المملكة العربية السعودية

وزارة التعليم
Ministry of Education

قررت وزارة التعليم تدريس
هذا الكتاب وطبعه على نفقتها

رياضيات ١-٢

التعليم الثانوي
(نظام المسارات)
(السنة الأولى المشتركة)

قام بالتأليف والمراجعة
فريق من المتخصصين
المدارس السعودية في الخارج

طبعة ١٤٤٣ - ٢٠٢١

يوزع مجاناً ولا يباع
وزارة التعليم
Ministry of Education
2021 - 1443

الفصل 3

المثلثات المتطابقة
Congruent Triangles

فيما سبق:

درست القطع المستقيمة والزوايا والعلاقات بين قياساتها.

والآن:

- أطبق العلاقات الخاصة بالزوايا الداخلية والزوايا الخارجية للمثلثات.
- أحدد العناصر المتناظرة في مثلثات متطابقة، وأبرهن على تطابق المثلثات.
- أتعرف خصائص المثلثات المتطابقة الضلعين والمثلثات المتطابقة الأضلاع.

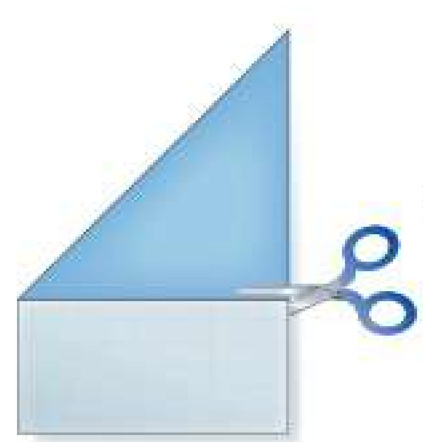
لماذا؟

لياقة: تستعمل المثلثات لتقوية إنشاءات ومعدات كثيرة، من بينها أجهزة اللياقة البدنية مثل هياكل الدراجات.

المطويات منظم أفكار

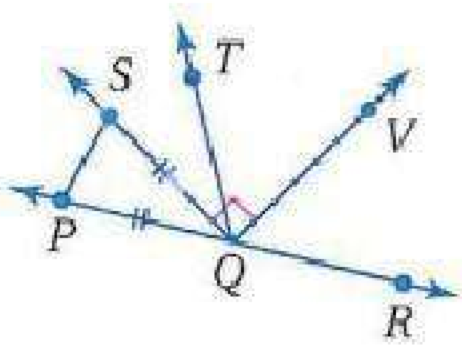
المثلثات المتطابقة: اعمل المطوية التالية لتنظيم ملاحظاتك حول المثلثات المتطابقة. ابدأ بثلاث أوراق رسم بياني وورقة مقواة من الحجم نفسه.

1 ضع أوراق الرسم البياني فوق الورقة المقواة، ثم اطو الأوراق لتشكل مثلثًا، كما في الشكل، ثم قص الورق الزائد.



2 ثبِّت الحافة، بحيث تشكل الأوراق دفترًا، واكتب عنوان الفصل في الصفحة الأولى، ورقِّمْ كل درس وعنوانه في باقي الصفحات.

صنف كل زاوية مما يأتي إلى قائمة أو حادة أو منفرجة:



1) $\angle VQS$ زاوية قائمة

2) $\angle TQV$ زاوية حادة

3) $\angle PQV$ زاوية منفرجة

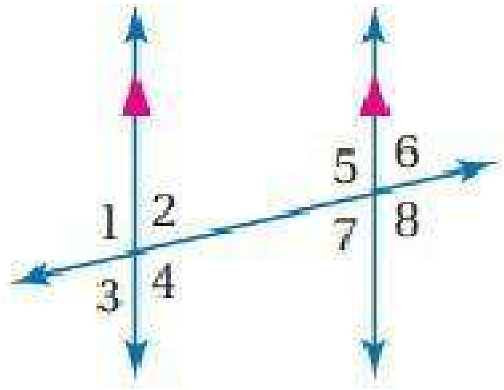
4) تصاميم ورقية:

$\angle 1$ قائمة

$\angle 2$ حادة

$\angle 3$ منفرجة

جبر: استعمل الشكل أدناه لإيجاد المتغير المطلوب في كل من السؤالين الآتيين:



5)

$\angle 3 = \angle 6$

$x - 12 = 72$

$x = 72 + 12$

$x = 84^\circ$

$\angle 3, \angle 6$ متبادلتين خارجياً.

6)

$\angle 4 = \angle 5$

$2y + 32 = 3y - 3$

$-y = -3 - 32$

$y = 35^\circ$

$\angle 4, \angle 5$ متبادلتين داخلياً.

أوجد المسافة بين النقطتين في كل مما يأتي:

7)

$X(-2,5),\ Y(1,11)$

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(1-(-2))^2 + (11-5)^2}$

$\sqrt{9+36} = \sqrt{45} \approx 6.7$

المسافة بين النقطتين x, y = 6.7 وحدة

8)
$R(8,0),\ S(-9,6)$

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(-9-8)^2+(6-0)^2}$$

$$\sqrt{289+36}=\sqrt{325}\approx 18.02$$

المسافة بين النقطتين s , r = 18.02 وحدة

خرائط:

9)
$(0,0),\ (5,2.2)$

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(5-0)^2+(2.2-0)^2}$$

$$\sqrt{25+4.84}=\sqrt{29.84}\approx 5.46$$

$$5.46\times 35=191.1km$$

1-3 تصنيف المثلثات

تحقق

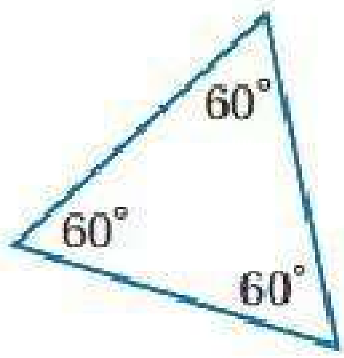
صفحة ١٤١

صنف كلا من المثلثين الآتيين إلى حاد الزوايا أو متطابق الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية:

(1A

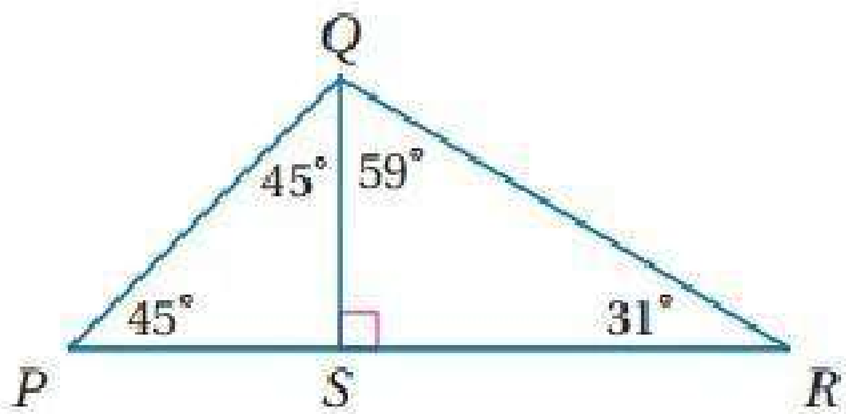
مثلث منفرج الزاوية لأنه يحتوي على زاوية = 97°

(1B



مثلث متطابق الزوايا لأن جميع زواياه متساوية.

(2

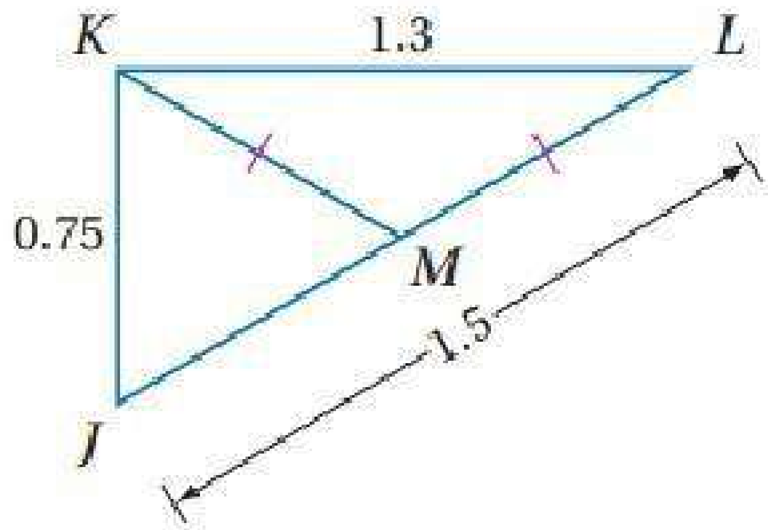


مثلث قائم الزاوية ، لأن الزاوية PQS قائمة = $45+45 = 90^\circ$

3) قيادة السيارة والسلامة:

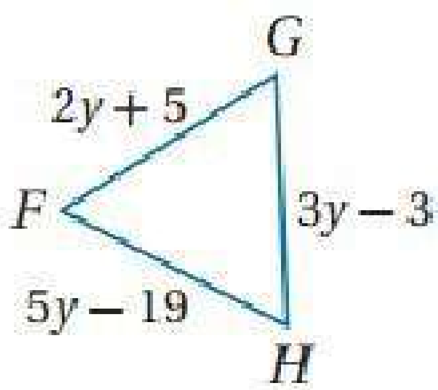
شكل زر ضوء الخطر مثلث متطابق الضلعين.

(4



ΔKML متطابق الضلعين لأن $KM = ML$

(5



بما أن المثلث متطابق الأضلاع إذن أطوال أضلاعه جميعها متساوية

$$FG = GH$$

$$2y + 5 = 3y - 3$$

$$2y + 5 - 3y + 3 = 0$$

$$-y + 8 = 0$$

$$y = 8$$

$$FG = 2y + 5 = 2 \times 8 + 5 = 21$$

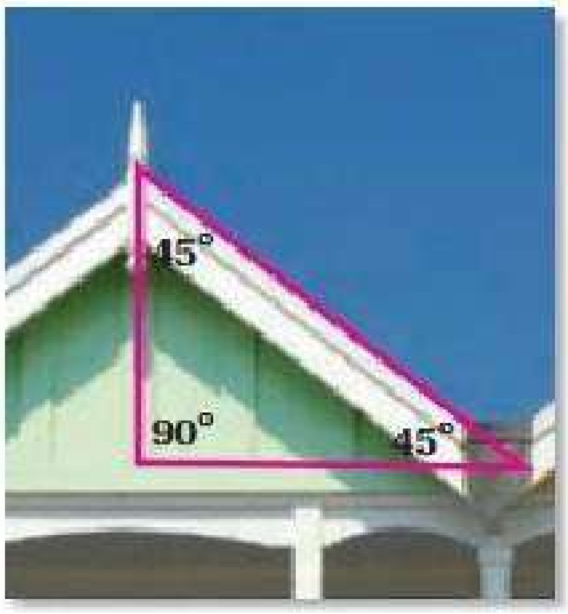
$$GH = 3y - 3 = 3 \times 8 - 3 = 21$$

$$FH = 5y - 19 = 5 \times 8 - 19 = 21$$

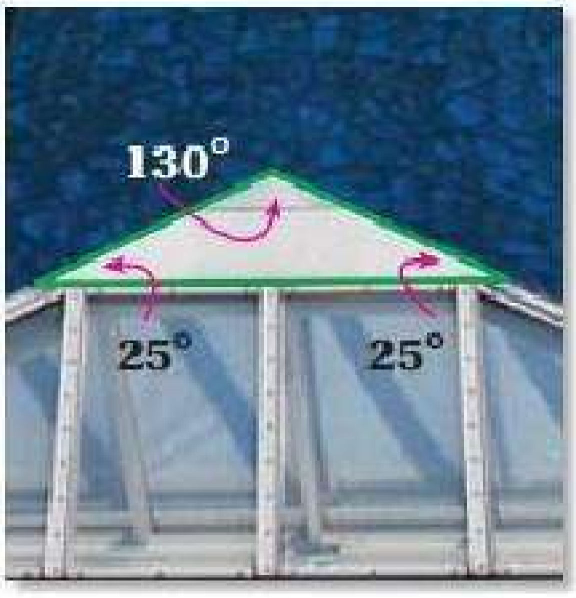
تأكد

فن العمارة: المثال ١

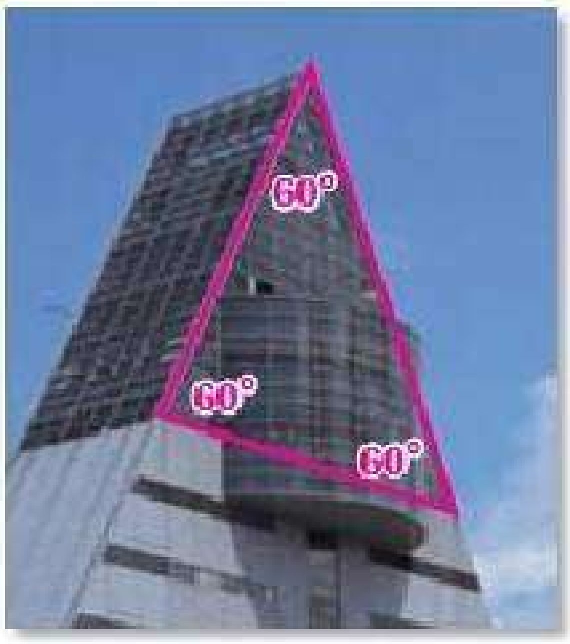
1) قائم الزاوية لأنه يحتوي على زاوية قياسها °90



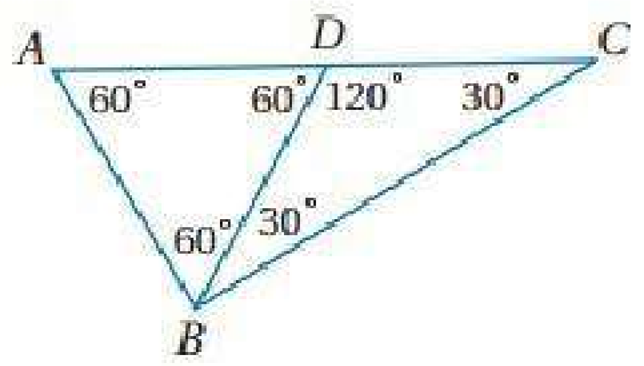
2) منفرج الزاوية لأن إحدى زواياه أكبر من °90



3) متطابق الزوايا لأن جميع زواياه متساوية



صنف كلا من المثلثات الآتية إلى حاد الزوايا أو متطابق الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية: المثال٢



4) $\triangle ABD$ متطابق الزوايا، قياس كل زاوية = 60

5) $\triangle BDC$ منفرج الزاوية، $\triangle ABD$

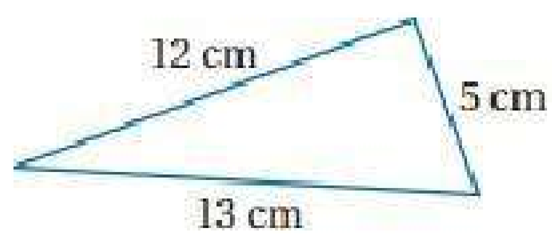
6) $\triangle ABC$ قائم الزاوية، لأن $m\angle BDC = 90^\circ$

صنف كلا من المثلثين الآتيين إلى متطابق الأضلاع أو متطابق الضلعين أو مختلف الأضلاع: المثال٣

7)

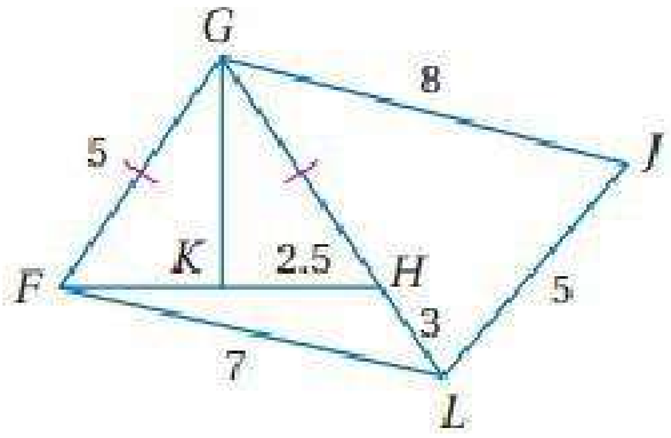
متطابق الضلعين

8)



مختلف الأضلاع

إذا كانت النقطة K هي منتصف $\overline{FH}$، فصنف كلا من المثلثات الآتية في الشكل المجاور إلى متطابق الأضلاع أو متطابق الضلعين أو مختلف الأضلاع: مثال ٤



(9

بما أن K في المنتصف، إذن $2.5 = FK = KH$

$5 = 2.5 + 2.5 = FH$

$5 = FH = FG = HG$

إذن المثلث ΔFGH متطابق الأضلاع لأن جميع أضلاعه متساوية.

(10

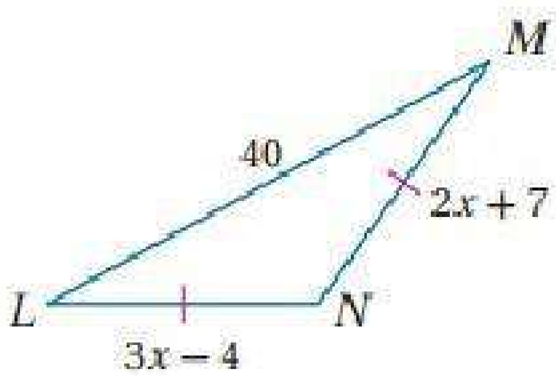
بما أن $GL = LJ = 5$ إذن ΔGJL متطابق الضلعين

(11

بما أن ΔFHL جميع أطوال أضلاعه غير متساوية إذن هو مختلف الأضلاع

جبر: أوجد قيمة x وأطوال الأضلاع المجهولة في كل من المثلثين الآتيين:

(12



بما أن المثلث ΔLNM متطابق الضلعين إذن $LN = MN$

$LN = MN$

$2x + 7 = 3x - 4$

$2x - 3x = -4 - 7$

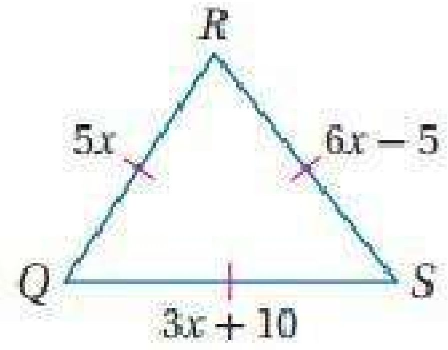
$-x = -11$

$x = 11$

$MN = 2 \times 11 + 7 = 29$

$LN = 3 \times 11 - 4 = 29$

(13



بما أن المثلث $\triangle QRS$ متطابق الأضلاع إذن $RS = QS = QR$

$6x - 5 = 5x$

$6x - 5x = 5$

$x = 5$

$QR = 5x = 5 \times 5 = 25$

$RS = 6x - 5 = 6 \times 5 - 5 = 25$

$QS = 3x + 10 = 3 \times 5 + 10 = 25$

14) مجوهرات:

بما أن المثلث متطابق الضلعين إذن:

$(4x - 0.8) = (3x + 0.2)$

$x = 0.8 + 0.2 = 1$

لتشكيل قرط واحد أحتاج إلى :

$$(4x-0.8)+(3x+0.2)+(2x+0.1)+1.5=$$

$$9x-0.5=9-0.5$$

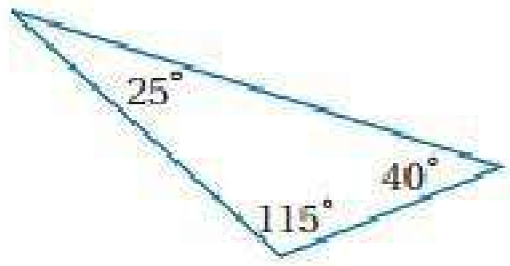
$$=8.5$$

إذن يمكن صنع قرط واحد سلك طوله ٨,٥

تدرب وحل المسائل

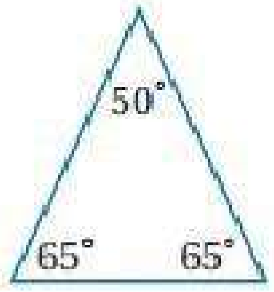
صنف كلا من المثلثين الآتيين إلى حاد الزوايا أو متطابق الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية: المثال١

(15



منفرج الزاوية لأنه يحتوي على زاوية أكبر من $90°$

(16

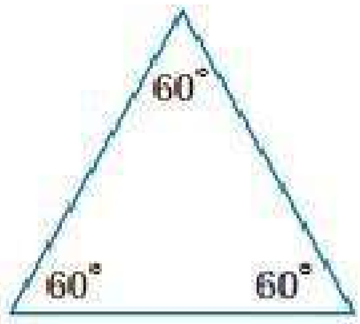


حاد الزوايا لأن جميع زواياه أقل من $90°$

(17

قائم الزاوية لأنه توجد زاوية قائمة = $90°$

(18

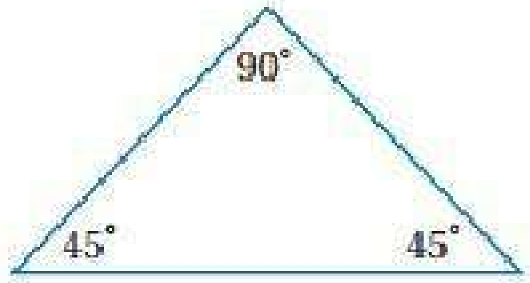


متطابق الزوايا لأن جميع زواياه متساوية

(19

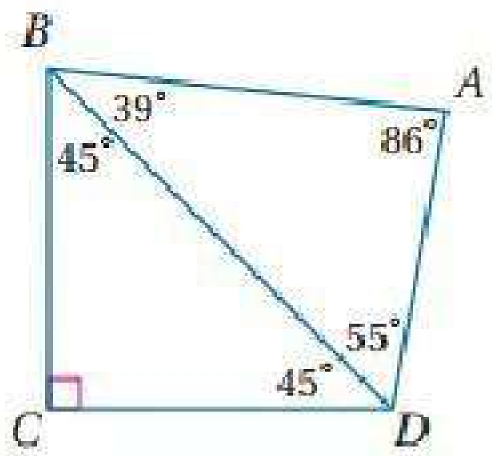
حاد الزوايا لأن جميع زواياه أقل من $90°$

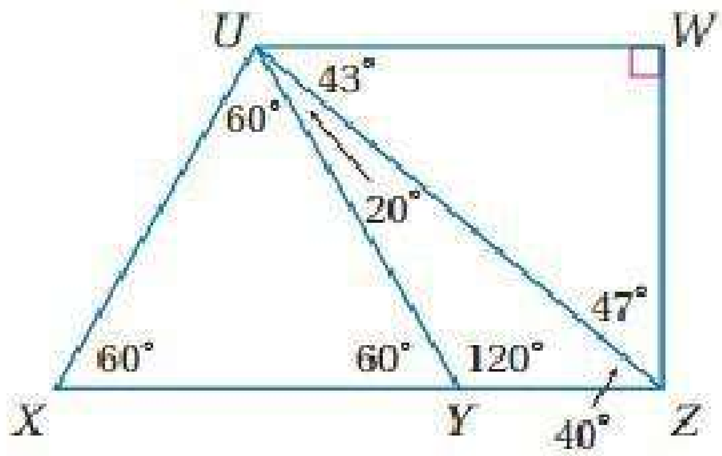
(20



قائم الزاوية لأنه توجد زاوية قائمة = $90°$

صنف كلا من المثلثات الآتية إلى حاد الزوايا أو متطابق الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية: المثال٢





21) ΔUYZ منفرج الزاوية، لأنه يحتوي زاوية أكبر من $90°$ وهي $120° = \angle UYZ$

22) ΔBCD قائم الزاوية، لأنه يوجد زاوية قائمة = $90°$

23) ΔBCD حاد الزوايا، لأن جميع زواياه أقل من $90°$

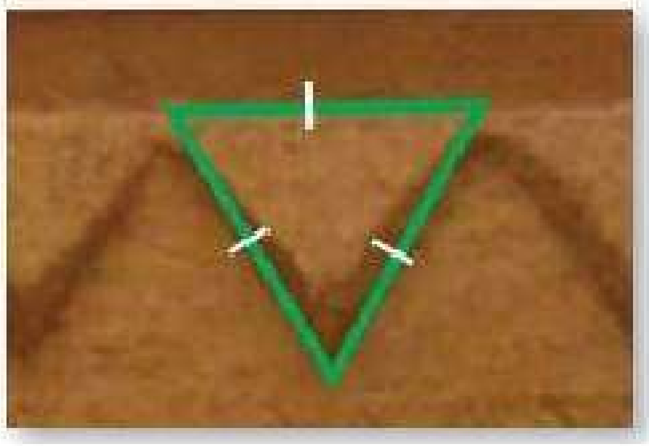
24) ΔUXZ حاد الزوايا، لأن جميع زواياه أقل من $90°$

25) ΔUWZ قائم الزاوية، لأنه يوجد زاوية قائمة = $90°$

26) ΔUXY متطابق الزوايا، جميع زواياه متساوية.

