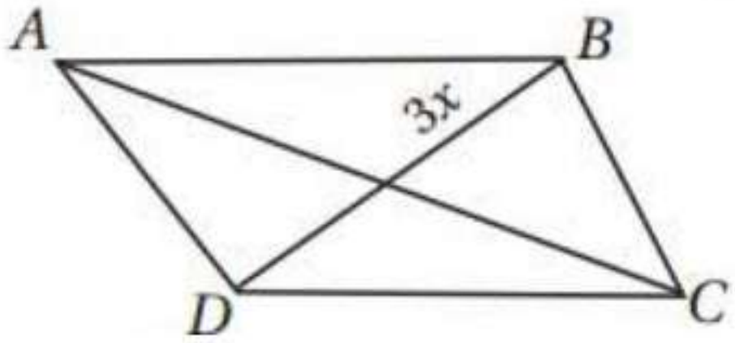
يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع إذا أمكنك بيان أن:
كل ضلعين متقابلين متطابقان أو متوازيان، أو كل زاويتين متقابلتين متطابقتان، أو القطران ينصف كل منهما الآخر، أو ضلعان متقابلان متطابقان ومتوازيان.

تدريب على الاختبار المعياري

41) إذا كان الضلعان AB, DC في الشكل الرباعي $ABCD$ متوازيين، فأيّ المعطيات الآتية كافية لإثبات أنّ $ABCD$ متوازي أضلاع؟

B : $\overline{AB} \cong \overline{DC}$

42) **إجابة قصيرة:** في الشكل الرباعي $ABCD$ أدناه، إذا كان $AC = 40, BD = \frac{3}{5}AC$ ، $\overline{BD}$ تنصّف $\overline{AC}$ ، فما قيمة x التي تجعل $ABCD$ متوازي أضلاع؟



$$DB = \frac{3}{5}AC$$

$$DB = \frac{3}{5} \times 40$$

$$DB = 24$$

$$3x = \frac{24}{2} = 12$$

$$x = 12 \div 3 = 4$$

مراجعة تراكمية

هندسة إحداثيّة : أوجد إحداثي نقطة تقاطع قطري متوازي الأضلاع $ABCD$ في كل من السؤالين الآتيين (الدرس 2-1)

43) $A(-3, 5), B(6, 5), C(5, -4), D(-4, -4)$

بما أن قطري متوازي الأضلاع ينصف كلا منهما الآخر، فإن نقطة تقاطعهما هي نقطة منتصف كل من $\overline{BD}$, $\overline{AC}$. أوجد نقطة منتصف $\overline{AC}$ التي طرفاها $(-3،5), (5\ -4)$

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) = \left(\frac{-3+5}{2}, \frac{5-4}{2}\right)$$ **(صيغة نقطة المنتصف)**

$$= (1،0.5)$$ **(بالتبسيط)**

إذن إحداثيا نقطة تقاطع قطري RSTU هما $(1،0.5)$

44) $A(2, 5), B(10, 7), C(7, -2), D(-1, -4)$

بما أن قطري متوازي الأضلاع ينصف كلا منهما الآخر، فإن نقطة تقاطعهما هي نقطة منتصف كل من $\overline{BD}$, $\overline{AC}$. أوجد نقطة منتصف $\overline{AC}$ التي طرفاها $(2،5), (7\ -2)$

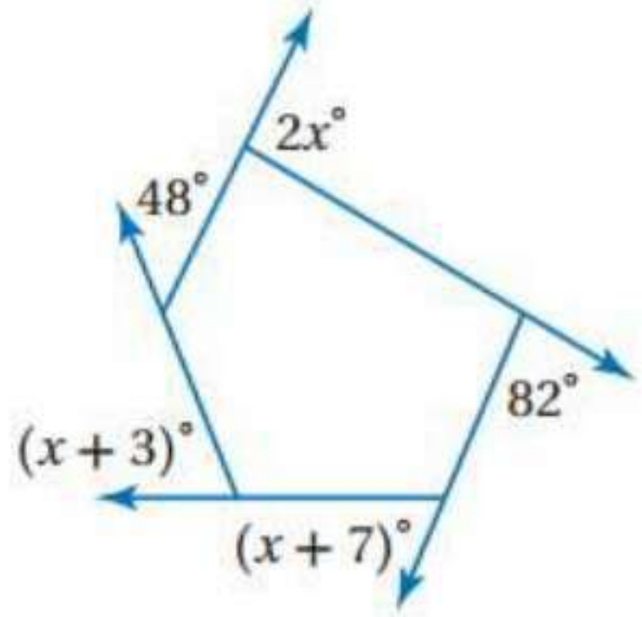
$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) = \left(\frac{2+7}{2}, \frac{5-2}{2}\right)$$ **(صيغة نقطة المنتصف)**