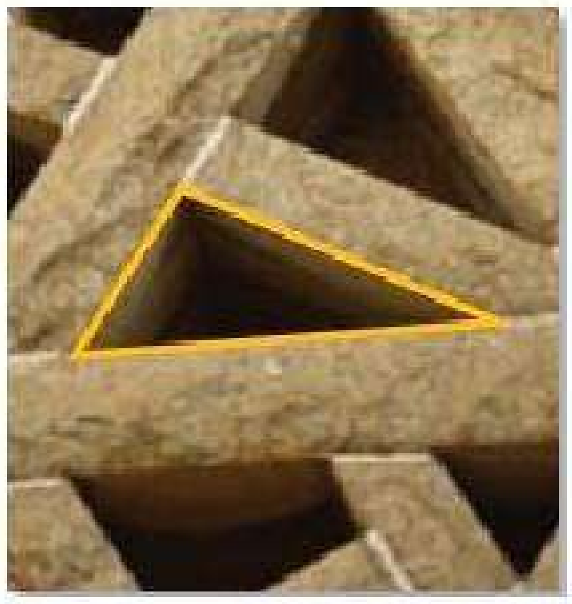
صنف كلا من المثلثين الآتيين إلى متطابق الأضلاع أو متطابق الضلعين أو مختلف الأضلاع: المثال٣

(27



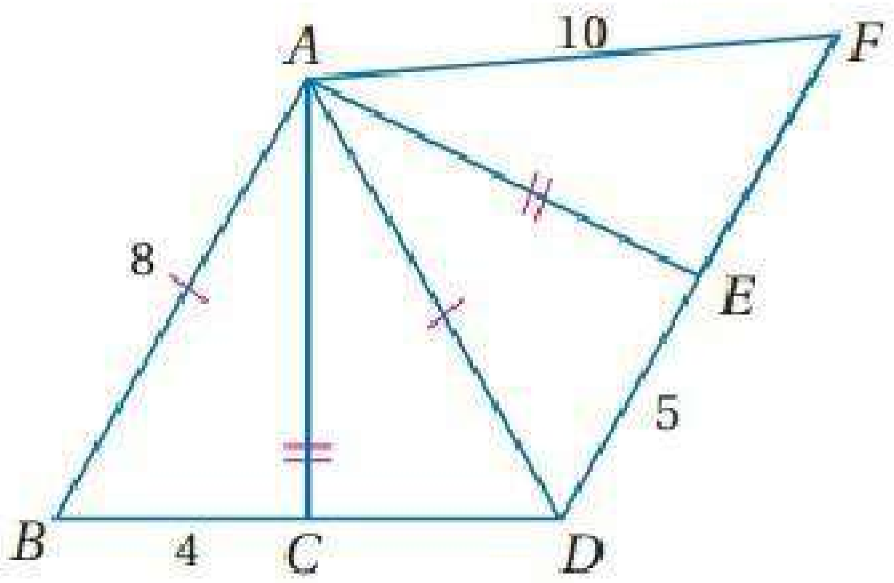
متطابق الأضلاع لأن جميع أطوال أضلاعه متساوية.

(28



مختلف الأضلاع لأن جميع أطوال أضلاعه غير متساوية.

إذا كانت C هي منتصف $\overline{BD}$ ، والنقطة E منتصف $\overline{DF}$ ، فصنف كلا من المثلثات الآتية إلى متطابق الأضلاع أو متطابق الضلعين أو مختلف الأضلاع:



بما أن C هي نقطة منتصف $\overline{BD}$ إذن $\overline{BC} = \overline{CD} = 4$

وبما أن النقطة E منتصف $\overline{DF}$ إذن $\overline{EF} = \overline{ED} = 5$

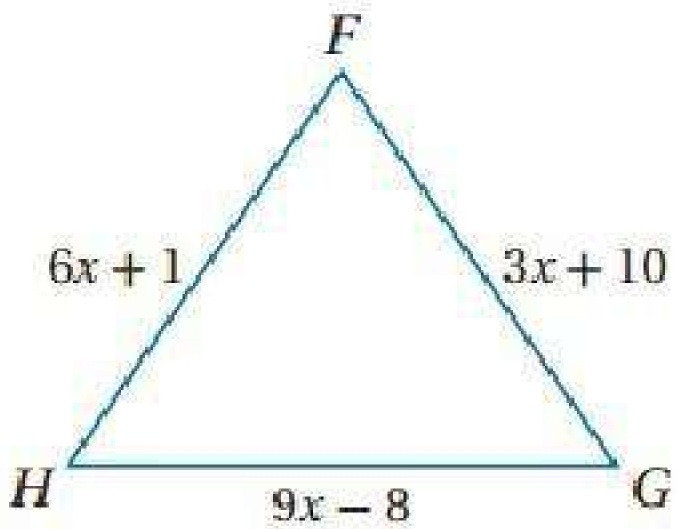
29) $\triangle ABC$ مختلف الأضلاع لأن جميع أطوال أضلاعه غير متساوية.

30) $\triangle ADF$ متطابق الضلعين لأن $\overline{FD} = \overline{AF} = 10$.

31) $\triangle ACD$ مختلف الأضلاع لأن جميع أطوال أضلاعه غير متساوية.

32) $\triangle ABD$ متطابق الضلعين لأن $\overline{AD} = \overline{AB} = 8$

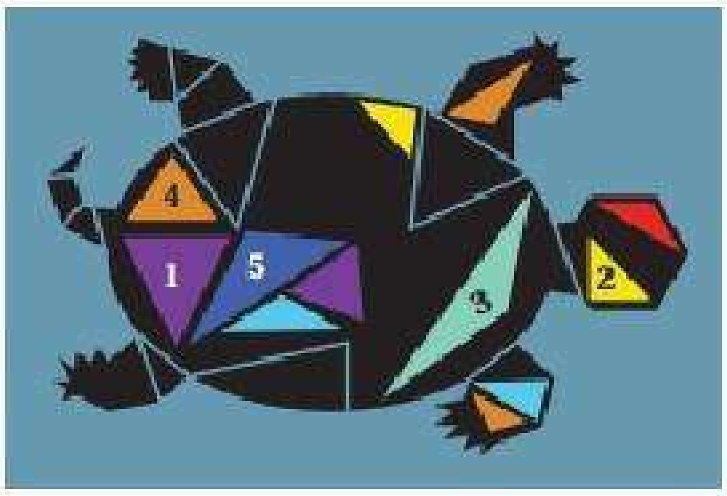
33) جبر: المثال ٥



بما أن المثلث متطابق الأضلاع إذن جميع أطوال أضلاعه متساوية.

$$\overline{HF} = \overline{FG}$$
$$6x + 1 = 3x + 10$$
$$6x - 3x = 10 - 1$$
$$3x = 9$$
$$x = 3$$
$$\overline{HF} = 6x + 1 = 6 \times 3 + 1 = 19$$
$$\overline{FG} = 3x + 10 = 3 \times 3 + 10 = 19$$
$$\overline{HG} = 9x - 8 = 9 \times 3 - 8 = 19$$

34) فن تشكيلي:



$\triangle 1$: حاد الزوايا متطابق الضلعين

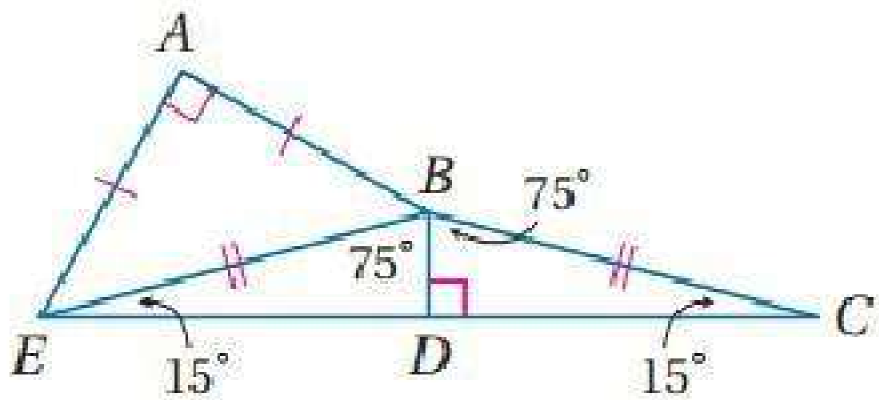
$\triangle 2$: قائم الزاوية مختلف الأضلاع

$\triangle 3$: منفرج الزاوية مختلف الأضلاع

$\triangle 4$: حاد الزوايا متطابق الأضلاع

$\triangle 5$: منفرج الزاوية مختلف الأضلاع

صنف كلا من المثلثات الظاهرة في الشكل المجاور وفق زواياه، ثم وفق أضلاعه:



35) $\triangle ABE$ قائم الزاوية لأن $\angle BAE = 90^\circ$ ومتطابق الضلعين لأن $\overline{AE} = \overline{AB}$

36) $\triangle EBC$ منفرج الزاوية لأن $\angle EBC = 150^\circ$ ومتطابق الضلعين $\overline{BE} = \overline{BC}$

37) $\triangle BDC$ قائم الزاوية ومختلف الأضلاع

هندسة إحداثية:

38)
$X(-5,9),\ Y(2,1),\ Z(-8,3)$

$X(-5,9),\ Y(2,1)$

$$d_{(X,Y)}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(2-(-5))^2+(1-9)^2}$$

$$\sqrt{49+64}=\sqrt{113}$$

$Y(2,1),\ Z(-8,3)$

$$d_{(Y,Z)}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(-8-2)^2+(3-1)^2}$$

$$\sqrt{100+4}=\sqrt{104}$$

$X(-5,9),\ Z(-8,3)$

$$d_{(X,Z)}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(-8-(-5))^2+(3-9)^2}$$

$$\sqrt{9+36}=\sqrt{45}$$

المثلث XYZ مختلف الأضلاع لأن جميع أطواله غير متساوية.

39)
$X(7,6),\ Y(5,1),\ Z(9,1)$

$X(7,6),\ Y(5,1)$

$$d_{(X,Y)}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(5-7)^2+(1-6)^2}$$

$$\sqrt{4+25}=\sqrt{29}$$

$Y(5,1),\ Z(9,1)$

$$d_{(Y,Z)}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(9-5)^2+(1-1)^2}$$

$$\sqrt{16+0}=\sqrt{4}$$

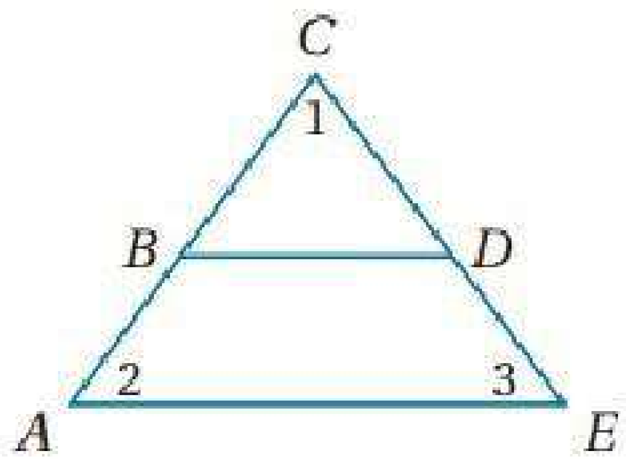
$X(7,6),\ Z(9,1)$

$$d_{(X,Z)}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(9-7)^2+(1-6)^2}$$

$$\sqrt{4+25}=\sqrt{29}$$

المثلث XYZ متطابق الضلعين لأن $\overline{XY}=\overline{XZ}$

40) برهان:



1) $\triangle ACE$ متطابق الزوايا و $\overline{BD} \parallel \overline{AE}$ (معطيات)

2) $\angle 3 \cong \angle 2 \cong \angle 1$ (تعريف المثلث المتطابق الزوايا)

3) $\angle CBD \cong \angle 2$ و $\angle CDB \cong \angle 3$ (مسلمة الزاويتين المتناظرتين)

4) $\angle CDB \cong \angle CBD \cong \angle 1$

5) $\triangle BCD$ متطابق الزوايا(تعريف المثلث المتطابق الزوايا)

جبر: أوجد قيمة x وأطوال أضلاع المثلث في كل مما يأتي:

(41

$\triangle FGH$ متطابق الأضلاع أي جميع أطواله متساوية

$HF = GH$

$x + 20 = 2x + 5$

$x - 2x = 5 - 20$

$-x = -15$

$x = 15$

$HF = x + 20 = 15 + 20 = 35$

$GH = 2x + 5 = 2 \times 15 + 5 = 35$

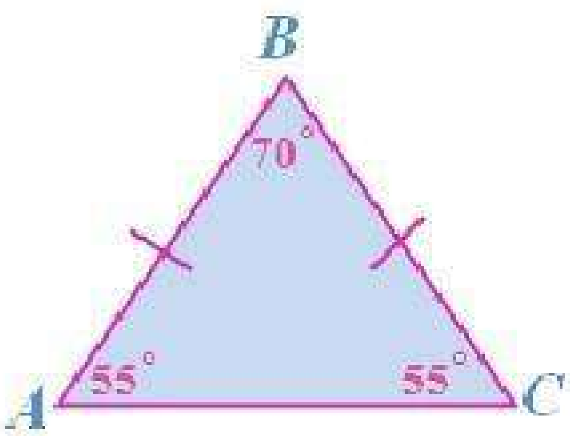
$FG = 3x - 10 = 3 \times 15 - 10 = 35$

(42

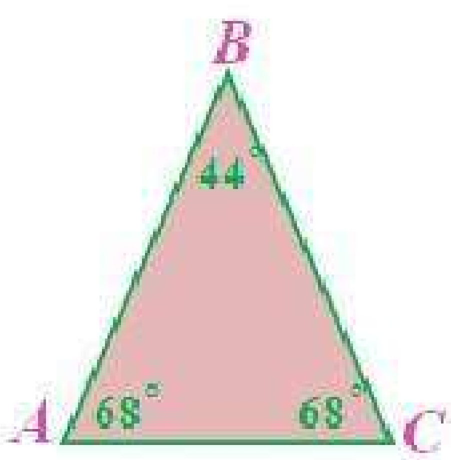
ΔRST متطابق الأضلاع أي جميع أطواله متساوية

$$RS = 4x + 3$$
$$ST = 2x + 7$$
$$TR = 5x + 1$$
$$RS = ST$$
$$4x + 3 = 2x + 7$$
$$4x - 2x = 7 - 3$$
$$2x = 4$$
$$x = 2$$
$$RS = 4x + 3 = 4 \times 2 + 3 = 11$$
$$ST = 2x + 7 = 2 \times 2 + 7 = 11$$
$$TR = 5x + 1 = 5 \times 2 + 1 = 11$$

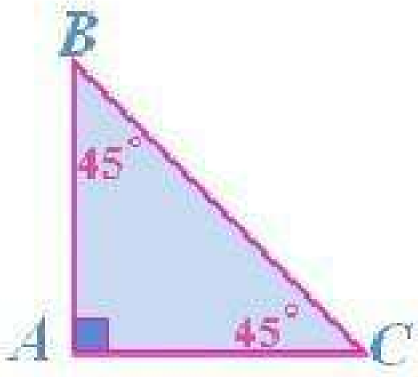
43) تمثيلات متعددة: a) هندسيا:



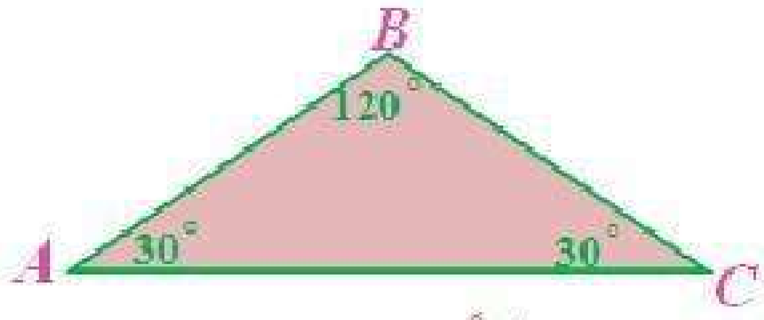
مثلث متطابق الأضلاع



مثلث حاد الزوايا



مثلث قائم الزاوية



مثلث منفرج الزاوية

b) جدولياً:

مجموع قياسات الزوايا	$m\angle B$	$m\angle C$	$m\angle A$
١٨٠	٧٠	٥٥	٥٥
١٨٠	٤٤	٦٨	٦٨
١٨٠	٩٠	٤٥	٤٥
١٨٠	١٢٠	٣٠	٣٠

c) لفظيا: الزاويتان المقابلتان للضلعين في المثلث المتطابق الضلعين متطابقان، ومجموع قياسات زوايا المثلث المتطابق الضلعين يساوي $180°$

d) جبريا:

إذا كان للزاويتين المقابلتين للضلعين في المثلث المتطابق الضلعين القياس نفسه وكان قياس إحداهما x، فان قياس الأخرى يساوي x وبما أن مجموع قياسات زوايا المثلث المتطابق الضلعين يساوي $180°$ فان قياس الزاوية الثالثة يساوي $180 - 2x$

مسائل مهارات التفكير العليا

44) اكتشف الخطأ:

ليلي إجابتها صحيحة، في أي مثلث توجد زاويتان حادتان على الأقل لذا فبحسب كلام نوال فان جميع المثلثات تصنف على أنها حادة الزوايا، وهذا غير صحيح، حيث تصنف المثلثات وفقا للزاوية الثالثة. فإذا كانت الزاوية الثالثة حادة، فالمثلث حاد الزوايا وإذا كانت منفرجة، فالمثلث منفرج الزاوية.

تبرير:

45) غير صحيحة أبدا، جميع المثلثات المتطابقة الزوايا فيها ثلاثة زوايا قياس كل منها 60 ولذلك فإنها لا تحتوى زاوية قياسها 90 فلا يمكن أن تكون قائمة الزاوية.

46) صحيحة دائما، المثلث المتطابق الأضلاع فيه ثلاثة أضلاع لها الطول نفسه والمثلث المتطابق الضلعين فيه ضلعان على الأقل لهما الطول نفسه ولذا فان جميع المثلثات المتطابقة الأضلاع تكون متطابقة الضلعين أيضا

47) تحد:

بما أن المثلث متطابق الأضلاع فان أطوال أضلاعه متساوية ويكون محيط المثلث المتطابق الأضلاع هو مجموع أطوال أضلاعه أو ثلاثة أمثال طول احد أضلاعه إذن محيط المثلث = $23 \times 3 = 69$

$$7x - 5 = 5x + 3$$

$$7x - 5x = 3 + 5$$

$$2x = 8$$

$$x = 4$$

$$7x - 5 = 7 \times 4 - 5 = 23$$

48) اكتب:

في المثلث الحاد الزوايا ثلاثة زوايا حادة والمثلث المتطابق الزوايا فيه ثلاث زوايا قياس كم منها 60 وبما أن الزوايا التي قياسها 60 هي زوايا حادة فان جميع المثلثات المتطابقة الزوايا هي مثلثات حادة الزوايا.

تدريب على الاختبار المعياري

49) C

$$84.50 \times \frac{40}{100} = 33.8$$

50) D

$$2x + y = 5$$
$$y = 5 - 2x$$
$$m = -2$$

مراجعة تراكمية

اوجد المسافة بين المستقيمين المتوازيين في كل مما يأتي:

51)
$(-2,0),(5,0)$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(5-(-2))^2 + (0-0)^2} = \sqrt{49} = 7$$

52)

رسم مستقيم عمودي على المستقيمين المتوازيين ويمر بالنقطة $(0,-4)$ وميله = -1

$$(y - y_1) = m(x - x_1) \rightarrow y + 4 = -1(x - 0)$$
$$y = -x - 4$$
$$-x - 4 = x + 2$$
$$-2x = 6$$
$$x = -3$$
$$y = -x - 4$$
$$y = -(-3) - 4$$
$$y = -1$$

$$(-3, -1),\ (0, -4)$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(0 - (-3))^2 + (-4 - (-1))^2}$$

$$= \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

53) كرة قدم: المستقيمان العموديان على مستقيم آخر متوازيان.