$$= (4.5،1.5)$$ **(بالتبسيط)**

إذن إحداثيا نقطة تقاطع قطري RSTU هما $(4.5،1.5)$

أوجد قيمة x في كل من الأسئلة الآتية : (الدرس 1-1)

(45



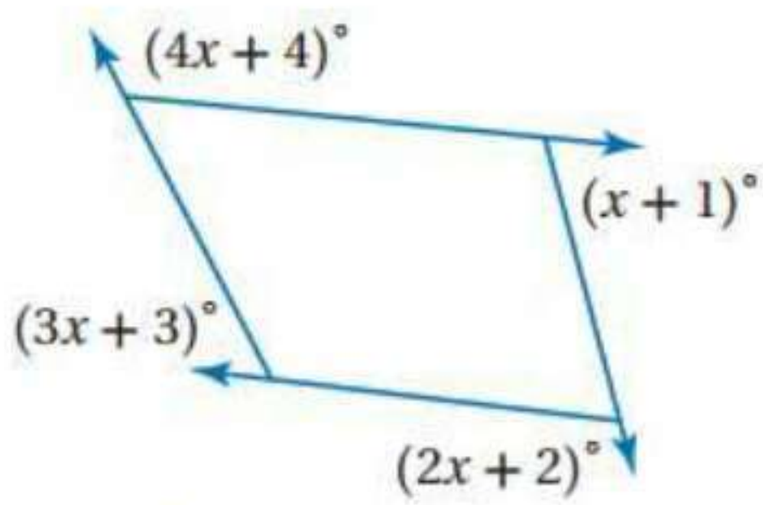
$$2x + (x+3) + (x+7) + 82 + 48 = 360^\circ$$

$$4x + 140 = 360$$

$$4x = 220$$

$$x = 55$$

(46

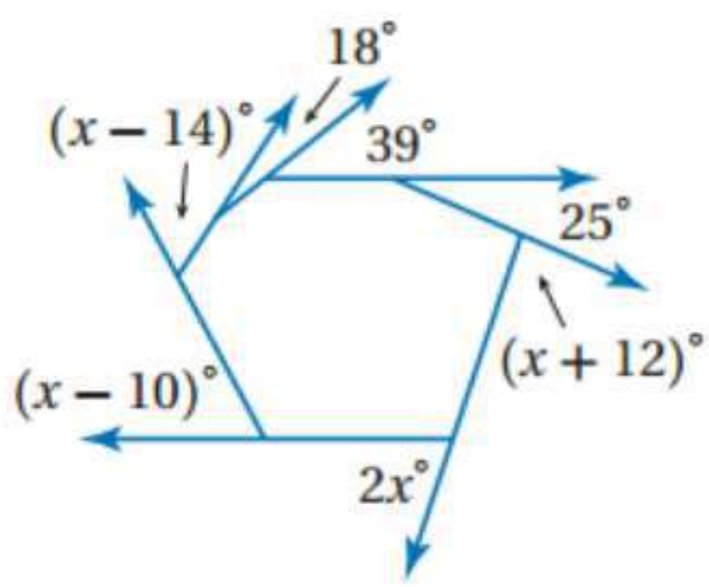


$$(4x+4) + (x+1) + (2x+2) + (3x+3) = 360^\circ$$

$$10x = 360 - 10$$

$$x = 35$$

(47



$$(x-14)+18+39+25+(x+12)+2x+(x-10)=360^\circ$$

$$5x+70=360$$

$$5x=360-70=290$$

$$x=58$$

أوجد عدد أضلاع المضلع المنتظم المعطى قياس إحدى زواياه الداخلية في كل مما يأتي: (الدرس 1-1)