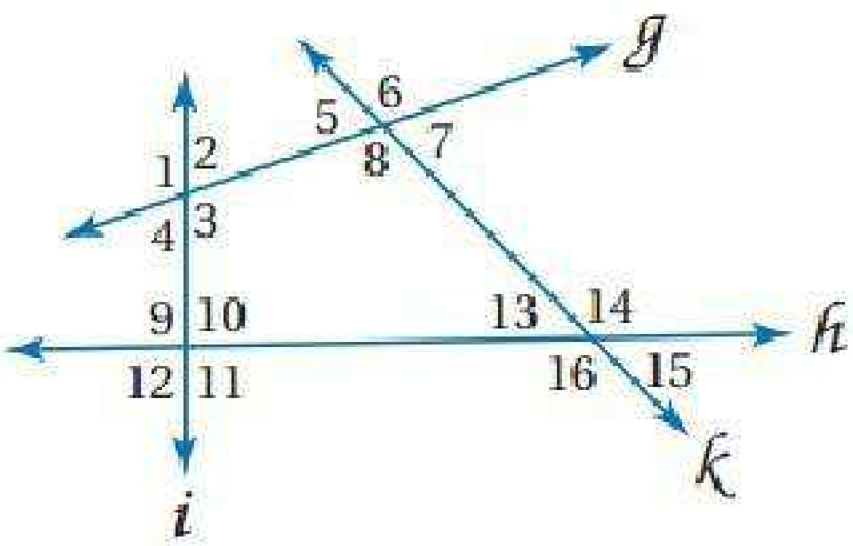
حدد الفرض والنتيجة في كل جملة شرطية فيما يأتي:

54) الفرض: كون الرجل كهلاً ، النتيجة: عمره 40 سنة على الأقل

55) الفرض: $2x + 6 = 10$ ، النتيجة: $x = 2$

استعد للدرس اللاحق

صنف كل زوج من الزوايا مما يأتي إلي متبادلتين داخليا أو متبادلتين خارجيا أو متناظرتين أو متخالفتين:



56) $\angle 5, \angle 3$: متبادلتان داخليا

57) $\angle 9, \angle 4$: متحالفتان داخليا

58) $\angle 11, \angle 13$: متبادلتان داخليا

59) $\angle 1, \angle 11$: متبادلتان خارجيا

معمل الهندسة

استكشاف

3-2 زوايا المثلثات

حل النتائج:

1) زاوية مستقيمة أو خط مستقيم

2) 180°

3) $m\angle A + m\angle B$ يساوي قياس الزاوية الخارجية المجاورة لـ $\angle C$

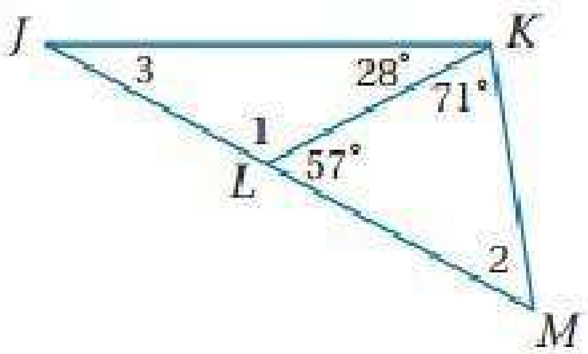
4) تختلف إجابات الطالب.

5) قياس الزاوية الخارجية يساوي مجموع قياسي الزاويتين الداخلتين غير المجاورتين لها.

3-2 زوايا المثلثات

تحقق صفحة ١٤٩

(1A



مجموع قياسات زوايا المثلث ΔLKM و ΔJKL = 180°

والزاويتان المتجاورتان على مستقيم = 180°

ΔLKM

$71^\circ + 57^\circ + \angle 2 = 180^\circ$

$\angle 2 = 180^\circ - 128$

$\angle 2 = 52^\circ$

$\angle 1 = 180^\circ - 57^\circ$

$\angle 1 = 123^\circ$

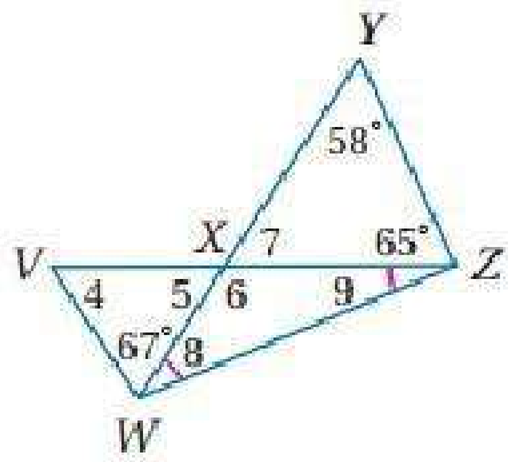
ΔJKL

$28^\circ + 123^\circ + \angle 3 = 180^\circ$

$\angle 3 = 180^\circ - 151^\circ$

$\angle 3 = 29^\circ$

(1B



ΔXYZ

$58^\circ + 65^\circ + \angle 7 = 180^\circ$

$123^\circ + \angle 7 = 180^\circ$

$\angle 7 = 57^\circ$

$\angle 7 = \angle 5 = 57^\circ$ نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس

ΔVXW

$67^\circ + 57^\circ + \angle 4 = 180^\circ$

$124^\circ + \angle 4 = 180^\circ$

$\angle 4 = 56^\circ$

$\angle 6 = 180^\circ - \angle 7$

$\angle 6 = 180^\circ - 57^\circ$ زاويتان متجاورتان على مستقيم

$\angle 6 = 123^\circ$

$$\angle 6 = 180^\circ - (\angle 9 + \angle 8)$$

$$123^\circ = 180^\circ - (\angle 9 + \angle 8)$$

$$\angle 9 = \angle 8$$

$$123^\circ = 180^\circ - (\angle 8 + \angle 8)$$

$$123^\circ = 180^\circ - 2\angle 8$$

$$2\angle 8 = 180^\circ - 123^\circ$$

$$2\angle 8 = 57^\circ$$

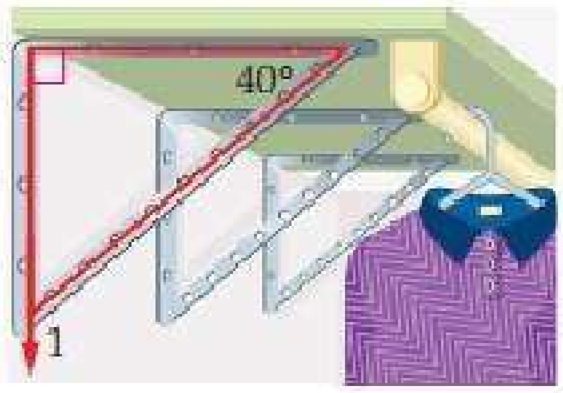
$$\angle 8 = 57^\circ \div 2$$

$$\angle 8 = 28.5^\circ$$

$$\angle 9 = 28.5^\circ$$

تحقق صفحة ١٥١

2) تنظيم خزانة الملابس

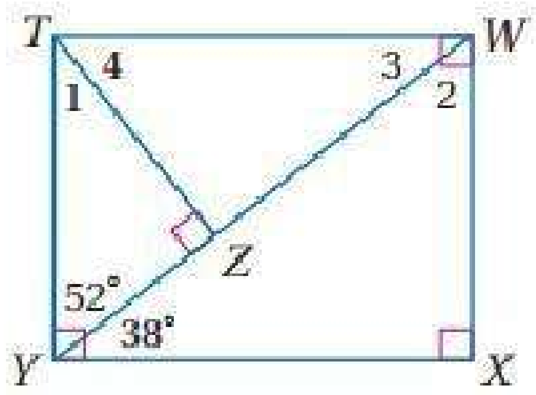


الزاوية الخارجة عن المثلث تساوي مجموع الزاويتين الداخلتين البعيدتين (نظرية الزاوية الخارجة)

$$\angle 1 = 90^\circ + 40^\circ$$

$$\angle 1 = 130^\circ$$

3A)



$\angle 2 + \angle WYX = 90^\circ$ زاويتان حادتان في مثلث قائم الزاوية

$\angle 2 + 38^\circ = 90^\circ$

$\angle 2 = 52^\circ$

3B)

$\angle 3 + \angle 2 = 90^\circ$

$\angle 3 + 52^\circ = 90^\circ$

$\angle 3 = 90^\circ - 52^\circ$

$\angle 3 = 38^\circ$

3C)

$\angle 4 + \angle 3 = 90^\circ$ زاويتان حادتان في مثلث قائم الزاوية

$\angle 4 + 38^\circ = 90^\circ$

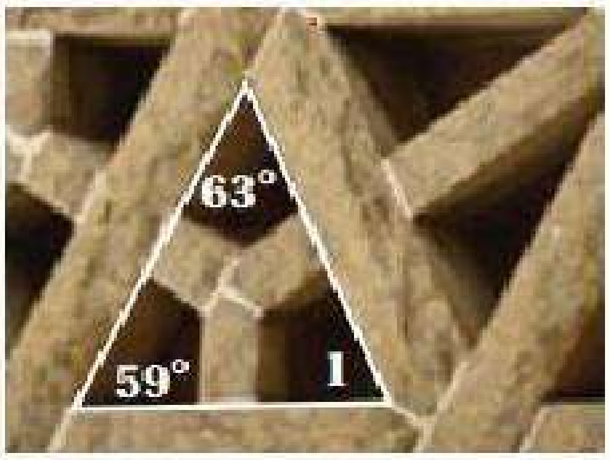
$\angle 4 = 90^\circ - 38^\circ$

$\angle 4 = 52^\circ$

تأكد

أوجد قياس كل من الزوايا المرقمة في كل من السؤالين الآتيين: المثال ١

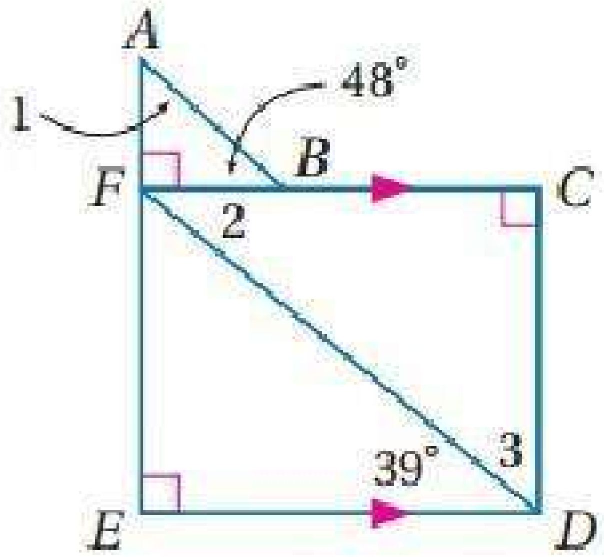
1)



بما أن زوايا المثلث الداخلة = 180° إذن:

$$\angle 1 = 180^\circ - (63^\circ + 59^\circ)$$
$$\angle 1 = 58^\circ$$

2)



$$\angle 1 = 180^\circ - (90^\circ + 48^\circ)$$
$$\angle 1 = 42^\circ$$

$\angle 2 = 39^\circ$ نظرية الزاويتان المتبادلتان داخلياً

$$\angle 3 = 90^\circ - 39^\circ$$
$$\angle 3 = 51^\circ$$

كراسي الشاطئ: المثال٢

3)

$\angle 2 + 53^\circ = 102^\circ$ نظرية الزاوية الخارجة عن مثلث

$\angle 2 = 102^\circ - 53^\circ$

$\angle 2 = 49^\circ$

4)

$\angle 4 = 180 - 53^\circ$

$\angle 4 = 127^\circ$

5)

$\angle 1 = 180^\circ - 102^\circ$ نظرية مجموع زوايا المثلث الداخلة = 180°

$\angle 1 = 78^\circ$

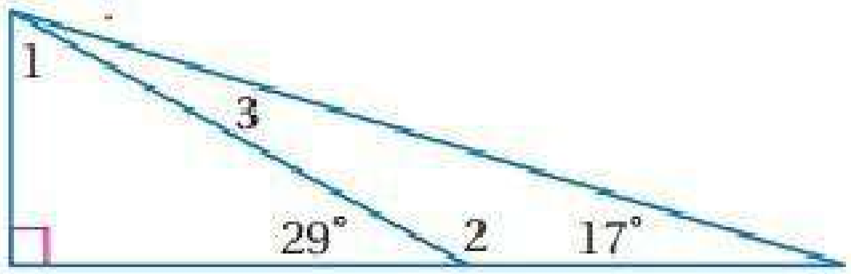
6)

$\angle 3 = 180 + \angle 3$

$\angle 3 = 180^\circ + 49^\circ$

$\angle 3 = 131^\circ$

معتمدا على الشكل المجاور أوجد القياسات التالية:



7)
$\angle 1 = 180 - (90^\circ + 29^\circ)$
$\angle 1 = 61^\circ$

نظرية زوايا المثلث الداخلة = 180°

8)
$\angle 1 + \angle 3 = 180 - (90^\circ + 17^\circ)$
$61^\circ + \angle 3 = 73^\circ$
$\angle 3 = 12^\circ$

نظرية زوايا المثلث الداخلة = 180°

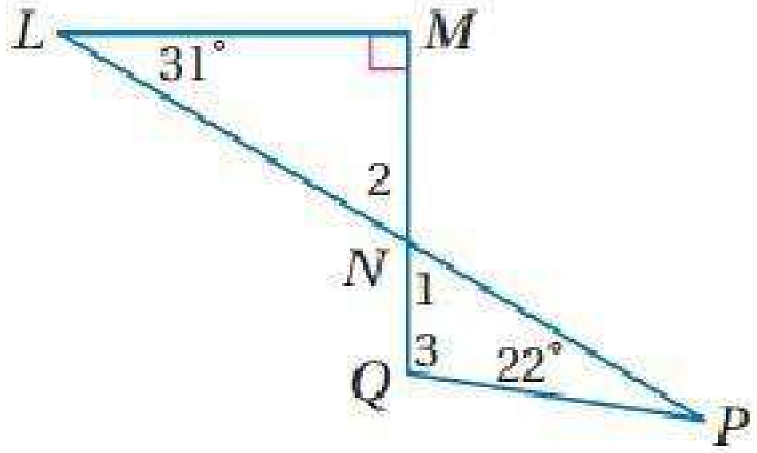
9)
$\angle 2 = 180 - (\angle 3 + 17^\circ)$
$\angle 2 = 180 - (12^\circ + 17^\circ)$
$\angle 2 = 151^\circ$

نظرية زوايا المثلث الداخلة = 180°

تدرب وحل المسائل

أوجد قياس الزوايا المرقمة في كل من السؤالين الآتيين:

10)
$\angle 1 = 180 - (59^\circ + 61^\circ)$
$\angle 1 = 60^\circ$



11)

$\angle 2 = 180 - (31^\circ + 90^\circ)$

$\angle 2 = 59^\circ$

$\angle 2 = \angle 1 = 59^\circ$ نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس

$\angle 3 = 180^\circ - (\angle 1 + 22)$

$\angle 3 = 180^\circ - (59 + 22)$

$\angle 3 = 99^\circ$

12) طائرات:

a) متطابق الضلعين، منفرج الزاوية

(b

بما أن زاوية الهبوط والإقلاع متطابقتين فإنهما متساويتان

وبما أن مجموع زوايا المثلث = 180° إذن:

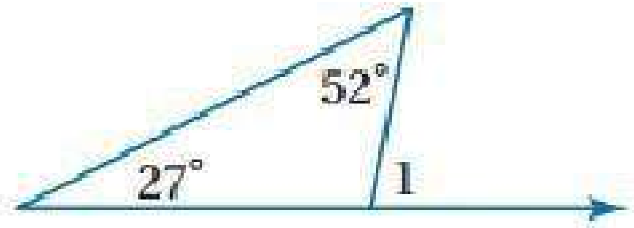
$7 = 180^\circ - 173^\circ$

$3.5 = 2 \div 7^\circ$

زاوية الهبوط والإقلاع = 3.5°

اوجد كلا من القياسات الآتية: المثال٢

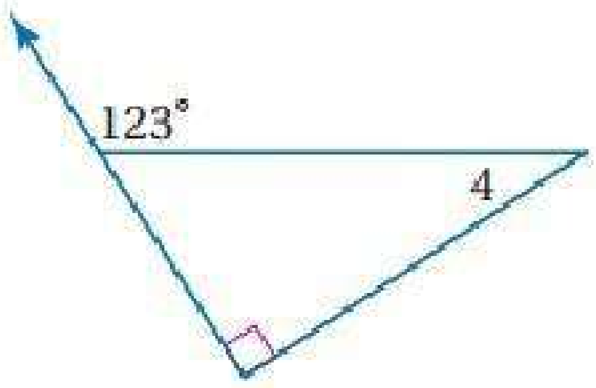
13)



$\angle 1 = 27^\circ + 52^\circ = 79^\circ$

نظرية الزاوية الخارجة عن المثلث

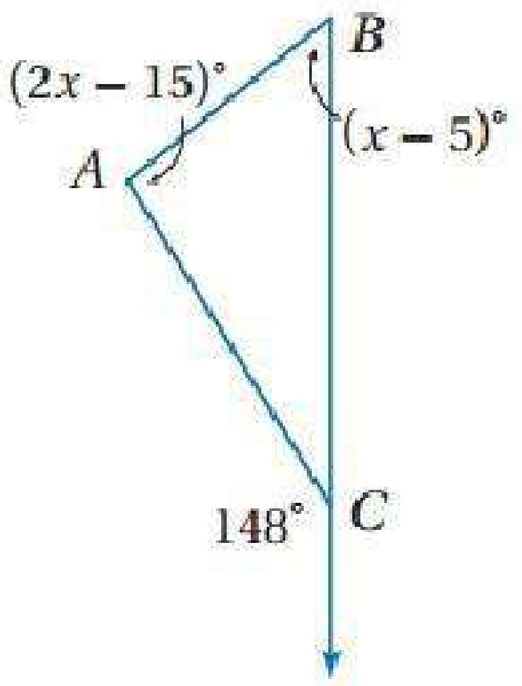
14)



$$123 = \angle 4 + 90^\circ$$
$$\angle 4 = 123^\circ - 90^\circ = 33^\circ$$

نظرية الزاوية الخارجة عن المثلث

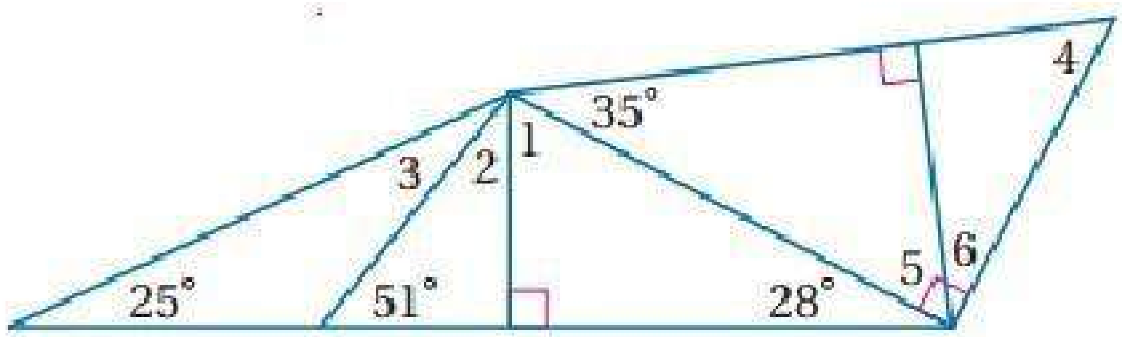
15)



$$148 = (2x - 15) + (x - 5)$$
$$148 = 3x - 20$$
$$148 + 20 = 3x$$
$$168 = 3x$$
$$x = 56^\circ$$
$$\angle ABC = x - 5 = 56 - 5 = 51^\circ$$

نظرية الزاوية الخارجة عن المثلث

اوجد كلا من القياسات الآتية: المثال٣



16)

$\angle 1 = 180^\circ - (90^\circ + 28^\circ)$ نظرية مجموع زوايا المثلث الداخلة = 180°

$\angle 1 = 62^\circ$

17)

$\angle 2 = 180^\circ - (90^\circ + 51^\circ)$ نظرية مجموع زوايا المثلث الداخلة = 180°

$\angle 2 = 39^\circ$

18)

$\angle 3 = 180^\circ - (129^\circ + 25^\circ)$

$\angle 3 = 26^\circ$

نظرية الزاويتان المتجاورتان للزاوية 51° ونظرية مجموع زوايا المثلث الداخلة = 180°

19)

$\angle 5 = 180^\circ - (35^\circ + 90^\circ)$ نظرية مجموع زوايا المثلث الداخلة = 180°

$\angle 5 = 55^\circ$

20) نظرية مجموع زوايا المثلث الداخلة = 180°

$\angle 4 = 180^\circ - (35^\circ + 90^\circ)$

$\angle 4 = 55^\circ$

21)

$\angle 6 = 180^\circ - (\angle 4 + 90^\circ)$

$\angle 6 = 180^\circ - (55 + 90^\circ)$ نظرية مجموع زوايا المثلث الداخلة = 180°

$\angle 6 = 35^\circ$

22) بستنة:

$\angle A = 3\angle B,\ \angle A = 3\angle C$

$\angle A = 180 - (\angle B + \angle C)$ مجموع زوايا المثلث الداخلة = 180°

$3(\angle B) = 180 - (\angle B + \angle C)$

$3(\angle C) = 180 - (\angle B + \angle C)$

$3(\angle B) = 180 - \angle B - \angle C$

$4\angle B = 180 - C$

$4\angle B + C = 180 \rightarrow 1$

$3(\angle C) = 180 - \angle B - \angle C$

$4\angle C = 180 - B$

$4\angle C + B = 180 \quad \times -4$

$-4B - 16\angle C = -720 \rightarrow 2$

$\cancel{-}15\angle C = \cancel{-}540$

$\angle C = \dfrac{540}{15}$

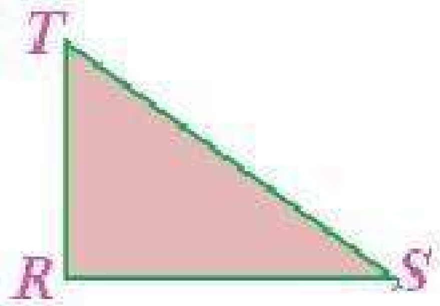
$\angle C = 36^\circ$ بجمع المعادلتين ١ و ٢

$\angle B = 36^\circ$

$\angle A = 3\angle B = 3 \times 36 = 108^\circ$

براهين: برهن كل مما يأتي مستعملا طريقة البرهان المذكورة:

23) النتيجة ٣,١ باستعمال البرهان التسلسلي.



$m\angle R + m\angle S + m\angle T = 180^\circ$

نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث

$\angle R$ زاوية قائمة

معطى

$m\angle R = 90^\circ$

تعريف الزاوية القائمة

$90 + m\angle S + m\angle T = 180^\circ$

بالتعويض

$m\angle S + m\angle T = 90^\circ$

خاصية الطرح للمساواة

$m\angle S , m\angle T$ زاويتان متتامتان

تعريف الزاويتان المتتامتان

٢٤) النتيجة ٣,٢ باستعمال البرهان الحر

البرهان:

ΔMNO فيه $\angle M$ قائمة.

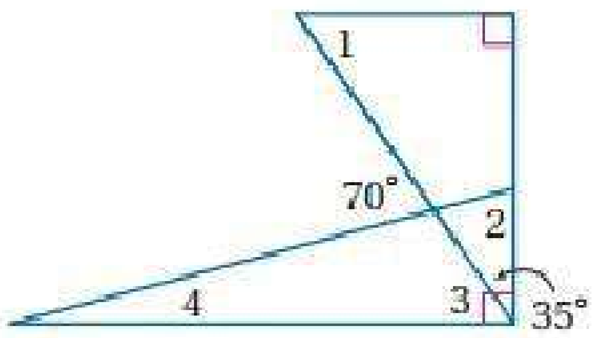
$m\angle O + m\angle N + m\angle M = 180^\circ$. $m\angle M = 90^\circ$، ولذلك فإن

$m\angle O + m\angle N = 90^\circ$. فإذا كانت N زاوية قائمة فسيكون

$m\angle O = 0^\circ$. وهذا مستحيل. لذلك لا يمكن أن يكون في المثلث زاويتان قائمتان.

أوجد قياس كل من الزوايا المرقمة فيما يأتي:

(25



$$m\angle 1 = 180 - \left(35^\circ + 90^\circ\right)$$
$$m\angle 1 = 180^\circ + 125^\circ$$
$$m\angle 1 = 55^\circ$$

نظرية مجموع زوايا المثلث الداخلة

الزاوية المجاورة ل 70° = 110° حسب نظرية الزاويتان المتجاورتان على مستقيم.