48) 140°

$$140n=(n-2).180$$

$$140n=180n-360$$

$$140n-180n=-360$$

$$-40n=-360$$

$$n=259$$

49) 160°

$$160n=(n-2).180$$

$$160n=180n-360$$

$$160n-180n=-360$$

$$-20n=-360$$

$$n=18$$

50) 168°

$$168n=(n-2).180$$

$$168n=180n-360$$

$$-180n+168n=-360$$

$$-12n=-360$$

$$n=30$$

162° (51

$$162n = (n-2).180$$
$$162n = 180n - 360$$
$$-180n + 162n = -360$$
$$-18n = -360$$
$$n = 20$$

استعد للدرس اللاحق

استعمل الميل لتحديد ما إذا كان XY, YZ متعامدتين أم لا في كل مما يأتي:

(52 $X(-2, 2), Y(0, 1), Z(4, 1)$

ميل $\overline{XY} = \frac{0-2}{1-2} = \frac{-2}{1} = -2$

ميل $\overline{YZ} = \frac{1-4}{1-1} = \frac{4}{0}$

غير متعامدتين لأن حاصل ضرب ميل كل منهم لا يساوي -1

(53 $X(4, 1), Y(5, 3), Z(6, 2)$

ميل $\overline{XY} = \frac{1-3}{4-5} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$

ميل $\overline{YZ} = \frac{3-2}{5-6} = \frac{-1}{1} = -1$

غير متعامدتين لأن حاصل ضرب ميل كل منهم لا يساوي -1

اختبار منتصف الفصل

أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة في كل من المضلعات المحدبة الآتية : (الدرس 1-1)

1) الخماسي

$n = 5$

$(n-2).180 = (5-2).180^\circ = 540^\circ$

2) السباعي

$n = 7$

$(n-2).180 = (7-2).180^\circ = 900^\circ$

3) ذو 18 ضلعًا

$n = 18$

$(n-2).180 = (18-2).180^\circ = 2880^\circ$

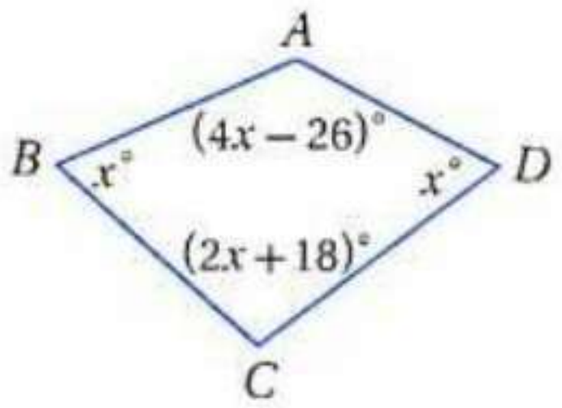
4) ذو 23 ضلعًا

$n = 23$

$(n-2).180 = (23-2).180^\circ = 3780^\circ$

أوجد قياسات جميع الزوايا الداخلية في كل من المضلعين الآتيين: (الدرس 1-1)

5)



$$(4x-26+x+x+2x+18)=360^\circ$$

$$8x-8=360$$

$$x=46$$

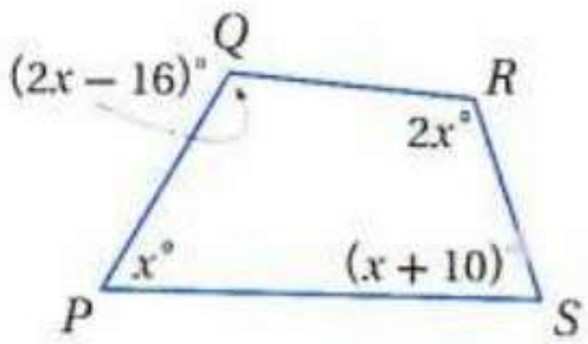
$$m\angle A=4\times 46-26=158^\circ$$

$$m\angle C=2\times 46+18=110^\circ$$

$$m\angle B=46^\circ$$

$$m\angle D=46^\circ$$

6)



$$(2x-16+2x+x+x+10)=360^\circ$$

$$6x-6=360$$

$$x=61$$

$$m\angle Q=2x-16=2\times 61-16=106^\circ$$

$$m\angle R=2\times 61=122^\circ$$

$$m\angle P=61^\circ$$

$$m\angle S=x+10=61+10=71^\circ$$

أوجد عدد أضلاع المضلع المنتظم المعطى مجموع قياسات زواياه الداخلية في كل مما يأتي :

(الدرس 1-1)

7) 720°

$$720 = (n-2).180$$
$$720 = 180n - 360$$
$$720 + 360 = 180n$$
$$n = 6$$

8) 1260°

$$1260 = (n-2).180$$
$$1260 = 180n - 360$$
$$1260 + 360 = 180n$$
$$n = 9$$

9) 1800°

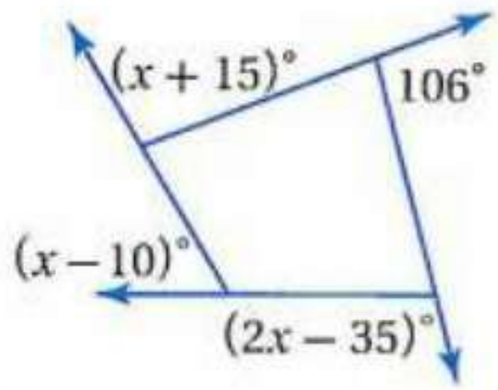
$$1800 = (n-2).180$$
$$1800 = 180n - 360$$
$$1800 + 360 = 180n$$
$$n = 12$$

10) 4500°

$$4500 = (n-2).180$$
$$4500 = 180n - 360$$
$$4500 + 360 = 180n$$
$$n = 27$$

أوجد قيمة x في كل من الشكلين الآتيين : (الدرس 1-1)

11)

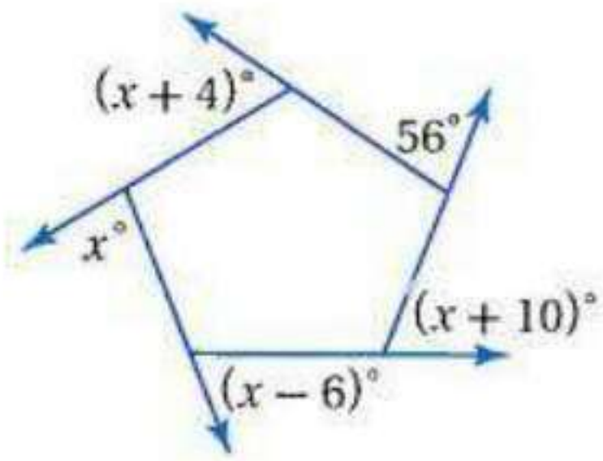


$$(x+15)+106+(x-10)+(2x-35)=360$$

$$4x+76=360$$

$$x=71$$

12)

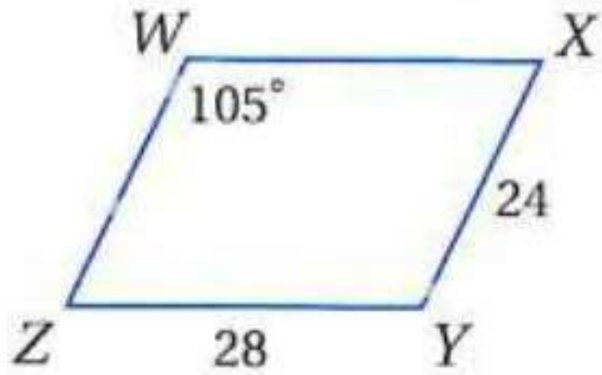


$$(x+4)+56+(x+10)+(x-6)+x=360$$

$$4x+64=360$$

$$x=74$$

استعمل $\square WXYZ$ لإيجاد كل مما يأتي : (الدرس 2-1)