وكذلك الزاوية لمجاورة ل $110^\circ = 70^\circ$ حسب نظرية الزاويتان المتجاورتان على مستقيم.

$$m\angle 2 = 180 - \left(70^\circ + 35^\circ\right)$$
$$m\angle 2 = 75^\circ$$

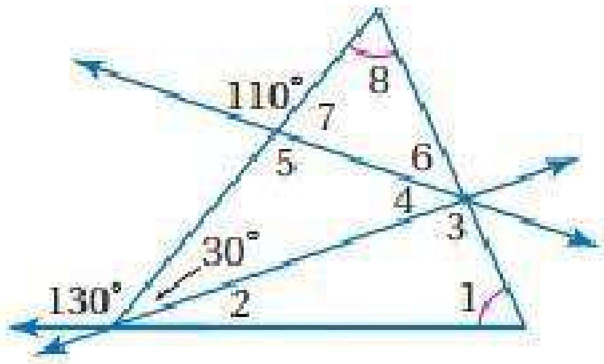
نظرية مجموع زوايا المثلث الداخلة

$$m\angle 4 = 180 - \left(m\angle 2 + 90^\circ\right)$$
$$m\angle 4 = 180 - \left(75^\circ + 90^\circ\right)$$
$$m\angle 4 = 15^\circ$$

نظرية مجموع زوايا المثلث الداخلة

$$m\angle 3 = 180^\circ - \left(m\angle 4 + 110^\circ\right)$$
$$m\angle 3 = 180^\circ - \left(15^\circ + 110^\circ\right)$$
$$m\angle 3 = 55^\circ$$

(26



زاويتان متجاورتان على مستقيم

$$m\angle 7 = 180^\circ - 110^\circ$$
$$m\angle 7 = 70^\circ$$

بالتقابل بالرأس

$$m\angle 5 = 110^\circ$$

$$m\angle 4 = 180^\circ - (110^\circ + 30^\circ)$$
$$m\angle 4 = 40^\circ$$

$$m\angle 2 = 180^\circ - (130^\circ + 30^\circ)$$
$$m\angle 2 = 20^\circ$$

نظرية مجموع زوايا المثلث الداخلة

$$(\angle 30^\circ + \angle 2) + (\angle 8 + \angle 1) = 180$$

$$\because \angle 8 = \angle 1$$

$$(30^\circ + 20^\circ) + (\angle 1 + \angle 1) = 180$$

$$50^\circ + 2\angle 1 = 180$$

$$2\angle 1 = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$$

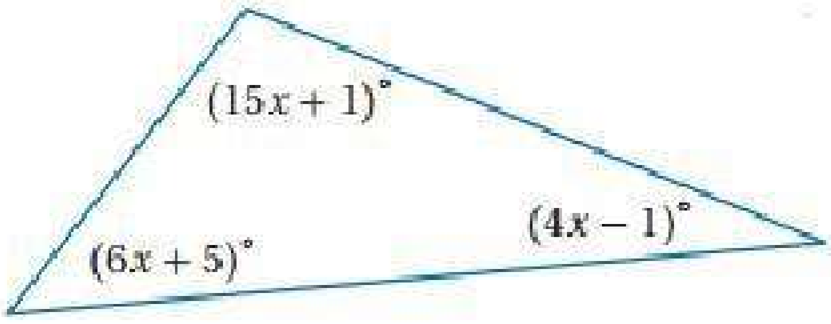
$$\angle 1 = 65^\circ$$

$$\angle 8 = 65^\circ$$

$$\angle 6 = 180^\circ - (\angle 8 + \angle 7)$$
$$\angle 6 = 180^\circ - (65^\circ + 70^\circ)$$
$$\angle 6 = 49^\circ$$

$$\angle 3 = 180^\circ - (\angle 1 + \angle 2)$$
$$\angle 3 = 180^\circ - (65^\circ + 20^\circ)$$
$$\angle 3 = 95^\circ$$

27) جبر: صنف المثلث المجاور وفقا لزواياه. وفسر إجابتك.



منفرج الزاوية لأن مجموع قياسات الزوايا 180، لذلك فان $x = 7$ ، وبالتعويض في العبارات الثلاث نجد أن قياسات الزوايا الثلاث هي 27 , 47 , 106

$$(15x+1)+(6x+5)+(4x-1)=180^\circ$$
$$25x+5=180^\circ$$
$$25x=175$$
$$x=7$$
$$15x+1=15\times 7+1=106^\circ$$
$$6x+5=47^\circ$$
$$4x-1=27^\circ$$

28) قرر ما إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أم خاطئة:

صحيحة، بما أن مجموع قياسي الزاويتين الحادتين أكبر من 90 فان قياس الزاوية الثالثة يساوي 180 ناقصا عددا أكبر من 90، وسيكون ناتج الطرح أقل من 90 بالتأكيد وعليه فان زوايا هذه المثلث الثلاث حداة وهو مثلث حاد الزوايا.

29) سيارات:

(a

حسب نظرية مجموع زوايا المثلث

$$\angle 2 = 180 - \left(70^\circ + 71^\circ\right)$$
$$\angle 2 = 39^\circ$$

حسب نظرية الزاوية الخارجة عن مثلث

$$\angle 1 = \left(70^\circ + 71^\circ\right)$$
$$\angle 1 = 141^\circ$$

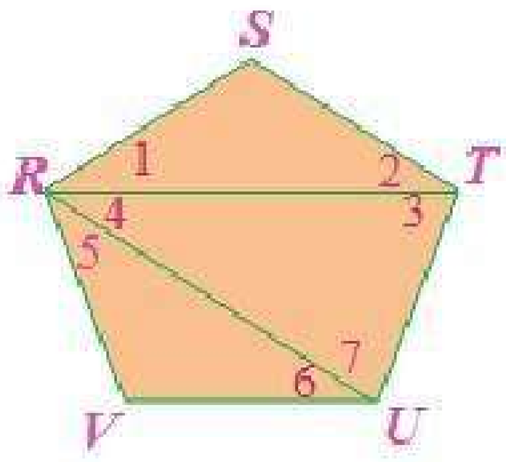
b) سوف يزداد قياس الزاوية 1، لان غطاء السيارة سيقترب من الساق الأخرى للمثلث المحاذية لرفوف السيارة.

c) سوف يقل قياس الزاوية2 ، لان قياس الزاوية 1 سوف يزداد ولان هاتين الزاويتين متجاورتان على مستقيم.

برهان:

30) برهان ذو عمودين:

1) $RSTUV$ خماسي (معطى)



2) $m\angle S + m\angle 1 + m\angle 2 = 180,\ m\angle 3 + m\angle 4 + m\angle 7 = 180,$
$m\angle 6 + m\angle V + m\angle 5 = 180$

(نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث)

3) $m\angle S + m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 + m\angle 4 + m\angle 7 + m\angle 6 +$
$m\angle V + m\angle 5 = 540$

خاصية الجمع للمساواة

4) $m\angle VRS = m\angle 1 + m\angle 4 + m\angle 5$

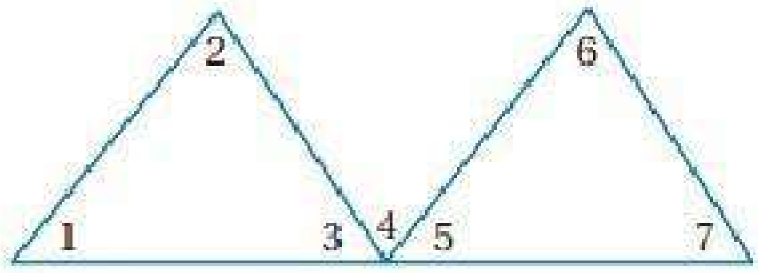
$m\angle TUV = m\angle 7 + m\angle 6,\ m\angle STU = m\angle 2 + m\angle 3$

(مسلمة جمع الزوايا)

5) $m\angle S + m\angle STU + m\angle TUV + m\angle V + m\angle VRS = 540$

(بالتعويض)

31) برهان تسلسلي:



$$m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle 4 + m\angle 5$$
$$m\angle 6 + m\angle 7 = m\angle 3 + m\angle 4$$

نظرية الزاوية الخارجية

$$\angle 3 = \angle 5$$

معطى

$$m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle 4 + m\angle 3$$

بالتعويض

$$m\angle 4 + m\angle 3 = m\angle 3 + m\angle 4$$

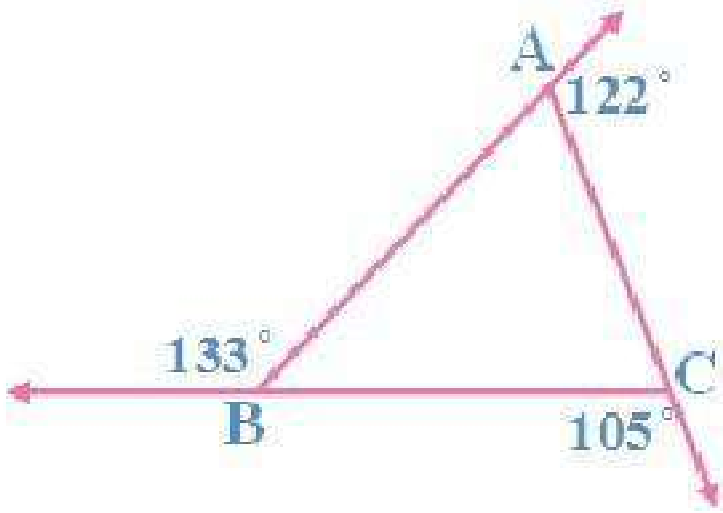
خاصية الإبدال

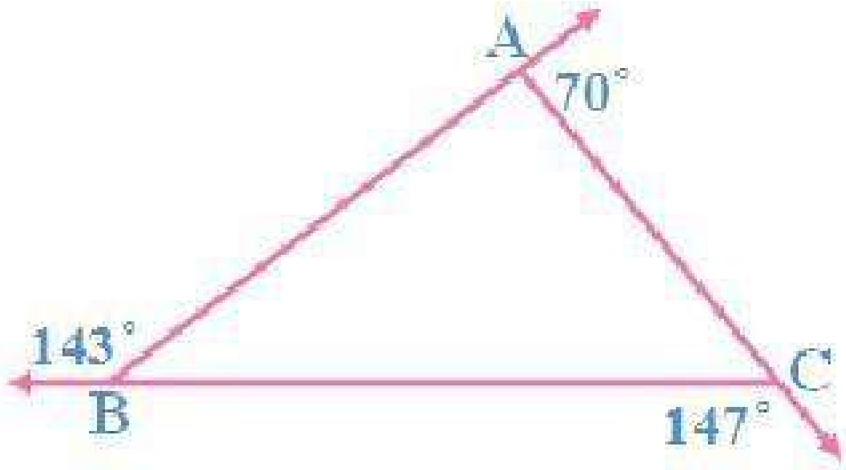
$$m\angle 1 + m\angle 2 = m\angle 6 + m\angle 7$$

بالتعويض

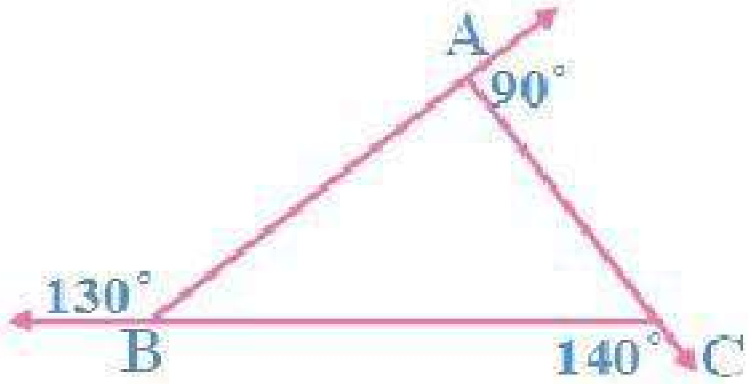
32) تمثيلات متعددة:

a) هندسيا:

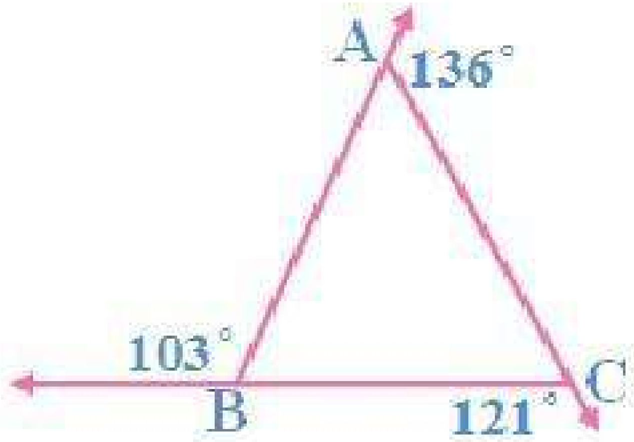




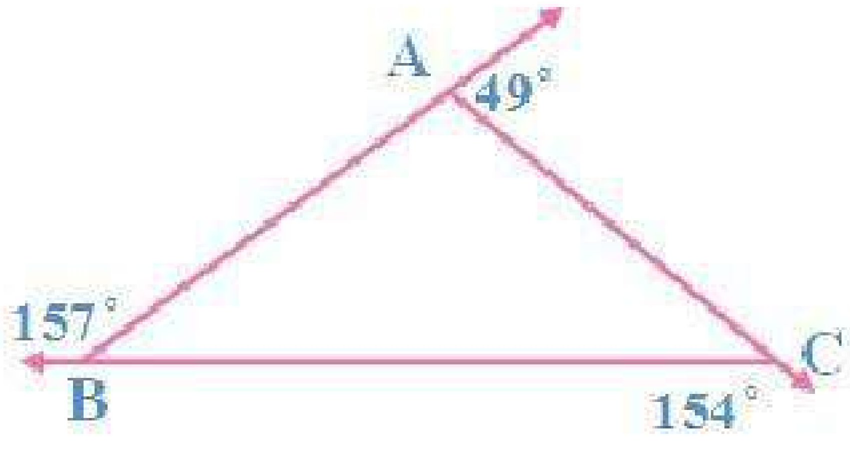
مثلث قائم الزاوية



مثلث حاد الزوايا



مثلث منفرج الزويا



b) جدوليا:

$\angle 1$	$\angle 2$	$\angle 3$	المجموع
١٢٢	١٠٥	١٣٣	٣٦٠
٧٠	١٤٧	١٤٣	٣٦٠
٩٠	١٤٠	١٣٠	٣٦٠
١٣٦	١٢١	١٠٣	٣٦٠
٤٩	١٥٤	١٥٧	٣٦٠

c) لفظيا: مجموع قياسات الزوايا الخارجية للمثلث يساوي 360°

d) جبريا: $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 360^\circ$

e) تحليليا:

تخبرنا نظرية الزاوية الخارجية بأن $m\angle 3 = m\angle CAB + m\angle BCA$

وأن $m\angle 1 = m\angle CBA + m\angle BCA$, $m\angle 2 = m\angle BAC + m\angle CBA$

وبالتعويض

$m\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = m\angle CBA + m\angle BCA + m\angle BAC + m\angle CBA$

$+ m\angle BCA + m\angle CAB$. ويمكن تبسيط هذه المعادلة بالشكل التالي:

$$m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 2m\angle CBA + 2m\angle BCA + 2m\angle BAC$$

وباستعمال خاصية التوزيع ينتج:

$$m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 2\left(m\angle CBA + m\angle BCA + m\angle BAC\right)$$

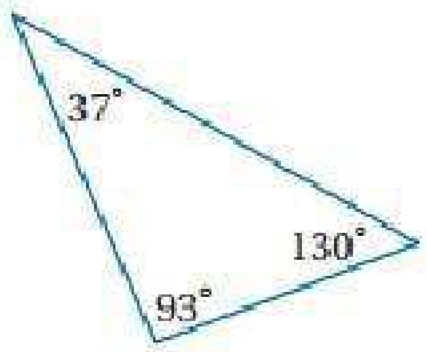
وتحبرنا نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث أن

$m\angle CBA + m\angle BCA + m\angle BAC = 180^\circ$ وبالتعويض ينتج أن

$$m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = 2(180) = 360^\circ$$

مسائل مهارات التفكير العليا

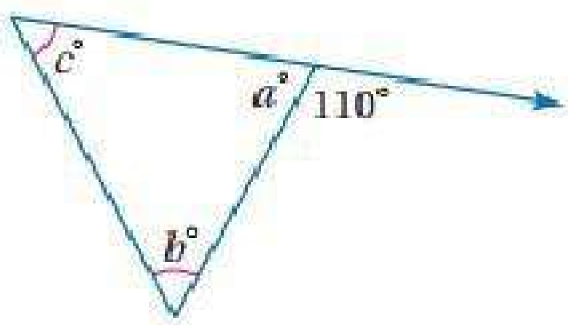
33) اكتشف الخطأ:



تنص النتيجة 3.2 على انه يمكن أن يكون في أي مثلث زاوية قائمة أو منفرجة واحدة على الأكثر، وبما أنه كتب في المثلث قياسان لزاويتين منفرجتين 130 , 93 فإن واحدا على الأقل منها غير صحيح.

وبما أن مجموع قياسات زوايا المثلث يساوي 180 حسب نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث ومجموع القياسات المسجلة في هذا المثلث $= 260^\circ$ فإن واحدا على الأقل من هذه القياسات غير صحيح

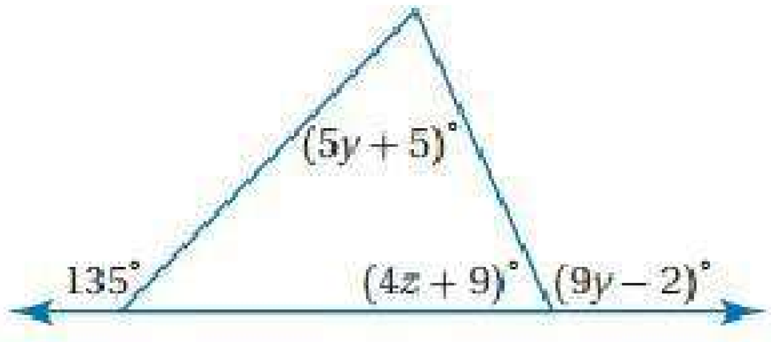
34) اكتب:



$\angle a = 70^\circ$ لأن هذه الزاوية والزاوية التي قياسها 110° متجاورتان على مستقيم

وبما أن $m\angle b = m\angle c$ ومجموعهما يساوي 110° إذن $m\angle b = m\angle c = 55^\circ$

35) تحد:



$$(4z+9)^\circ+(9y-2)^\circ=180^\circ$$

$$4z+9+9y-2=180^\circ$$

$$4z+9y=180^\circ-7$$

$$4z+9y=173\rightarrow 1$$

$$(5y+5)^\circ+(4z+9)^\circ=135^\circ$$

$$5y+5+4z+9=135^\circ$$

$$5y+4z=135^\circ-14$$

$$4z+5y=121 \quad \times\text{-}1$$

$$-4z-5y=-121\rightarrow 2$$

بجمع المعادلة ١ و ٢

$$4y=52$$

$$y=13$$

$$4z+9y=173$$

$$4z+9\times 13=173$$

$$4z=56$$

$$z=14$$

36) تبرير:

منفرج الزاوية، لان الزاوية الخارجية حادة ومجموع الزاويتين البعيدتين أقل من 90 لذا فان الزاوية الثالثة ستكون أكبر من 90 حتماً.

تدريب على الاختبار المعياري

37) B

$7x - 3(2 - 5x) = 8x$

$7x - 6 + 15x = 8x$

$22x - 6 = 8x$

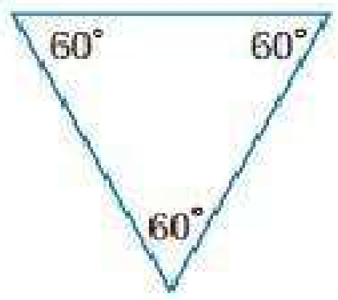
38) C

$a + b = 90^\circ$

مراجعة تراكمية

صنف كلا من المثلثات الآتية إلى حاد الزوايا أو متطابق الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية:

39)

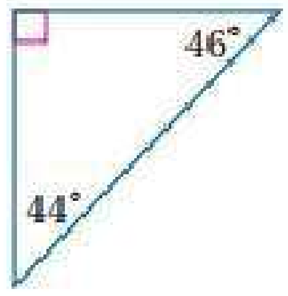


متطابق الزوايا لأن جميع زواياه متساوية في القياس

40)

منفرج الزاوية لأن يوجد زاوية قياسها أكبر من 90°

(41



قائم الزاوية لأن يوجد زاوية قياسها = 90°

هندسة إحداثية:

42)

$(0,-2)$,$(1,3)$

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{3-(-2)}{1-0}=\frac{5}{1}=5$$

$(1,3)$

$y=mx+b \rightarrow 3=5\times1+b$

$b=3-5$

$b=-2$

معادلة المستقيم l: $y=5x-2$

ميل المستقيم العمودي على l = $\frac{-1}{5}$ لأن $-1=\frac{-1}{5}\times5$ ، $P(-4,4)$

$$y=mx+b \rightarrow 4=\frac{-1}{5}\times-4+b$$

$$b=\frac{16}{5}$$

معادلة المستقيم العمودي على المستقيم l والمار بالنقطة $P(-4,4)$ هي:

$y=\frac{-1}{5}x+\frac{16}{5}$ ضرب المعادلة في $-1 \leftarrow$

$-y=\frac{1}{5}x-\frac{16}{5}$

$$\begin{aligned} y &= 5x - 2 \\ (+) - y &= \frac{1}{5}x - \frac{16}{5} \\ \hline 0 &= \frac{26}{5}x - \frac{26}{5} \end{aligned}$$

$$x = 1$$
$$y = 5x - 2$$
$$y = 5 \times 1 - 2$$
$$y = 3$$

$$(1,3),\ (-4,4)$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(4-3)^2 + (-4-1)^2}$$

$$\sqrt{1+25} = \sqrt{26}$$

البعد بين L, P: $\sqrt{26}$ وحدة

(43

المستقيم l الإحداثي الصادي للنقطتين المار بهما = 0 أي ان المستقيم هو المحور X
لذا فإن المسافة بين النقطة $P\,(4,3)$ و المحور X هو الإحداثي الصادي للنقطة P
أي 3 وحدات.

استعد للدرس اللاحق

اكتب الخاصية المستعملة (الانعكاس، التماثل، التعدي) في كل عبارة مما يلي:

44) الانعكاس

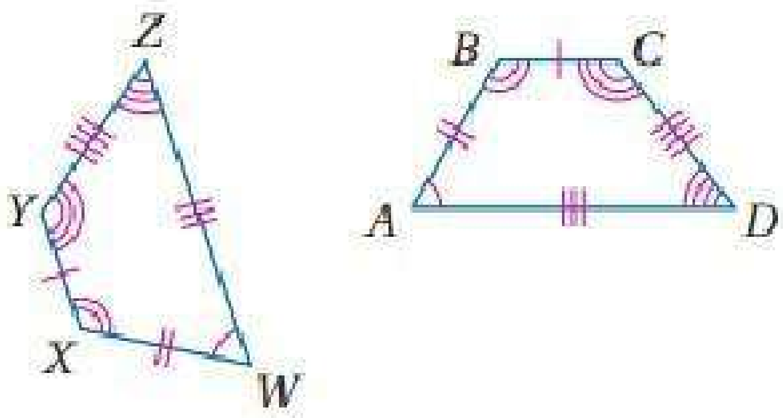
45) التماثل

46) التعدي

3-3 المثلثات المتطابقة

تحقق

(1A

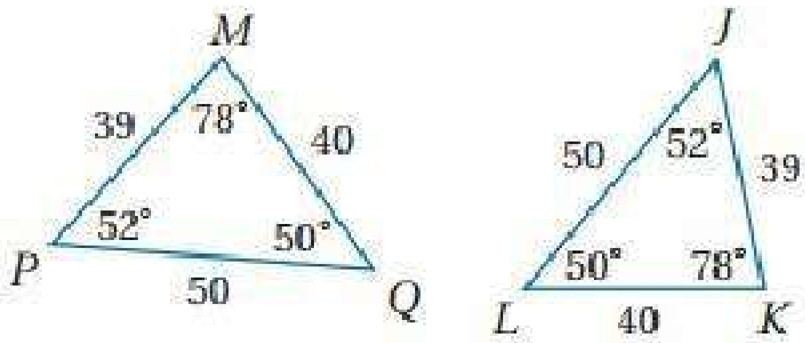


الزوايا: $\angle B \cong \angle X$, $\angle C \cong \angle Y$
$\angle A \cong \angle W$, $\angle D \cong \angle Z$

الأضلاع: $AB \cong WX$, $BC \cong XY$, $CD \cong YZ$, $DA \cong ZW$

المضلع $ABCD \cong$ المضلع $WXYZ$

(1B

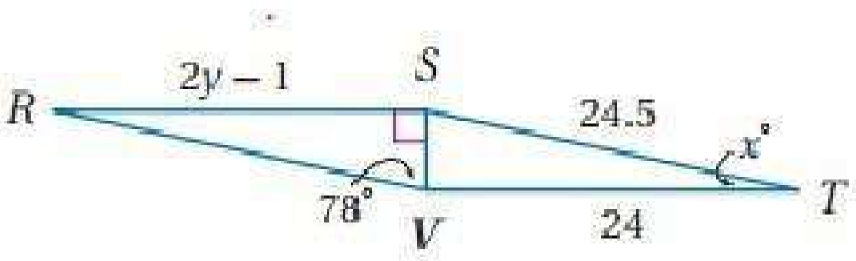


الزوايا: $\angle L \cong \angle Q$, $\angle K \cong \angle M$, $\angle J \cong \angle P$

الأضلاع: $JK \cong PM$, $KL \cong MQ$, $LJ \cong QP$

المثلث $PMQ \cong$ المثلث JKL

(2



$\because \Delta RSV \cong \Delta TVS$

$RS = TV$ تعريف التطابق

$2y - 1 = 24$ بالتعويض

$2y = 25$

$y = 25 \div 2$

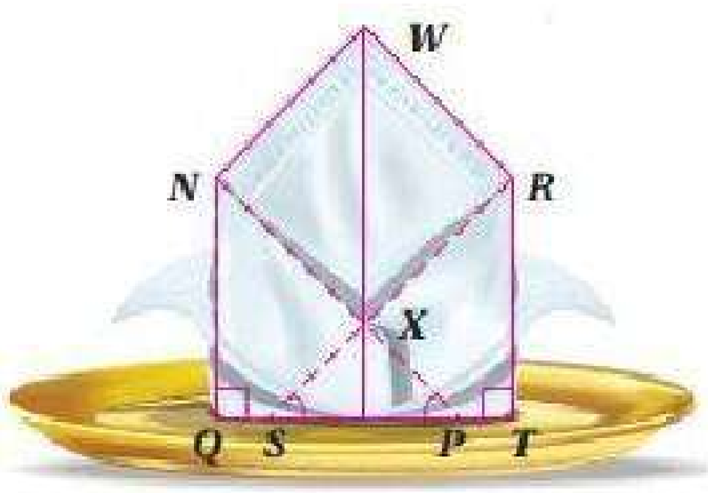
$y = 12.5$

$\angle TSV = \angle SVR = 78^\circ$ تعريف التطابق

$\angle STV = 180^\circ - (78^\circ + 90^\circ)$ نظرية مجموع زوايا المثلث

$\angle STV = 12^\circ$

(3



بما أن $\overline{WX}$ منصفا لزاوية $\angle NXR$ إذن $\angle WXR = \angle NXW = 49^\circ$

بما أن $\Delta WRX \cong \Delta WNX$ إذن $\angle WRX = \angle WNX = 88^\circ$ تعريف التطابق

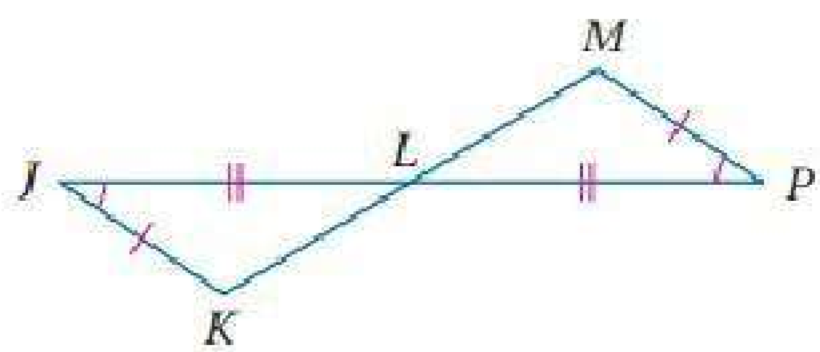
$\angle RWX = 43^\circ$ حسب نظرية مجموع زوايا المثلث

$\angle RWX = \angle NWX$ تعريف التطابق

$m\angle NWR = m\angle RWX + m\angle NWX$

$m\angle NWR = 43^\circ + 43^\circ = 86^\circ$

4)



$\angle P \cong \angle J$, $\overline{PL} \cong \overline{JL}$, $\overline{PM} \cong \overline{JK}$ (معطى)

L تنصف $\overline{KM}$ (معطى)

$\overline{KL} \cong \overline{LM}$ (تعريف التنصيف)

$\angle JLK \cong \angle MLP$ (حسب نظرية الزاويتان المتقابلتان بالرأس)

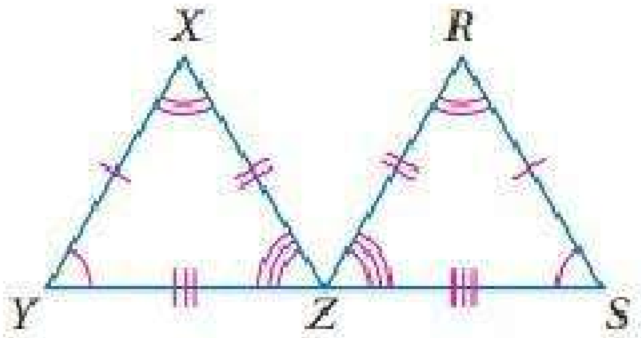
$\angle K \cong \angle M$ (نظرية الزاوية الثالثة)

بما أن جميع زوايا المثلثين متطابقة والأضلاع متطابقة إذن

$\Delta JLK \cong \Delta PLM$

في كل من السؤالين الآتيين، بين أن المضلعين متطابقان بتعيين جميع العناصر المتناظرة المتطابقة، ثم اكتب عبارة التطابق: المثال ١

1)

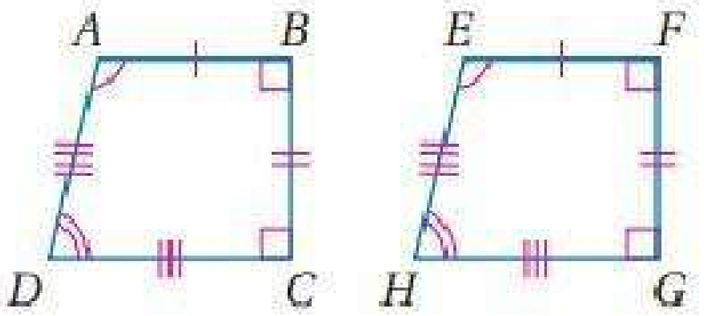


$\angle Y \cong \angle S$, $\angle X \cong \angle R$, $\angle XZY \cong \angle RZS$

$\overline{YX} \cong \overline{SR}$, $\overline{YZ} \cong \overline{SZ}$, $\overline{XZ} \cong \overline{RZ}$

$\Delta YXZ \cong \Delta SRZ$

1)

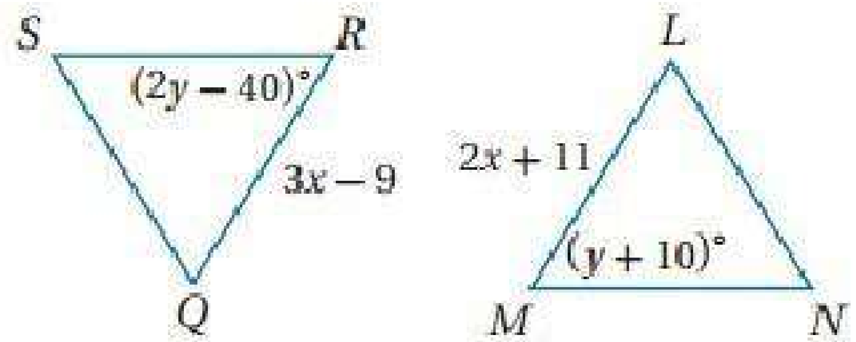


$\angle A \cong \angle E$, $\angle B \cong \angle F$, $\angle C \cong \angle G$, $\angle D \cong \angle H$

$\overline{AB} \cong \overline{EF}$, $\overline{CD} \cong \overline{GH}$, $\overline{AD} \cong \overline{EH}$, $\overline{BC} \cong \overline{FG}$

$EFGH \cong ABCD$

في الشكلين المجاورين، فأوجد: المثال٢



3)

$\because \Delta LMN \cong \Delta QRS$

$\therefore \overline{LM} \cong \overline{QR}$

$2x+11=3x-9$

$-x=-9-11=-20$

$y=20$

4)

$\because \Delta LMN \cong \Delta QRS$

$\therefore \angle M = \angle R$

$(y+10)^\circ=(2y-40)^\circ$

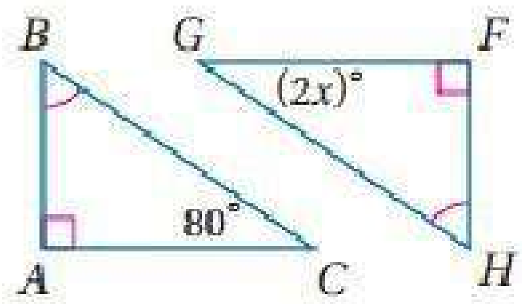
$-y=-40-10$

$-y=-50$

$y=50$

في كل من السؤالين الآتيين، أوجد قيمة x ، وفسر إجابتك: المثال٣

(5



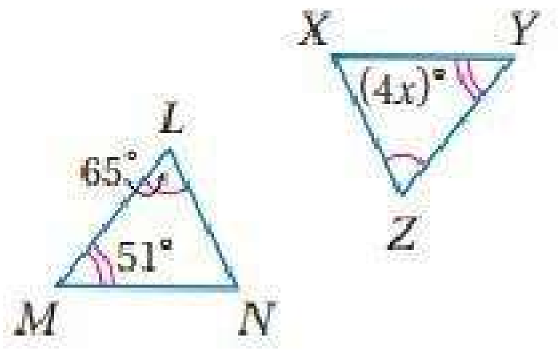
بما أن كل من ΔBAC , ΔGFH يحتويان على زاويتان متطابقتان في كل منهما
إذن قياس الزاوية الثالثة في كل منهما متطابقتان حسب نظرية الزاوية الثالثة

$\angle G \cong \angle C$

$2x=80$

$x=40$

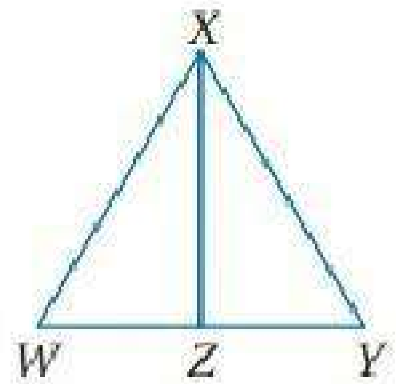
(6



بما أن كل من ΔMLN , ΔXYZ يحتويان على زاويتان متطابقتان في كل منهما
إذن قياس الزاوية الثالثة في كل منهما متطابقتان حسب نظرية الزاوية الثالثة

$$\angle X \cong \angle N$$
$$4x = \angle N$$
$$\angle N = 180 - (65 + 51)$$
$$\angle N = 64^\circ$$
$$4x = 64^\circ$$
$$x = 16$$

7) برهان: اكتب برهانا حرا.



نعلم أن $\overline{XZ} \cong \overline{XZ}$, $\overline{WZ} \cong \overline{YZ}$, $\overline{WX} \cong \overline{YX}$

$\angle XZW \cong \angle XZY$, $\angle WXZ \cong \angle YXZ$

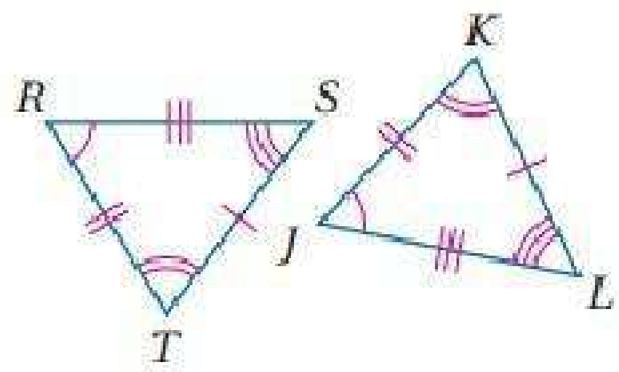
وحسب نظرية الزاوية الثالثة تكون $\angle W = \angle Y$

إذن $\Delta WXZ \cong \Delta YXZ$

تدرب وحل المسائل

في كل من السؤالين الآتيين، بين أن المضلع ين متطابقان بتعيين جميع العناصر المتناظرة، ثم اكتب عبارة التطابق:

(8

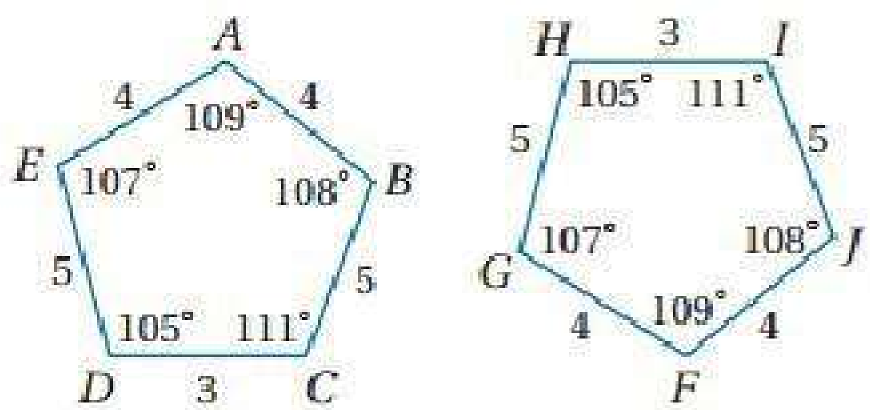


$\angle R \cong \angle J \,,\ \angle T \cong \angle K \,,\ \angle S \cong \angle L$

$\overline{RT} \cong \overline{JK} \,,\ \overline{TS} \cong \overline{KL} \,,\ \overline{RS} \cong \overline{JL}$

إذن $\triangle RTS \cong \triangle JKL$

(9

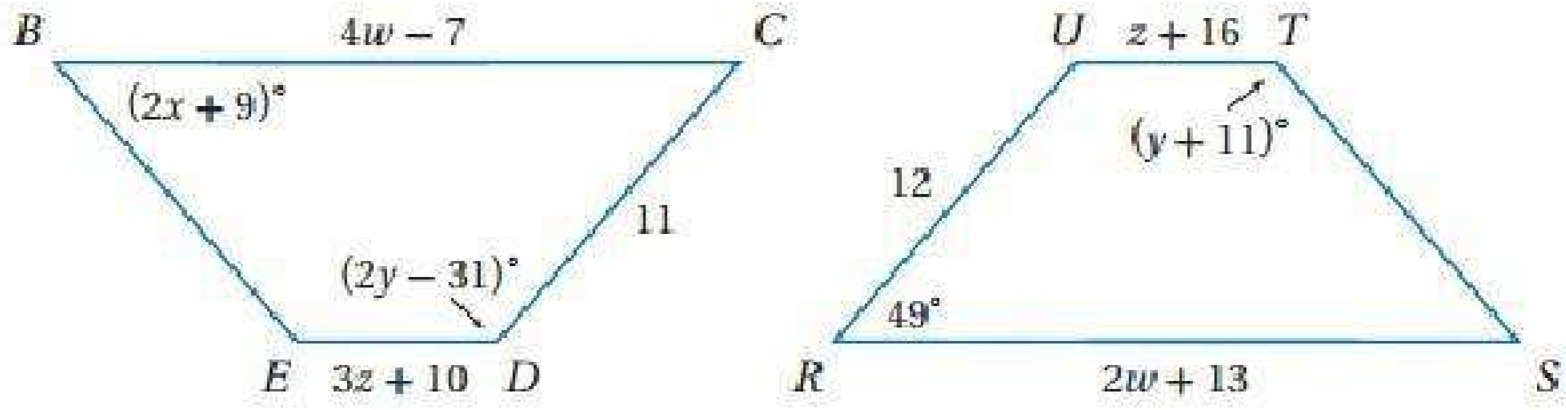


$\angle A \cong \angle F \,,\ \angle B \cong \angle J \,,\ \angle C \cong \angle I \,, \angle D = \angle H \,, \angle E = \angle G$

$\overline{AB} \cong \overline{FJ} \,,\ \overline{BC} \cong \overline{JI} \,,\ \overline{CD} \cong \overline{IH} \,,\ \overline{DE} \cong \overline{HG} \,,\ \overline{AE} \cong \overline{FG}$

إذن المضلع $FJIHG$ = المضلع $ABCDE$

أوجد قيمة كل مما يأتي:



بما أن المضلع $BCDE \cong$ المضلع $RSTU$

10)

$\therefore \angle R \cong \angle B$

$49^\circ = 2x + 9$

$49 - 9 = 2x$

$x = 20$

11)

$\therefore \angle D \cong \angle T$

$(2y - 31)^\circ = (y + 11)^\circ$

$y = 11 + 31$

$y = 42$

12)

$\therefore \overline{ED} \cong \overline{UT}$

$(3z + 10)^\circ = (z + 16)^\circ$

$2z = 16 - 10$

$z = 3$

13)

$\therefore \overline{BC} \cong \overline{RS}$

$(4w - 7)^\circ = (2w + 13)^\circ$

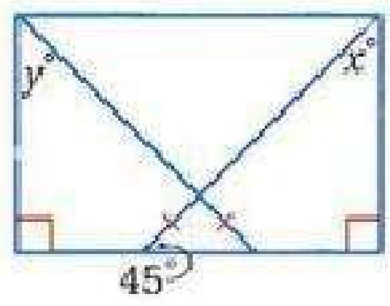
$2w = 13 + 7$

$2w = 20$

$10 = w$

أوجد قيمة كل من y , x في الأسئلة الآتية:

(14

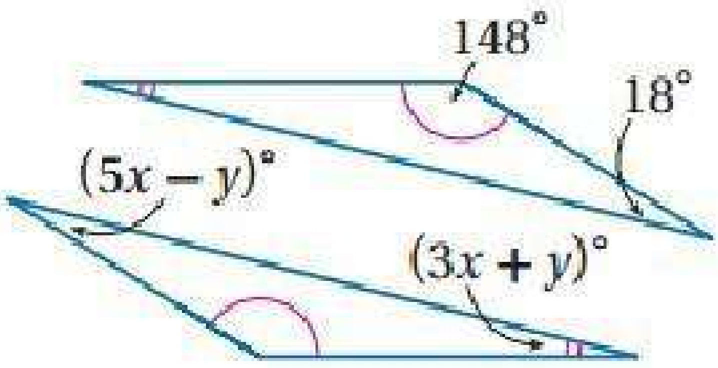


$45^\circ = y$

$45^\circ = x$

لأن المثلث المتطابق الضلعين زواياه القاعدة له متساوية وكل منها = ٤٥

(15



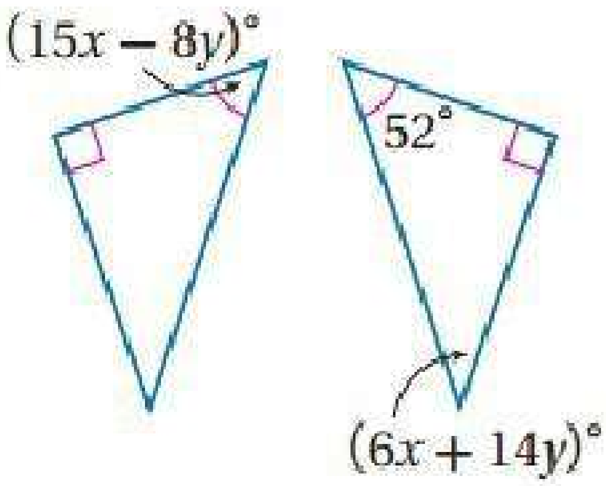
$$(3x + y)^\circ = 180^\circ - (18^\circ + 148^\circ)$$

$$3x + y = 14 \rightarrow 1$$
$$5x - y = 18 \rightarrow 2$$

$$8x = 32$$
$$x = 4$$

$$5 \times 4 - y = 18$$
$$y = 20 - 18$$
$$y = 2$$

(16



$$(15x - 8y)^{\circ} = 52^{\circ}$$

$$(6x + 14y)^{\circ} = 180 - (52 + 90)$$

$$6x + 14y = 38 \rightarrow \div 2$$

$$3x + 7y = 19 \rightarrow \times (-5)$$

$$-15x - 35y = -95 \rightarrow 1$$

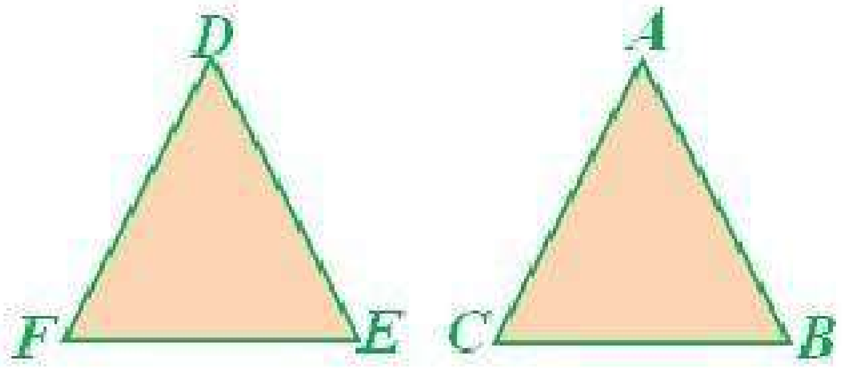
$$15x - 8y = 52 \rightarrow 2$$

$$0 - 43y = -43$$
$$y = 1$$

$$15x - 8 \times 1 = 52$$

$$15x = 60$$
$$x = 4$$

17) **برهان:** المثال ٤



1) $\angle A \cong \angle D, \angle B \cong \angle E$ (معطيات)

2) $m\angle A = m\angle D, m\angle B = m\angle E$ (تعريف الزوايا المتطابقة)

3) $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^\circ, m\angle D + m\angle E + m\angle F = 180^\circ$

(نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث)

4) $m\angle A + m\angle B + m\angle C = m\angle D + m\angle E + m\angle F$ (خاصية التعدي)

5) $m\angle D + m\angle E + m\angle C = m\angle D + m\angle E + m\angle F$ (خاصية التعويض)

6) $m\angle C = m\angle F$ (خاصية الطرح للمساواة)

7) $\angle C \cong \angle F$ (تعريف تطابق الزوايا)

18) برهان:

$\Delta RST = \Delta XYZ$

↓ معطى

$\angle R \cong \angle X , \angle S \cong \angle Y , \angle T \cong \angle Z ,$
$\overline{RS} \cong \overline{XY} , \overline{ST} \cong \overline{YZ} , \overline{RT} \cong \overline{XZ}$

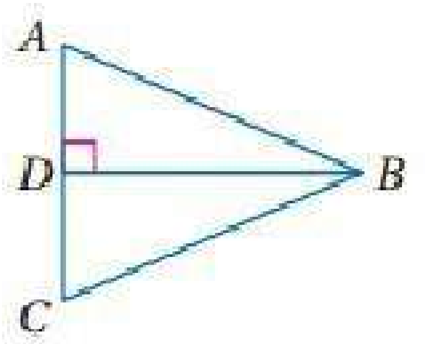
↓ العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة

$\angle X \cong \angle R , \angle Y \cong \angle S , \angle Z \cong \angle T ,$
$\overline{XY} \cong \overline{RS} , \overline{YZ} \cong \overline{ST} , \overline{XZ} \cong \overline{RT}$

↓ تطابق الزوايا والقطع المستقيمة يحقق خاصية التماثل

$\Delta XYZ \cong \Delta RST$

19) برهان:



1) $\overline{BD}$ تنصف $\angle B$ ، $\overline{AC} \perp \overline{BD}$. (معطيات)

2) $\angle ABD \cong \angle DBC$ (تعريف منصف الزوايا)

3) $\angle ADB , \angle BDC$ قائمتان (المستقيمان المتعامدان يكونان زاوية قائمة)

4) $\angle ADB \cong \angle BDC$ (الزوايا القائمة متطابقة)

5) $\angle A \cong \angle C$ نظرية الزاوية الثالثة

برهان:

(20

نعلم أن $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ ولأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين تكون متطابقة فإن: $\angle A \cong \angle D, \angle B \cong \angle E, \angle C \cong \angle F$ ،

$AB \cong DE, BC \cong EF, AC \cong DF$.