13) $m\angle WZY$

$$105^\circ+\angle WZY=180^\circ$$

$$\angle WZY=180^\circ-105^\circ$$

$$\angle WZY=75^\circ$$

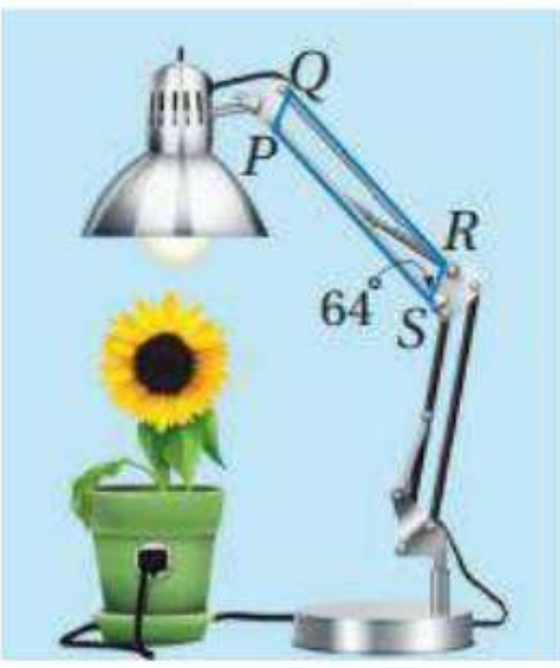
14) WZ

$WZ = XY = 24$

15) $m\angle XYZ$

$\angle XYZ = \angle ZWX = 105^\circ$

16) **إنارة:** استعمل مقبض الإنارة العلوي الذي يشكل متوازي أضلاع في إيجاد $m\angle p$ في $\square PQRS$. (الدرس 2-5)

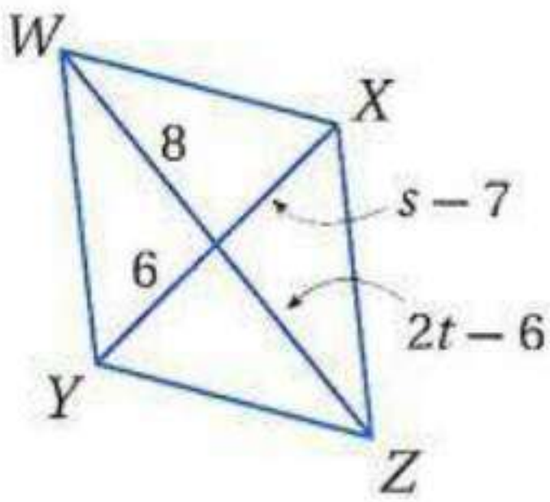


$\angle P$ و $\angle S$ زاويتان متكاملتان

$\angle P = 180 - 64 = 116^\circ$

جبر: أوجد قيم المتغيرات في كل من متوازيي الأضلاع الآتيين : (الدرس 2-1)

17)



$s - 7 = 6$

$s = 6 + 7$

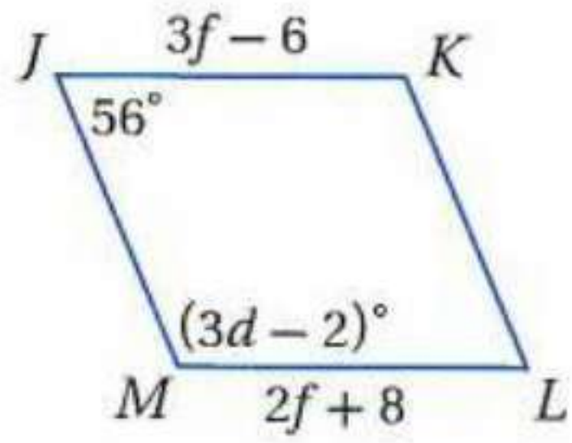
$s = 13$

$2t - 6 = 8$

$2t = 6 + 8$

$t = 7$

(18



$3f - 6 = 2f + 8$

$3f - 2f = 8 + 6$

$f = 14$

$56 + (3d - 2) = 180$

$54 + 3d = 180$

$3d = 180 - 54$

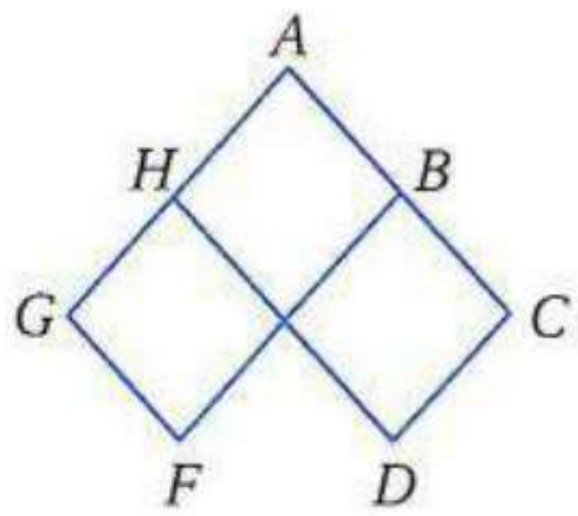
$3d = 126$

$d = 42$

19) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين. (الدرس 2-1)