نعلم أن $\Delta DEF \cong \Delta GHI$ ولذا فإن:

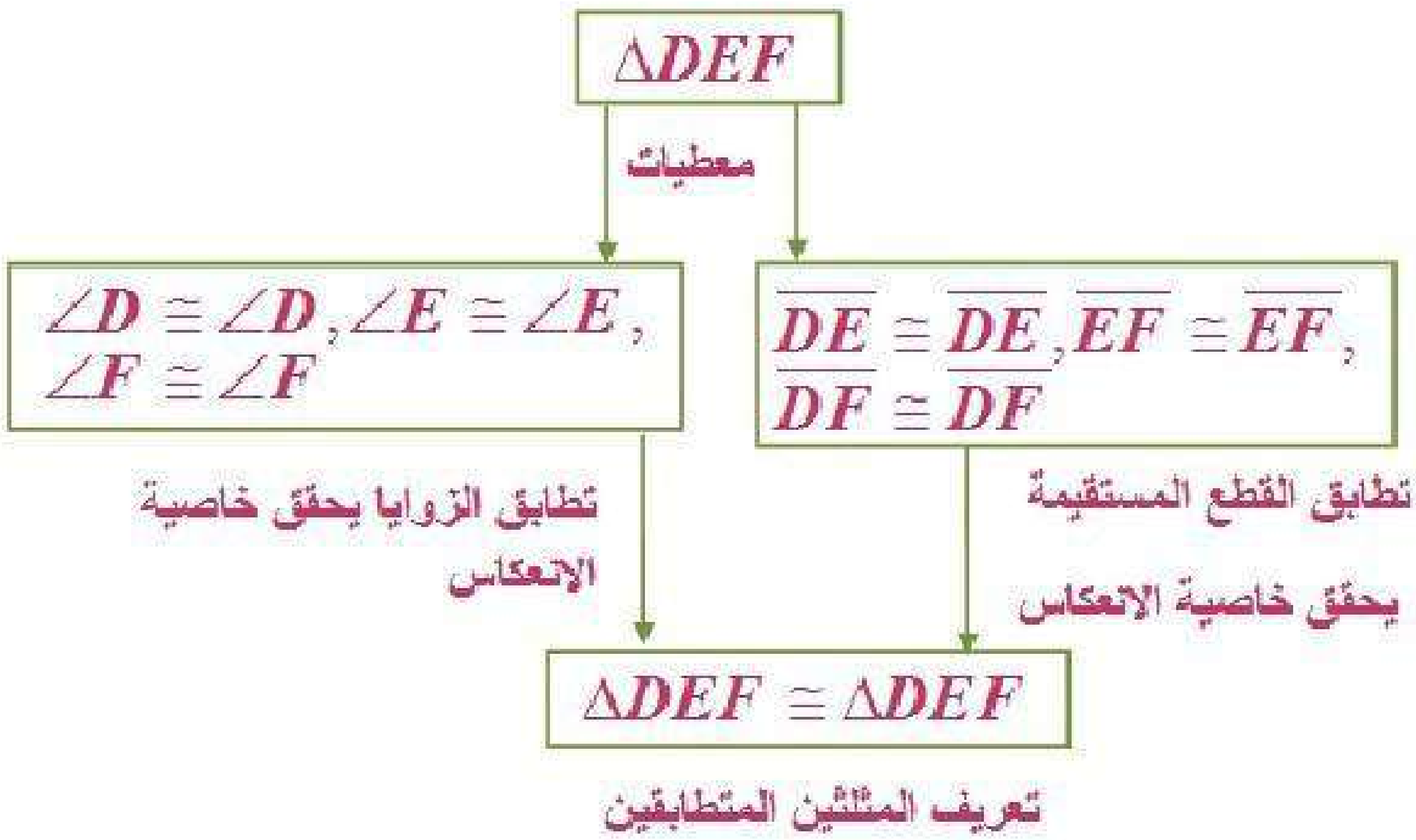
$\angle D \cong \angle G, \angle E \cong \angle H, \angle F \cong \angle I$ ، $DE \cong GH, EF \cong HI, DF \cong GI$

لأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين تكون متطابقة. وعلية فإن

$\angle A \cong \angle G, \angle B \cong \angle H, \angle C \cong \angle I$ ، $AB \cong GH, BC \cong HI, AC \cong GI$

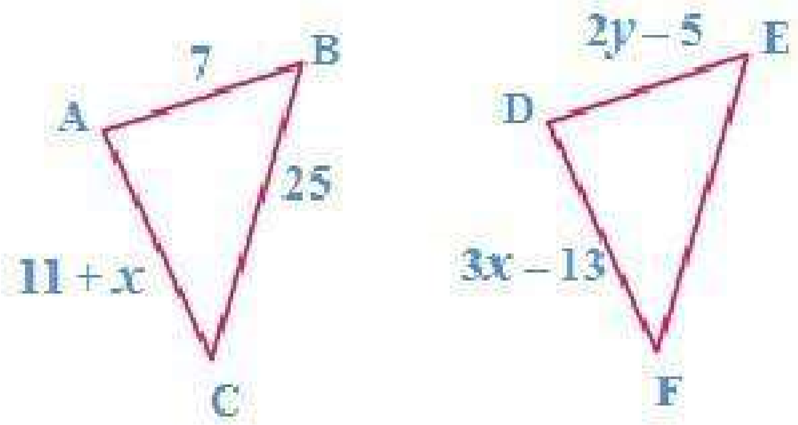
لأن تطابق الزوايا والقطع المستقيمة يحقق خاصية التعدي وبهذا يكون $\Delta ABC \cong \Delta GHI$ من تعريف المثلثين المتطابقين.

(21



جبر: ارسم شكلاً يمثل المثلثين المتطابقين في كل من السؤالين الآتيين، وسمه وأوجد قيمة x, y :

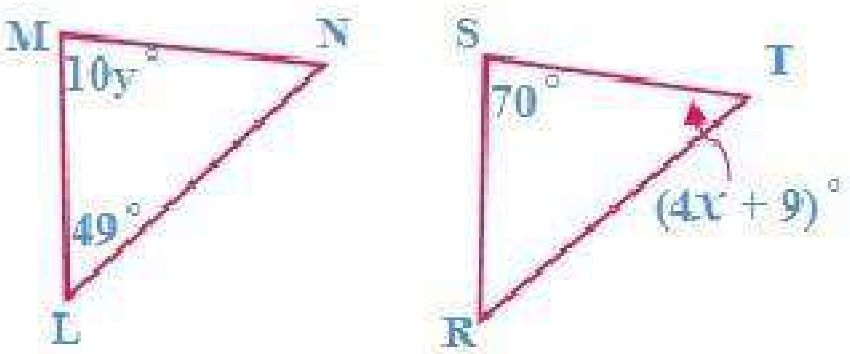
22)



$\because \Delta ABC \cong \Delta DEF$
$\therefore DE = AB$
$2y - 5 = 7$
$2y = 12$
$y = 6$

$DF = AC$
$3x - 13 = x + 11$
$2x = 11 + 13$
$2x = 24$
$x = 12$

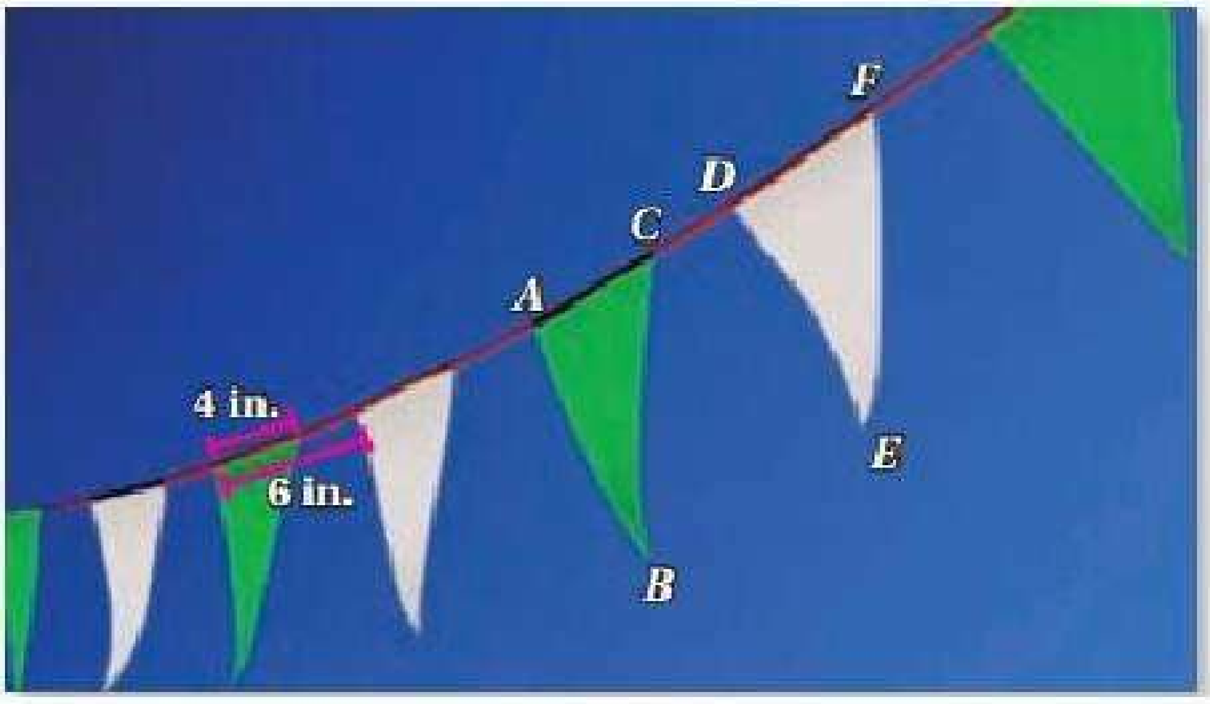
23)



$\because \Delta LMN \cong \Delta RST$
$\angle M = \angle M$
$10y = 70$
$y = 7$

$\angle N = 180^\circ - (49^\circ + 70^\circ)$
$\angle N = 61^\circ$
$\because \Delta LMN \cong \Delta RST$
$\therefore \angle T = \angle N$
$4x + 9 = 61$
$4x = 52$
$x = 13$

24) رايات:



$a)$
$AB = CB,\ AB = DE,\ AB = FE,$
$CB = DE,\ CB = FE,\ DE = FE,\ AC = DF$

b) بما أن مساحة المنطقة مربعة = ١٠٠ قدم مربعة

مساحة المربع = طول الضلع في نفسة، إذن طول الضلع = ١٠ وبالتالي سيكون طول الحبل $10 + 10 + 10 + 10 = 40$

(c

يوجد 2 راية كل قدم من الحبل إذن

$40 \times 2 = 80$ راية

25) تمثيلات متعددة:

a) لفظيا:

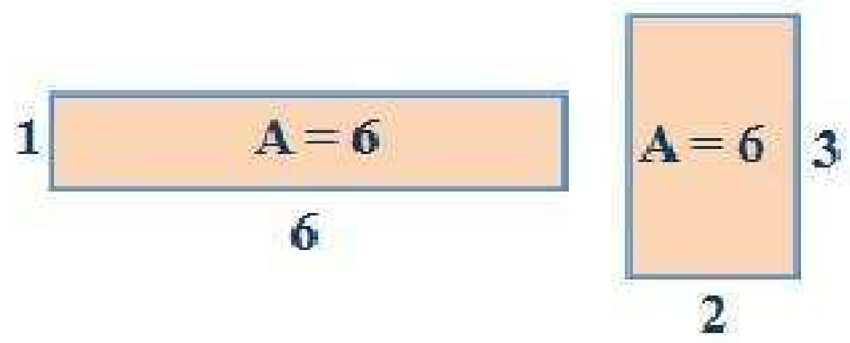
إذا تطابق مثلثان فان مساحتيهما متساويتان.

b) لفظيا:

العبارة الشرطية: إذا تساوت مساحتا مثلثين فان المثلثين متطابقان.

خطأ، فإذا كانت قاعدة المثلث 2 وارتفاعه 6 وكانت قاعدة مثلث آخر 3 وارتفاعه 4 فان مساحتيهما متساويتان ولكن هذين المثلثين غير متطابقين.

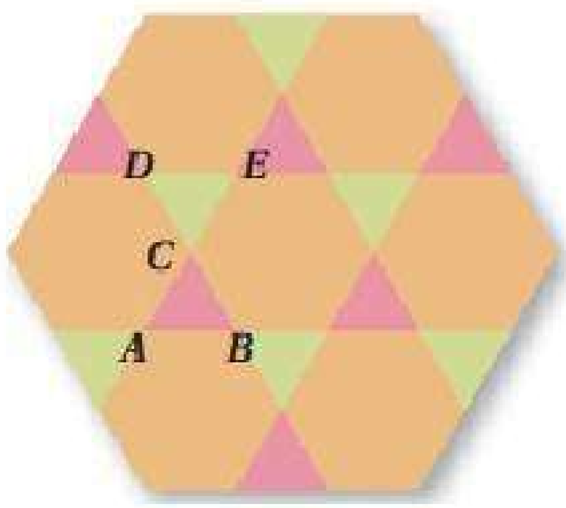
c) هندسيا: نعم يمكن



d) هندسيا:

لا يمكن، لان المربعين اللذين لهما المساحة نفسها يكون لأضلاعهما الطول نفسه وهو الجذر التربيعي للمساحة فإذا كانت المساحتان متساويتين يكون المربعان متطابقين.

26) أنماط:



a) المضلع السداسي المنتظم والمثلث المتطابق الأضلاع

b) $\Delta ABC \cong DEC$

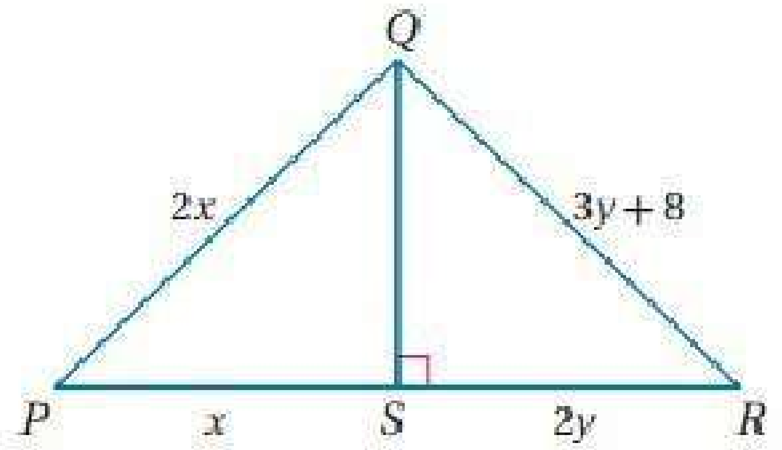
c) $\angle B = \angle E$

d) $AE = 4in$ ، لان المضلعات التي صمم منها النمط منتظمة فأطوال أضلاع المثلثات جميعها متطابقة وهذا يعني أن طول CB يساوي طول كل من CE , AC لذا فان $AE = AC + CE = 2 + 2 = 4$

e) $\angle D = 60^\circ$ ، لان جميع مثلثات النمط منتظمة فهي مثلثات متطابقة الأضلاع ومتطابقة الزوايا، وتكون كل زاوية في أي مثلث مساوية لـ 60

مسائل مهارات التفكير العليا

27) تحد:



$\Delta RQS \cong \Delta PQS$

$RS = PS$

$2y = x$

$RQ = PQ$

$3y + 8 = 2x$

$\because x = 2y$

$3y + 8 = 2\times(2y)$

$3y - 4y = -8$

$-y = -8$

$y = 8$

$x = 2\times 8$

$x = 16$

تبرير: حدد ما إذا كانت كل عبارة مما يأتي صحيحة أم خطأ.

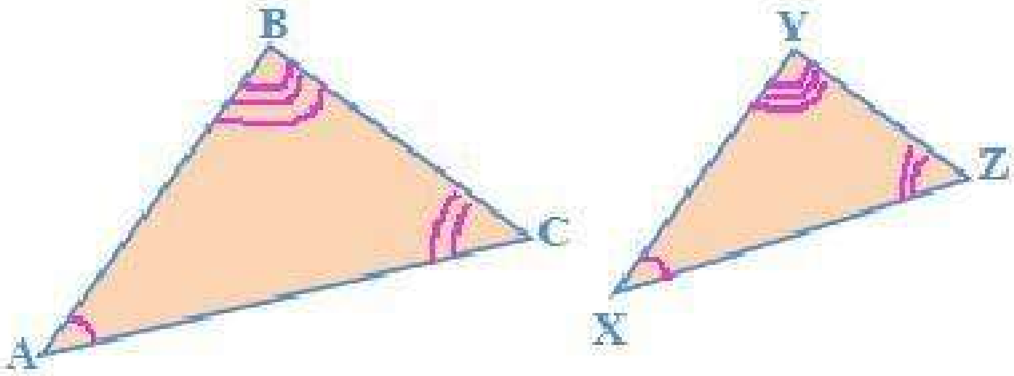
(28

صحيحة، باستعمال نظرية الزاوية الثالثة، يكون الزوج الثالث من الزوايا متطابقتان أيضا وجميع الأضلاع المناظرة متطابقة، ولان العناصر المتناظرة متطابقة فان المثلثين متطابقان.

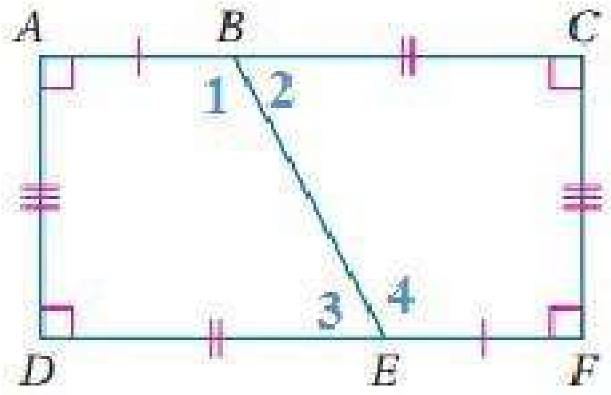
(29

خطأ، $\angle A = \angle X, \angle B = \angle Y, \angle C = \angle Z$

لكن الأضلاع المتناظرة ليست متطابقة.