المعطيات: $\square GFBA$, $\square HACD$

المطلوب: $\angle F \cong \angle D$



البرهان: العبارات (المبررات):

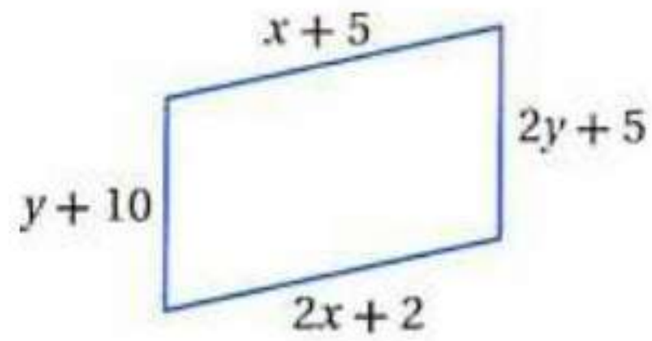
1) متوازيا الأضلاع GFBA, HACD. (معطيات)

2) $\angle F \cong \angle A$, $\angle A \cong \angle D$ (الزوايا المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة)

3) $\angle F \cong \angle D$ (خاصية التعدي)

أوجد قيمتي x , y في كل مما يأتي بحيث يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع : (الدرس 3-1)

20)



$x + 5 = 2x + 2$

$2x - x = 5 - 2$

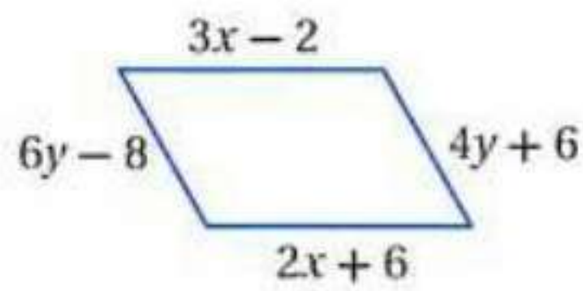
$x = 3$

$y + 10 = 2y + 5$

$y = 10 - 5$

$y = 5$

21)



$3x - 2 = 2x + 6$

$3x - 2x = 6 + 2$

$x = 8$

$4y + 6 = 6y - 8$

$6y - 4y = 6 + 8$

$2y = 14$

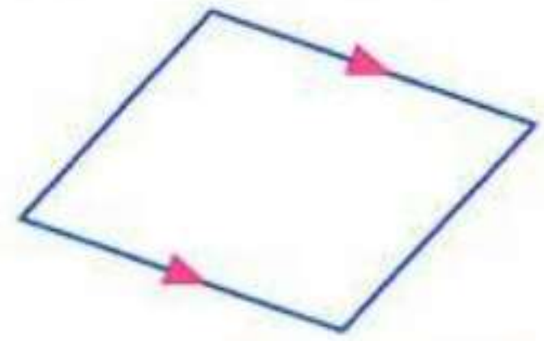
$y = 7$

22) **طاولات:** لماذا يبقى سطح طاولة كي الثياب في الصورة أدناه موازيًا لأرضية الغرفة دائمًا؟

عُمل الساقان بحيث ينصف كل منهما الآخر،
إذن فالشكل الرباعي المتكون من أطراف الساقين يكون دائماً متوازي الأضلاع.
لذلك فسطح الطاولة العلوي يبقى موازياً لسطح الأرض.

23) **اختيار من متعدّد:** أيّ الأشكال الرباعية الآتية ليس متوازي أضلاع؟ (الدرس 3-1)

D



هندسة إحداثيّة: حدد ما إذا كان الشكل الرباعي المعطاة إحداثيات رؤوسه في كل مما يأتي متوازي أضلاع؟ برّر إجابتك باستعمال الطريقة المحددة في السؤال. (الدرس 3-1)

24) $A(-6, -5), B(-1, -4), C(0, -1), D(-5, -2)$، صيغة المسافة بين نقطتين.

نعم؛ يجب أن يكون كل ضلعين متقابلين متطابقين.

المسافة بين A و B تساوي $\sqrt{26}$. والمسافة بين B وC تساوي $\sqrt{10}$.