30) تحد:



$$AB = EF,\ ED = BC,\ AD = FC$$

الزوايا المتبادلة داخليا متطابقة فإن $\angle 3 = \angle 2,\ \angle 4 = \angle 1$

المضلع $ABED$ = المضلع $FEBC$

31) اكتب:

صحيحة أحيانا، يكون المثلثات المتطابقا الأضلاع متطابقين إذا تطابق زوج من الأضلاع المتناظرة فيها

تدريب على الاختبار المعياري

32) A

$$\Delta ABC \cong \Delta HIJ$$
$$AC = HJ$$
$$(-1,2),(2,-2)$$
$$d_{(H,J)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-2-2)^2 + (2-(-1))^2}$$

$$\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

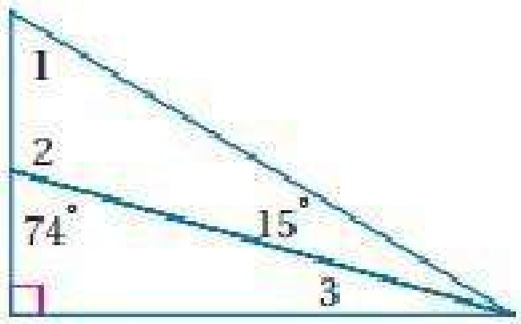
33) C

$$x^2 + 19x - 42 = 0$$
$$(x+21)(x-2) = 0$$

إذن $(x-2)$ هو أحد العوامل

مراجعة تراكمية

في الشكل المجاور أوجد كلا من القياسات الآتية:



34)

زاويتان متجاورتان على مستقيم

$$\angle 2 = 180^\circ - 74^\circ = 106^\circ$$

35)

نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث

$$\angle 1 = 180^\circ - \left(106^\circ + 15^\circ\right) = 59^\circ$$

36)

نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث

$$\angle 3 = 180^\circ - \left(90^\circ + 74^\circ\right) = 16^\circ$$

37) هندسة إحداثية: مختلف الأضلاع

$$K\ (15,0), L\ (-2,-1)$$

$$d_{(K,L)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-2-(15))^2 + (-1-0)^2}$$

$$\sqrt{289+1} = \sqrt{290}$$

$$J\ (-7,10), K\ (15,0)$$

$$d_{(J,K)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(15-(-7))^2 + (0-10)^2}$$

$$\sqrt{484+100} = 2\sqrt{146}$$

$J(-7,10), L(-2,-1)$

$$d_{(J,L)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-2-(-7))^2 + (-1-10)^2}$$

$$\sqrt{25+121} = \sqrt{146}$$

$$JK = 2\sqrt{146},\ KL = \sqrt{290},\ JL = \sqrt{146}$$

حدد ما إذا كانت كل عبارة مما يأتي صحيحة دائما أو أحيانا أو ليست صحيحة أبدا:

38) صحيحة دائما

39) صحيحة أحيانا

استعد للدرس اللاحق

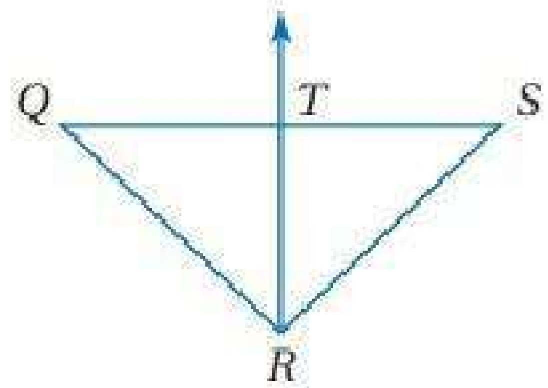
40)

المبررات	العبارات
a) معطيات	a) $\overline{PQ} \cong \overline{RS}, \overline{MN} \cong \overline{PQ}$
b) تعريف القطع المستقيمة المتطابقة	b) $MN = PQ, PQ = RS$
c) خاصية التعدي	c) $MN = RS$
d) تعريف القطع المستقيمة المتطابقة	c) $\overline{MN} \cong \overline{RS}$

3-4 إثبات تطابق المثلثات SSS , SAS

تحقق
صفحة ١٦٤

(1



$\triangle QRS$ متطابق الضلعين فيه $\overline{QR} \cong \overline{SR}$

معطى

$\overline{RT}$ ينصف $\overline{QS}$ في النقطة T

معطى

T نقطة منتصف $\overline{QS}$

تعريف منصف القطع المستقيمة

$\overline{QT} \cong \overline{ST}$

نظرية نقطة المنتصف

$\overline{RT} \cong \overline{RT}$

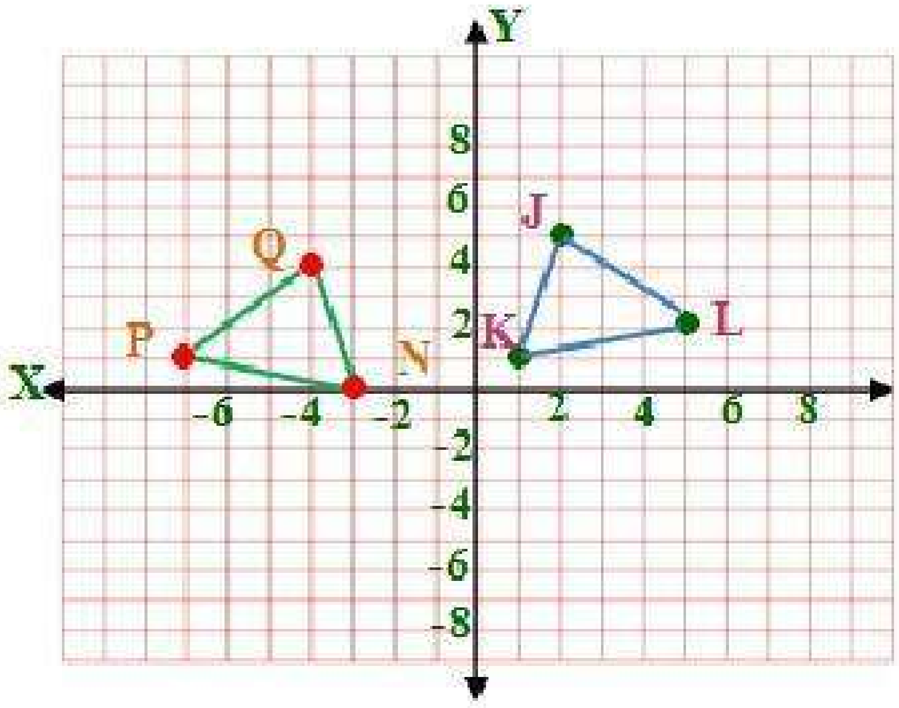
خاصية الانعكاس

$\triangle QRT \cong \triangle SRT$

SSS

تحقق

(2 (A



(B يبدو من الشكل أن للمثلثين الشكل نفسه والقياس نفسه لذلك يمكن أن نخمن أن المثلثين متطابقان.

(C

$K\ (1,1), L\ (5,2)$

$d_{(K,L)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(5-1)^2 + (2-1)^2}$

$\sqrt{16+1} = \sqrt{17}$

$J\ (2,5), K\ (1,1)$

$d_{(J,K)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(1-2)^2 + (1-5)^2}$

$\sqrt{1+16} = \sqrt{17}$

$J(5,2), L(2,5)$

$d_{(J,L)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(2-5)^2 + (5-2)^2}$

$\sqrt{9+9} = \sqrt{18}$

$JK = \sqrt{17}, \ KL = \sqrt{17}, \ JL = \sqrt{18}$

أطوال ΔNPQ

$P(-7,1), Q(-4,4)$

$d_{(P,Q)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-4-(-7))^2 + (4-1)^2}$

$\sqrt{9+9} = \sqrt{18}$

$N(-3,0), P(-7,1)$

$d_{(N,P)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-7-(-3))^2 + (1-0)^2}$

$\sqrt{16+1} = \sqrt{17}$

$N(-3,0), Q(-4,4)$

$d_{(N,Q)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-4-(-3))^2 + (4-0)^2}$

$\sqrt{1+16} = \sqrt{17}$

$PQ = \sqrt{18}, \ NP = \sqrt{17}, \ NQ = \sqrt{17}$

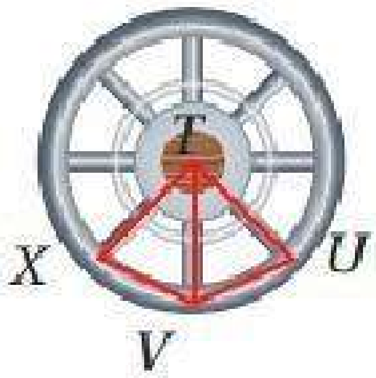
نلاحظ أن $JL = QP$ ، $LK = PN$ ، $NQ = KJ$ ومن تعريف التطابق القطع المستقيمة نستنتج أن القطع المتناظرة جميعها متطابقة. وعليه، فإن $\Delta JKL \cong \Delta QNP$ حسب SSS

تحقق

3) طيران شرعي:

المبررات	العبارات
معطى	$\overline{FG} \cong \overline{GH}$ ، $\overline{JG}$ تنصف $\angle FGH$
تعريف منصف الزاوية	$\angle FGJ = \angle HGJ$
خاصية الانعكاس للتطابق	$JG = JG$
SAS	$\Delta FGJ = \Delta HGJ$

(4



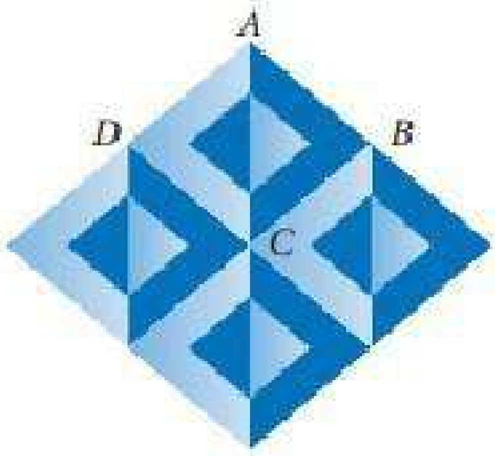
1) $\overline{TU} \cong \overline{TX}$ معطى $\angle XTV \cong \angle VTU$

2) $m\angle XTV = m\angle UTV$ (تعريف الزوايا المتطابقة)

3) $\overline{TV} \cong \overline{TV}$ (خاصية الانعكاس)

4) $\triangle XTV \cong \triangle UTV\ (SAS)$

1) الخداع البصري: المثال١



a) عدد المثلثات المختلفة = ٢

(b

1) $AB = CD , DA \cong BC$ (معطيات)

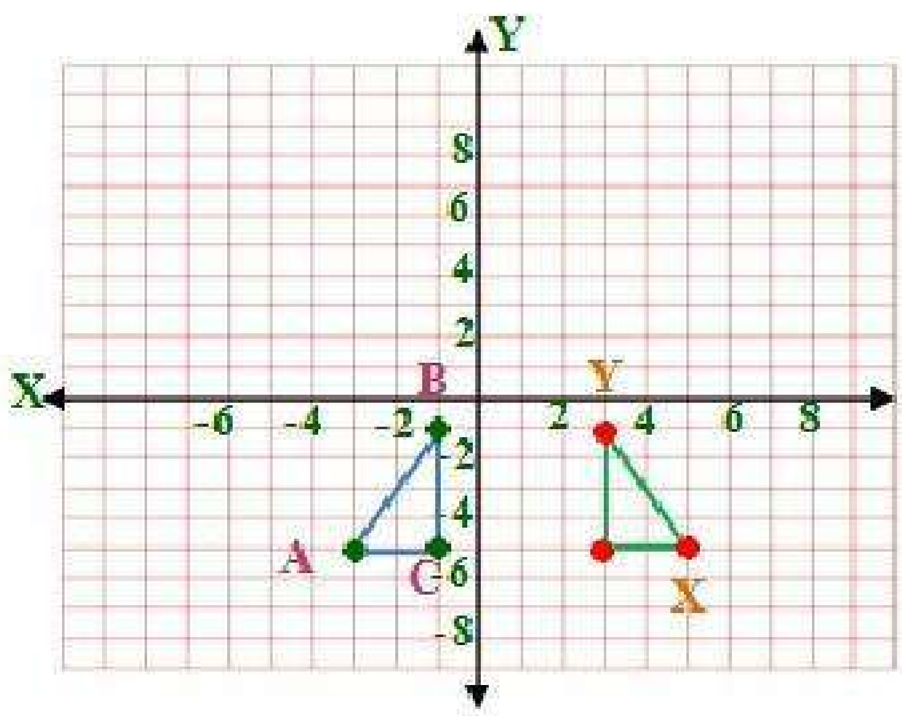
2) $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $\overline{DA} \cong \overline{BC}$ (تعريف تطابق القطع المستقيمة)

3) $\overline{AC} \cong \overline{CA}$ (خاصية الانعكاس في التطابق)

4) $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ (SSS)

2) إجابة مطولة: المثال٢

(a



b) يبدو من الشكل أن للمثلثين الشكل نفسه والقياس نفسه لذلك يمكن أن نخمن أن المثلثين متطابقان

c)

أطوال ΔABC

$A(-3,-5), B(-1,-1)$

$$d_{(A,B)}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(-1-(-3))^2+(-1-(-5))^2}$$

$\sqrt{4+16}=\sqrt{20}$

$B(-1,-1), C(-1,-5)$

$$d_{(B,C)}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(-1-(-1))^2+(-5-(-1))^2}$$

$\sqrt{0+16}=\sqrt{16}=4$

$A(-3,-5), C(-1,-5)$

$$d_{(A,C)}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(-1-(-3))^2+(-5-(-5))^2}$$

$\sqrt{4+0}=\sqrt{4}=2$

$AB=\sqrt{20},\ BC=4,\ AC=2$

أطوال ΔXYZ

$X(5,-5), Y(3,-1)$

$$d_{(X,Y)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(3-5)^2 + (-1-(-5))^2}$$

$$\sqrt{4+16} = \sqrt{20}$$

$Y(3,-1), Z(3,-5)$

$$d_{(Y,Z)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(3-3)^2 + (-5-(-1))^2}$$

$$\sqrt{0+16} = \sqrt{16} = 4$$

$X(5,-5), Z(3,-5)$

$$d_{(X,Z)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(3-5)^2 + (-5-(-5))^2}$$

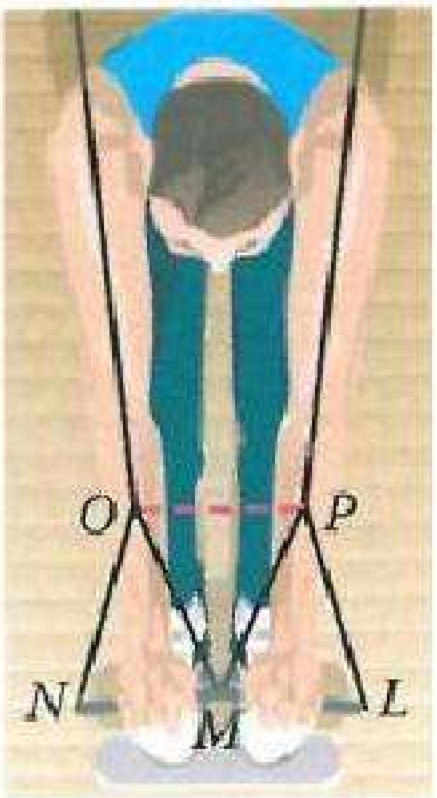
$$\sqrt{4+0} = 2$$

$XY = \sqrt{20},\ YZ = 4,\ XZ = 2$

نلاحظ أن $XY = AB$, $YZ = BC$, $XZ = AC$ ومن تعريف التطابق القطع المستقيمة نستنتج أن القطع المتناظرة جميعها متطابقة. وعليه، فإن

$\Delta XYZ \cong \Delta ABC$ حسب SSS

3) **رياضة:** المثال٣



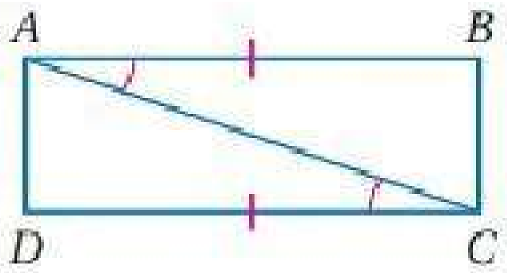
نعلم أن $\angle NOM \cong \angle LPM$, $\overline{NO} \cong \overline{LP}$.

وبما أن ΔMOP متطابق الأضلاع

فإن $\overline{MP} \cong \overline{MO}$ من تعريف المثلث المتطابق الأضلاع

ولذلك فإن $\Delta NMO \cong \Delta LMP$ حسب مسلمة التطابق SAS

4) **اكتب برهان ذا عمودين:** مثال٤



1) $\angle DCA \cong \angle BAC$, $\overline{DC} \cong \overline{BA}$ (معطيات)

2) $\overline{CA} \cong \overline{AC}$ (خاصية الانعكاس للتطابق)

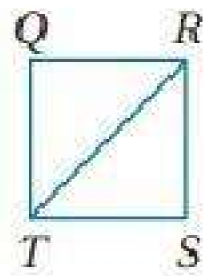
3) $\Delta DAC \cong \Delta BCA$ (SAS)

4) $\overline{DA} \cong \overline{BC}$ (العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين متطابقة)

تدرب وحل المسائل

برهان: اكتب برهانا من النوع المذكور في كل من السؤالين الآتيين: المثال ١

(5

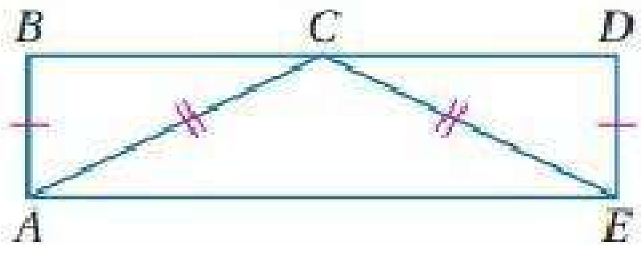


$QR = SR\,,\ ST = QT$

$RT = RT$ حسب خاصية الانعكاس

$\Delta QRT \cong \Delta SRT$ حسب SSS

(6



$AB = ED\,,\ CA = CE$

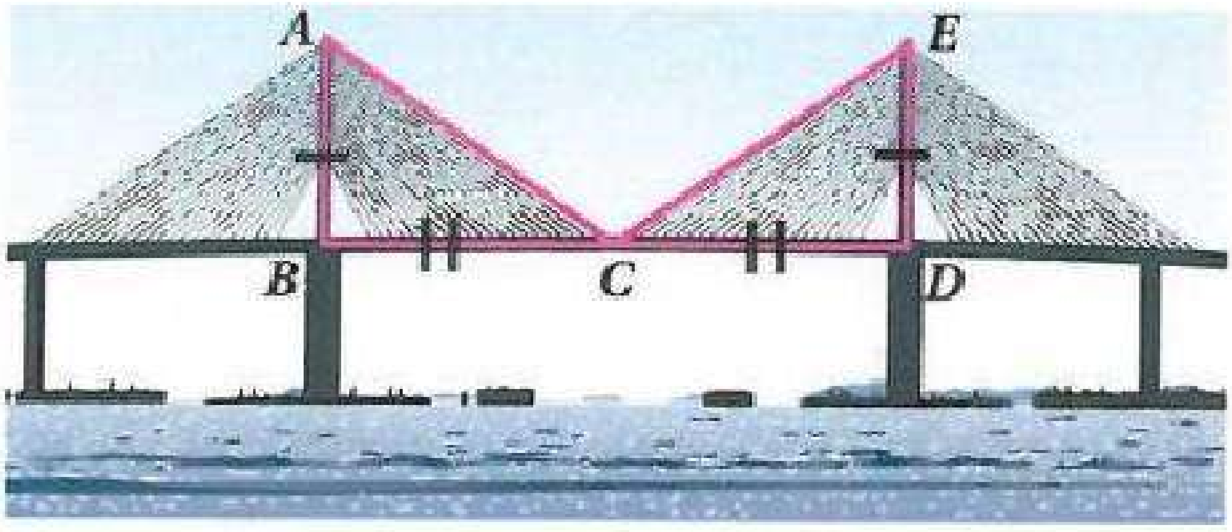
AC تنصف BD

C منتصف BD

$BC = CD$

$\Delta ABC \cong \Delta EDC$ حسب SSS

7) جسور:



1) $\overline{ED} \cong \overline{AB}$، $\angle ABC$ و $\angle EDC$ قائمتان، C نقطة منتصف $\overline{BD}$ (معطيات)

2) $\angle EDC \cong \angle ABC$ (جميع الزوايا القوائم متطابقة)

3) $\overline{CD} \cong \overline{BC}$ (نظرية نقطة المنتصف)

4) $\Delta ABC \cong \Delta CDE$ حسب (SAS)

حدد ما إذا كان $\Delta QRS = \Delta MNO$ في كل من السؤالين الآتيين: المثال٢

8)

ΔQRS

$Q(-4,4), R(-7,1)$

$$d_{(Q,R)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-7-(-4))^2 + (1-4)^2}$$

$$\sqrt{9+9} = \sqrt{18}$$

$R\,(-7,1), S\,(-3,0)$

$$d_{(R,S)}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(-3-(-7))^2+(0-1)^2}$$

$$\sqrt{16+1}=\sqrt{17}$$

$Q\,(-4,4), S\,(-3,0)$

$$d_{(Q,S)}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(-3-(-4))^2+(0-4)^2}$$

$$\sqrt{1+16}=\sqrt{17}$$

$QR=\sqrt{18},\ RS=\sqrt{17}\ ,QS=\sqrt{17}$

ΔMNO

$M\,(2,5), N\,(5,2)$

$$d_{(M,N)}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(5-2)^2+(2-5)^2}$$

$$\sqrt{9+9}=\sqrt{18}$$

$N\,(5,2), O\,(1,1)$

$$d_{(N,O)}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(1-5)^2+(1-2)^2}$$

$$\sqrt{16+1}=\sqrt{17}$$

$M(2,5), O(1,1)$

$$d_{(M,O)} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{(1-2)^2+(1-5)^2}$$

$$\sqrt{1+16} = \sqrt{17}$$

$$MN = \sqrt{18},\ NO = \sqrt{17},\ MO = \sqrt{17}$$

$$MN = \sqrt{18},\ NO = \sqrt{17},\ MO = \sqrt{17}$$
$$QR = \sqrt{18},\ RS = \sqrt{17},\ QS = \sqrt{17}$$

بما أن كل زوج من الأضلاع المتناظرة متساويان في الطول فإنهما متطابقان إذن

$\Delta QRS \cong \Delta MNO$ حسب SSS

(9

ΔQRS

$Q(3,-3), R(4,-4)$

$$d_{(Q,R)} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{(4-3)^2+(-4-(-3))^2}$$

$$\sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$R(4,-4), S(3,3)$

$$d_{(R,S)} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{(3-4)^2+(3-(-4))^2}$$

$$\sqrt{1+49} = \sqrt{50}$$

$Q\,(3,-3), S\,(3,3)$

$$d_{(Q,S)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(3-3)^2 + (3-(-3))^2}$$

$$\sqrt{0+36} = 6$$

$QR = \sqrt{2},\ RS = \sqrt{50}\ , QS = 6$

ΔMNO

$M\ (0,-1), N\,(-1,-4)$

$$d_{(M,N)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-1-0)^2 + (-4-(-1))^2}$$

$$\sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

$N\,(-1,-4), O\,(-4,-3)$

$$d_{(N,O)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-4-(-1))^2 + (-3-(-4))^2}$$

$$\sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

$M\ (0,-1), O\ (-4,-3)$

$d_{(M,O)}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(-4-0)^2+(-1-(-3))^2}$

$\sqrt{16+4}=\sqrt{20}$

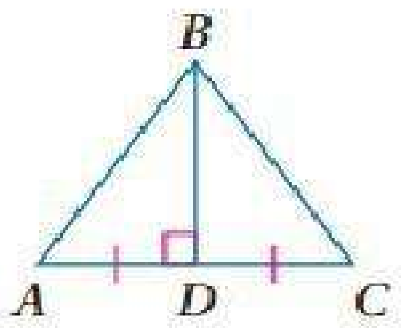
$MN=\sqrt{10},\ NO=\sqrt{10},\ MO=\sqrt{20}$

$QR=\sqrt{2},\ RS=\sqrt{50},\ QS=6$

بما أن الأضلاع المتناظرة ليست متطابقة، فان المثلثين ليسا متطابقين

برهان: اكتب برهانا من النوع المحدد في كل من السؤالين الآتيين: المثال٣

10) برهان ذو عمودين



1) $\overline{BD} \perp \overline{AC}$، $\overline{BD}$ تنصف $\overline{AC}$ (معطيات)

2) $\angle BDC, \angle BDA$ قائمتان (تعريف التعامد)

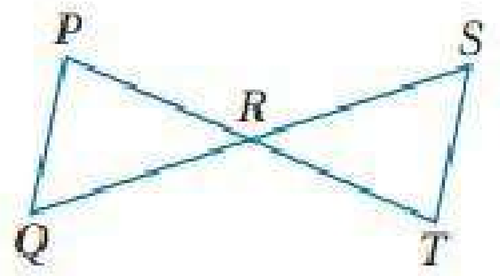
3) $\angle BDC \cong \angle BDA$ (جميع الزوايا القوائم متطابقة)

4) $\overline{DC} \cong \overline{AD}$ (تعريف منصف القطعة المستقيمة)

5) $\overline{BD} \cong \overline{BD}$ (خاصية الانعكاس للتطابق)

6) $\Delta CBD \cong \Delta ABD$ حسب مسلمة (SAS)

(11

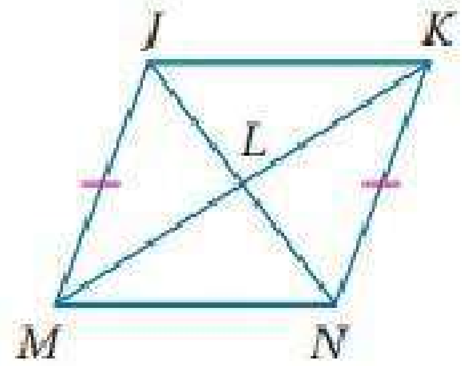


بما أن R نقطة المنتصف لكل من $\overline{PT}, \overline{QS}$ ، فإن $\overline{PR} \cong \overline{RT}$

و $\overline{RS} \cong \overline{RQ}$ من تعريف نقطة المنتصف، وكذلك $\angle TRS \cong \angle PRQ$ بحسب نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس

إذن $\Delta TRS \cong \Delta PRQ$ حسب مسلمة (SAS)

12) برهان: اكتب برهانا تسلسلياً المثال ٤



L نقطة منتصف كل من $\overline{KM}, \overline{JN}$ — معطى

$\overline{JM} \cong \overline{NK}$ — معطى

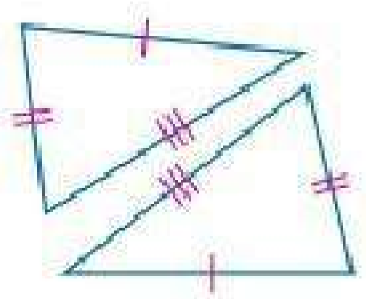
$\overline{LM} \cong \overline{LK}$ ، $\overline{LJ} \cong \overline{LN}$ — تعريف نقطة المنتصف

$\triangle MJL \cong \triangle KNL$ — SSS

$\angle MJL \cong \angle KNL$ — العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين

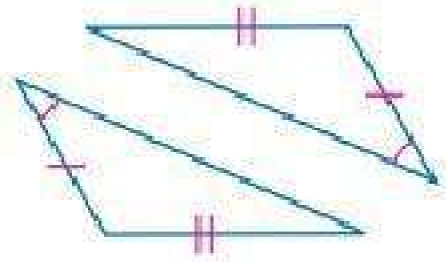
حدد ما إذا كان المثلثين في كل من الأسئلة الآتية متطابقين أم لا. وضح إجابتك.