والمسافة بين C وD تساوي $\sqrt{26}$. والمسافة بين D و A تساوي $\sqrt{10}$.

وبما أن كل ضلعين متقابلين متطابقان، فإن ABCD متوازي أضلاع.

حيث أن المسافة بين نقطتين تحسب من خلال $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

25) $Q(-5, 2), R(-3, -6), S(2, 2), T(-1, 6)$، صيغة الميل.

ميل $\overline{QR}$: $\frac{-5+3}{2+6} = \frac{-2}{8} = \frac{-1}{4}$

ميل $\overline{RS}$: $\frac{-3-2}{-6-2} = \frac{-5}{-8} = \frac{5}{8}$

ميل $\overline{ST}$: $\frac{2+1}{2-6} = \frac{3}{-4}$

ميل $\overline{OT}$: $\frac{-2+1}{4+1} = \frac{-1}{5}$

بما أن ميل $\overline{QR}$ لا يساوي ميل $\overline{ST}$، فإن QRST ليس متوازي أضلاع.

5-4 المستطيل

تحقق

1A) إذا كان $TS = 120$ ، فأوجد PR.

$TS = 120$ معطى

$QS = 120 \times 2 = 240$ قطرا المستطيل ينصف كل منهما الأخر

$QS = PR = 240$ من خصائص المستطيل القطران متطابقان

1B) إذا كان $m\angle PRS = 64^\circ$، فأوجد $m\angle SQR$.

الزوايا الأربع قوائم للمستطيل

إذن $\angle SRQ = 90^\circ$

$\angle QRT = \angle SQR = 90^\circ - 64^\circ = 26^\circ$

2) استعن بالشكل في المثال 2. إذا كان $MK = 5y + 1$, $JP = 3y - 5$، فأوجد قيمة y.

قطرا المستطيل متطابقان وينصف كل منهما الأخر

$MK = LJ$

$MK = (JP + PL)$

$\because JP = PL$

$\therefore MK = 2(JP)$

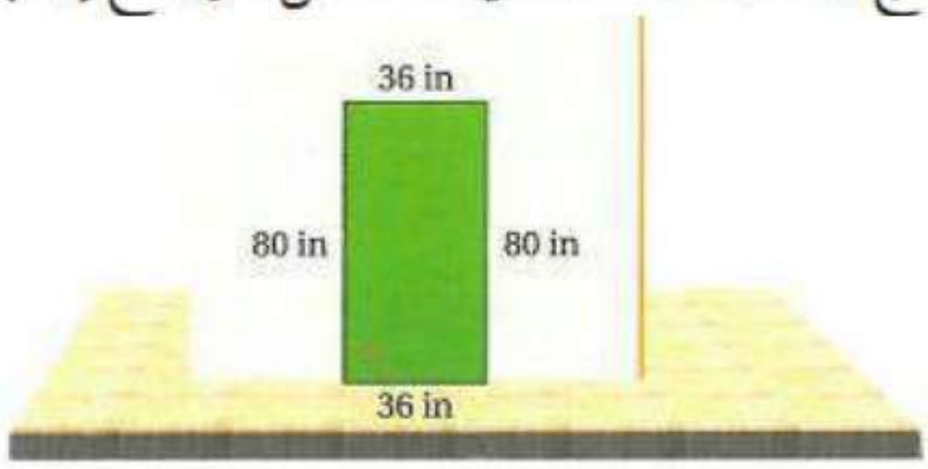
$5y + 1 = 2(3y - 5)$

$5y + 1 = 6y - 10$

$6y - 5y = 1 + 10$

$y = 11$

3) **تصميم:** بالرجوع إلى فقرة "لماذا؟" بداية الدرس. قاس أحمد أبعاد المنطقة التي قام بطلائها كما في الشكل أدناه. وباستعمال زاوية النجارين تحقق من أن الزاوية عند الركن الأيسر السفلي قائمة. فهل يمكنه استنتاج أن المنطقة مستطيلة الشكل؟ وضِّح إجابتك.



نعم؛ بما أن الأضلاع المتقابلة متطابقة، فإن المنطقة التي قام بطلائها تشكل متوازي أضلاع. وإذا كانت إحدى زوايا متوازي أضلاع قائمة فإن جميع الزوايا قائمة.

وبما أن الزاوية السفلى إلى اليسار قائمة فإن جميع الزوايا قائمة، لذلك وحسب التعريف، يكون المدخل مستطيلاً.

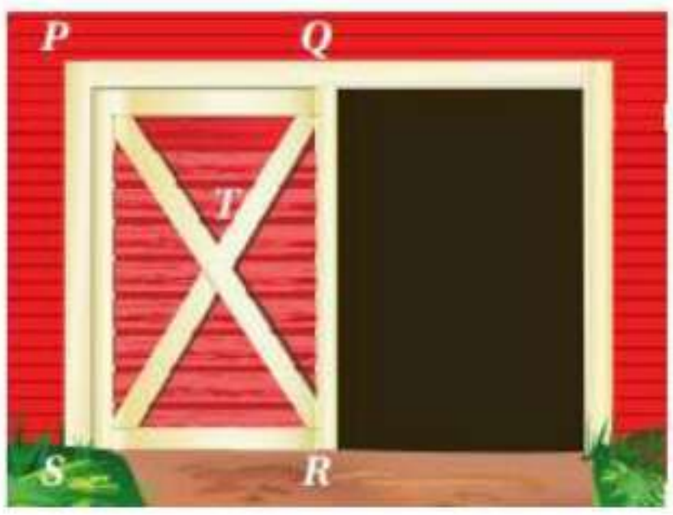
4) إذا كانت إحداثيات رؤوس الشكل الرباعي $JKLM$ هي $K(-8, -6), L(5, -3), M(2, 5)$, $J(-10, 2)$. فهل $JKLM$ مستطيل؟ استعمل صيغة الميل.

ميل $\overline{JK}$: $\frac{-10+8}{2+6} = \frac{-2}{8} = \frac{-1}{4}$

ميل $\overline{ML}$: $\frac{5-2}{-3-5} = \frac{3}{-8}$

بما أن ميل $\overline{JK}$ لا يساوي ميل $\overline{ML}$، أي أنهما غير متوازيان إذن JKLM ليس مستطيل.

تأكد :



زراعة : الشكل المجاور يبيّن بوّابة مخزن حبوب مستطيلة الشكل، فيها الدعامتان المتقاطعتان تقويان دفة البوّابة، وتحفظانها من الالتواء مع مرور الزمن.

إذا كان $PS = 7$ ft, $ST = 3\frac{13}{16}$ ft, $m\angle PTQ = 67°$،

1) QR

(الضلعان المتقابلان في المستطيل متطابقان)

$$PS = QR = 7ft$$

2) SQ

$$SQ = (ST + TQ)$$
$$ST = TQ$$
$$SQ = 2ST$$
$$SQ = 2 \times 3\frac{13}{16}$$
$$SQ = 2 \times \frac{61}{16}$$
$$SQ = 7\frac{5}{8}ft$$

$m\angle TQR$ (3

$\because \angle PTQ = 67$

$\because TQ = PT$

$\therefore \angle TPQ = \angle TQP = \dfrac{180 - 67}{2} = 56.5^\circ$

$\therefore \angle TQR = 90^\circ - 56.5^\circ$

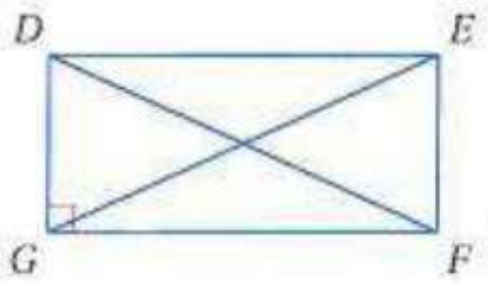
$\therefore \angle TQR = 33.5^\circ$

$m\angle TSR$ (4

$\therefore \angle STR = \angle PTQ = 67^\circ$

$\therefore \angle TSR = \dfrac{180^\circ - 67^\circ}{2}$

$\therefore \angle TSR = 56.5^\circ$



جبر: استعن بالمستطيل $DEFG$ المبين جانبًا.

5) إذا كان $EG = x + 5$, $FD = 3x - 7$، فأوجد EG .

قطرا المستطيل متطابقان

$EG = FD$

$x + 5 = 3x - 7$

$3x - x = 5 + 7$

$2x = 12$

$x = 6$

$EG = x + 5 = 6 + 5 = 11$