(13



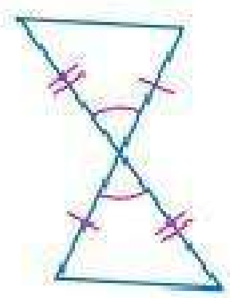
متطابقين (مسلمة): SSS

(١٤



لا يوجد تطابق

(١٥



متطابقين (مسلمة): SAS

16) إشارة تحذيرية: استعمل الشكل المجاور.

a) المجسم يسمى: هرم

(b

1) $\overline{AD} \cong \overline{AB}$ و $\overline{DC} \cong \overline{CB}$ (معطيات)

2) $\overline{AC} \cong \overline{AC}$ (خاصية الانعكاس للتطابق)

3) $\Delta ACD \cong \Delta ACB$ حسب مسلمة (SSS)

c) المجسم ثلاثي الأبعاد ولذلك عندما يتم رسمه في المستوي الثنائي الأبعاد فان الرسم ألمنظوري يجعله يبدو وكأن المثلثين مختلفان.

١٧) برهان

$\angle TQR \cong \angle SRQ$
معطى

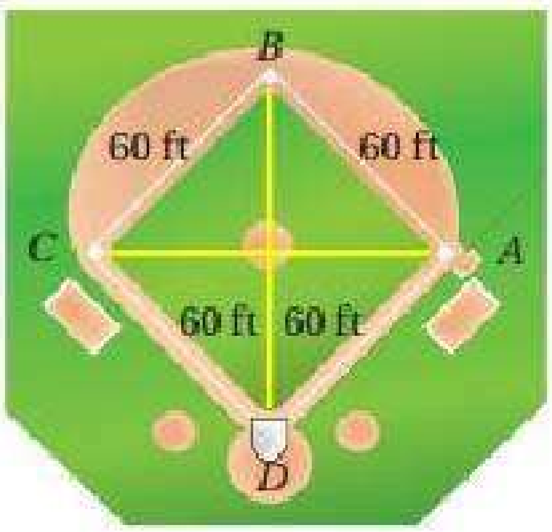
$\Delta TPQ \cong \Delta SPR$
معطى

$\overline{QR} \cong \overline{RQ}$
خاصية الانعكاس للتطابق

$\overline{TQ} \cong \overline{RS}$
العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة

$\Delta TQR \cong \Delta SRQ$
SAS

18) في الشكل المجاور $ABCD$ مربع:



(a

1) $\overline{DC} \cong \overline{AD} \cong \overline{BA} \cong \overline{CB}$ (معطيات)

2) $\angle DCB , \angle ADC , \angle BAD , \angle CBA$ قوائم (معطيات)

3) $\angle CDA \cong \angle BCD$ (جميع الزوايا القوائم متطابقة)

4) $\Delta CDA \cong \Delta BCD$ حسب مسلمة (SAS)

5) $\overline{AC} \cong \overline{DB}$ (العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين تكون متطابقة)

(b

1) $\overline{DC} \cong \overline{AD} \cong \overline{BA} \cong \overline{CB}$ (معطيات)

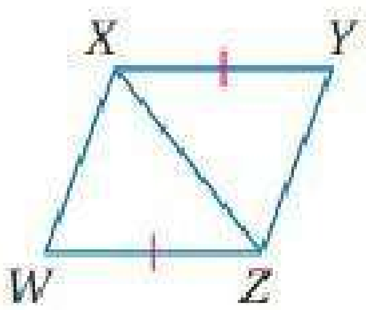
2) $\angle DCB , \angle ADC , \angle BAD , \angle CBA$ قوائم (معطيات)

3) $\angle BAD \cong \angle BCD$ (جميع الزوايا القوائم متطابقة)

4) $\Delta BAD \cong \Delta BCD$ حسب مسلمة (SAS)

5) $\angle BDA \cong \angle BDC$ (العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين تكون متطابقة)

19) برهان: اكتب برهان ذا عمودين.



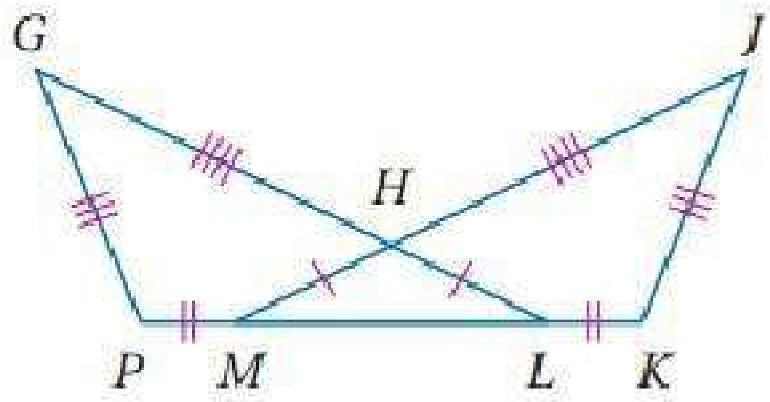
$\overline{ZW}$ □ $\overline{YX}$, $\overline{WZ} = \overline{YX}$ (معطيات)

$\angle YXZ = \angle WZX$ (زاويتان متبادلتان داخليا)

$XZ = XZ$ (خاصية الانعكاس)

$\Delta YXZ = \Delta WZX$ حسب مسلمة (SAS)

20) برهان: اكتب برهانا حر:



$GH = JH , PG = KJ , HL = HM , PM = KL$

بما أن $GH = JH$ و $HL = HM$ إذن $GL = JM$

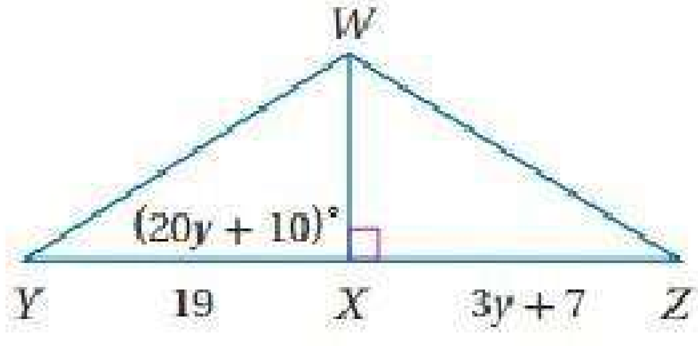
بما أن $GL = JM$, $PM = KL$ إذن $PL = KM$

إذن $\Delta GPL \cong \Delta JKM$

إذن $\angle G \cong \angle J$

جبر: أوجد قيمة المتغير التي تجعل المثلثين متطابقين في كل من السؤالين الآتيين:

21)



$\because \Delta WXY \cong \Delta WXZ$

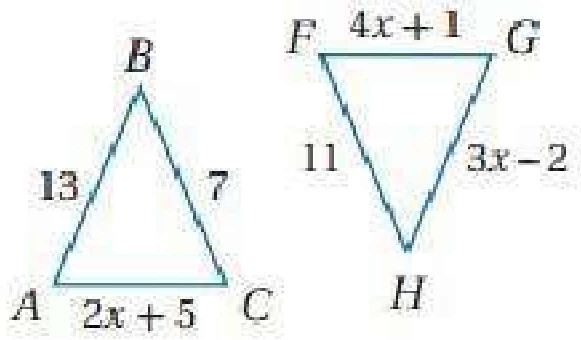
$\therefore XZ = XY$

$3y + 7 = 19$

$3y = 12$

$y = 4$

22)



$\because \Delta FGH \cong \Delta ABC$

$\therefore GH = BC$

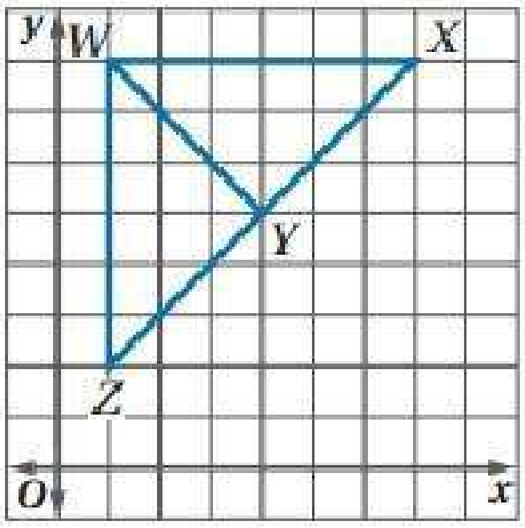
$3x - 2 = 7$

$3x = 9$

$x = 3$

مسائل مهارات التفكير العليا

23) تحد:



(a

الطريقة الأولى: تستعمل صيغة المسافة لإيجاد طول ضلع من الأضلاع، ثم تستعمل مسلمة التطابق SSS.

الطريقة الثانية: يمكن أن تجد ميل كل من $\overline{ZX}, \overline{WY}$ وتبرهن أنهما متعامدان، وبذلك تكون $\angle WYX, \angle WYZ$ كلتاهما قائمتين. ويمكن استعمال صيغة المسافة لإثبات أن XY تطابق YZ. وبما أن المثلثين يشتركان في الضلع $\overline{WY}$، فيمكن استعمال مسلمة SAS لإثبات تطابق المثلثين.

أعتقد أن الطريقة الثانية أفضل لأن فيها خطوتين بدل من ثلاث خطوات كما في الطريقة الأولى.

(b

$Y\ (4,5), W\ (1,8)$

$$m_{(YW)} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8-5}{1-4} = \frac{3}{-3} = -1$$

$Z\ (1,2), X\ (7,8)$

$$m_{(ZX)} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8-2}{7-1} = \frac{6}{6} = 1$$

ميل $\overline{WY}$ يساوي 1–وميل $\overline{ZX}$ يساوي ١، وبما أن ناتج ضربهما يساوي 1–

فإن $\overline{ZX} \perp \overline{WY}$. وبما أنهما متعامدان فإن قياس كل من $\angle WYZ$ و $\angle WYX$

يساوي $90°$. وباستعمال صيغة المسافة تجد أن طول $\overline{ZY}$ يساوي

$$\overline{ZY} = \sqrt{(4-1)^2 + (5-2)^2} = 3\sqrt{2}$$

وكذلك طول $\overline{XY}$ يساوي

$$\overline{XY} = \sqrt{(4-7)^2 + (5-8)^2} = 3\sqrt{2}$$

وبما أن $\overline{WY} \cong \overline{WY}$، فإن $\Delta WYX \cong \Delta WYZ$ حسب مسلمة التطابق SAS.

24) اكتشف الخطأ:

خالد، لان الزاوية يجب أن تكون محصورة، والزاوية هنا ليست محصورة

25) اكتب:

نعم، الحالة الأولى: إذا علمت أن الوترين متطابقان وكان أحد ضلعي القائمة في الأول يطابق الضلع المناظر له في الثاني فسيكون ضلعا القائمة الآخران متطابقين حسب نظرية فيثاغورث، ولذلك يكون المثلثان متطابقين حسب SSS.

الحالة الثانية: إذا علمت أن ضلعي القائمة في المثلث الأول يطابقان ضلعي القائمة في المثلث الثاني، فسوف يكون المثلثان متطابقين بحسب SAS

تدريب على الاختبار المعياري

26) C

$\overline{BC} \cong \overline{YZ}$

27) C

$-2a + b = -7$

$-2a + (-1) = -7$

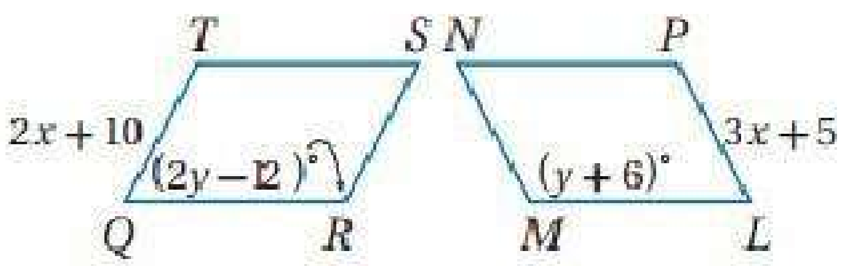
$-2a = -7 + 1$

$-2a = -6$

$a = 3$

مراجعة تراكمية

في الشكلين المجاورين، فأوجد:



28)

$\because LMNP \cong QRST$

$LP = QT$

$3x + 5 = 2x + 10$

$x = 5$

29)

$\angle LMN = \angle QRS$

$y + 6 = 2y - 12$

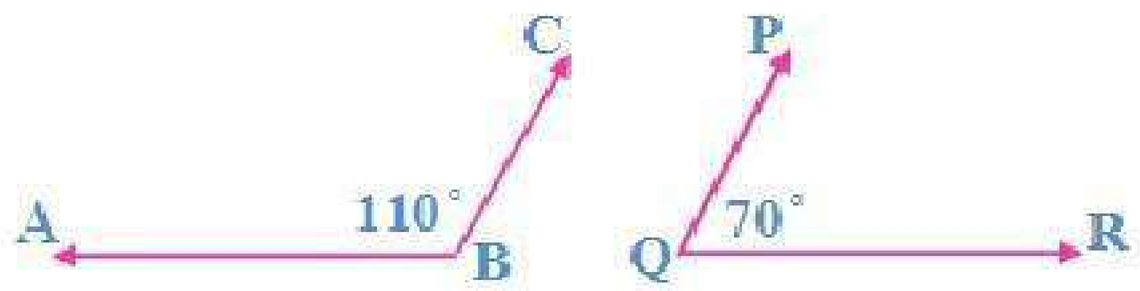
$y = 18$

30) اكتب العكس والمعكوس والمعاكس الإيجابي:

العكس: إذا كانت الزاويتان متكاملتان فإنهما متجاورتان على مستقيم، صحيحة.

عكس العبارة الشرطية: إذ لم تكن الزاويتان متجاورتان على مستقيم فإنهما غير متكاملتان، عبارة خاطئة. والمثال المضاد هو:

$\angle ABC$, $\angle PQR$ زاويتان متكاملتان، ولكنهما غير متجاورتين على مستقيم.

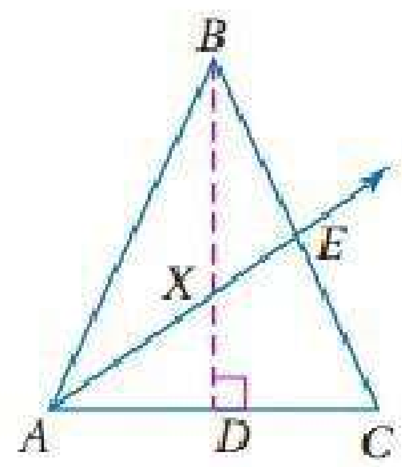


المعاكس الإيجابي: إذ لم تكن الزاويتان متكاملتان فإنهما غير متجاورتان على مستقيم

وهي عبارة صحيحة.

استعد للدرس اللاحق

إذا علمت أن AE , BD ينصفان الزاويتين والضلعين اللذين يقطعانهما، فاذكر القطع المستقيمة والزوايا المشار إليها فيما يأتي:



31) $\overline{BE}$

32) $\angle CBD$

33) $\angle BDA$

34) $\overline{CD}$

الفصل 3 اختبار منتصف الفصل

الدروس من 3-1 إلى 3-4

1) هندسة إحداثية:

$$A(-2,-1), B(-1,3)$$

$$d_{(A,B)} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{(-1-(-2))^2+(3-(-1))^2}$$

$$\sqrt{1+16} = \sqrt{17}$$

$$B(-1,3), C(2,0)$$

$$d_{(B,C)} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{(2-(-1))^2+(0-3)^2}$$

$$\sqrt{9+9} = \sqrt{18}$$

$$A(-2,-1), C(2,0)$$

$$d_{(A,C)} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{(2-(-2))^2+(0-(-1))^2}$$

$$\sqrt{16+1} = \sqrt{17}$$

بما أن $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ إذن المثلث متطابق الضلعين

2) اختيار من متعدد: A

$$\overline{RS} \cong \overline{RQ}$$

$$3y-1 = y+11$$

$$2y = 12$$

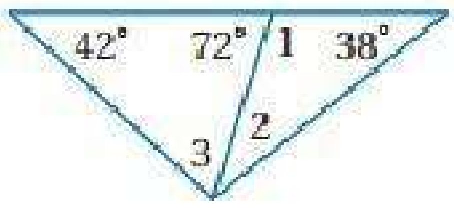
$$y = 6$$

$$\overline{RS} = y+11 = 6+11 = 17$$

$$\overline{RQ} = 3y-1 = 3\times 6-1 = 17$$

$$\overline{QS} = 4y-9 = 4\times 6-9 = 15$$

أوجد كلا من قياسات الزوايا الآتية:

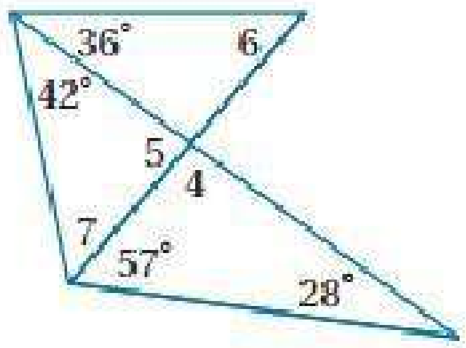


$3)\ m\angle 1 = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$

$4)\ m\angle 2 = 180^\circ - \left(108^\circ + 38^\circ\right) = 34^\circ$

$5)\ m\angle 3 = 180^\circ - \left(72^\circ + 42^\circ\right) = 66^\circ$

أوجد كلا من قياسات الزوايا الآتية:



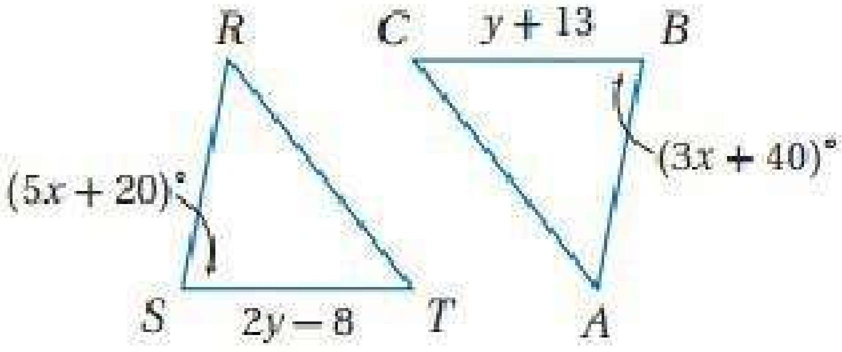
$6)\ m\angle 4 = 180^\circ - \left(57^\circ + 28^\circ\right) = 95^\circ$

$7)\ m\angle 5 = 180^\circ - 95^\circ = 85^\circ$

$8)\ m\angle 6 = 180^\circ - \left(95^\circ + 36^\circ\right) = 49^\circ$

$9)\ m\angle 7 = 180^\circ - \left(42^\circ + 85^\circ\right) = 53^\circ$

في الشكلين أدناه، إذا علمت أن $\Delta RST \cong \Delta ABC$ فأوجد:



10)

$\Delta RST \cong \Delta ABC$

$\overline{RS} = \overline{AB}$

$5x + 20 = 3x + 40$

$2x = 20$

$x = 10$

11)

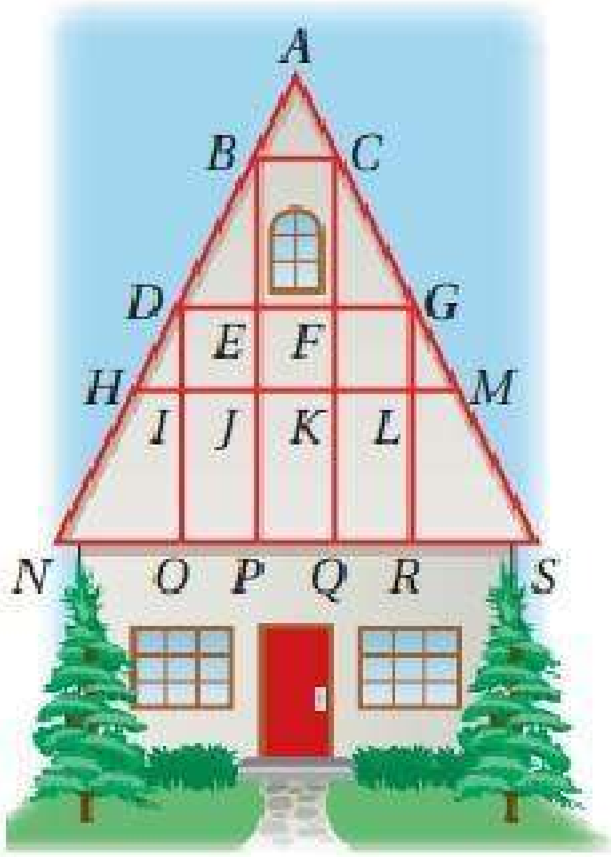
$\Delta RST \cong \Delta ABC$

$\overline{ST} = \overline{BC}$

$2y - 8 = y + 13$

$y = 21$

12) فن العمارة:

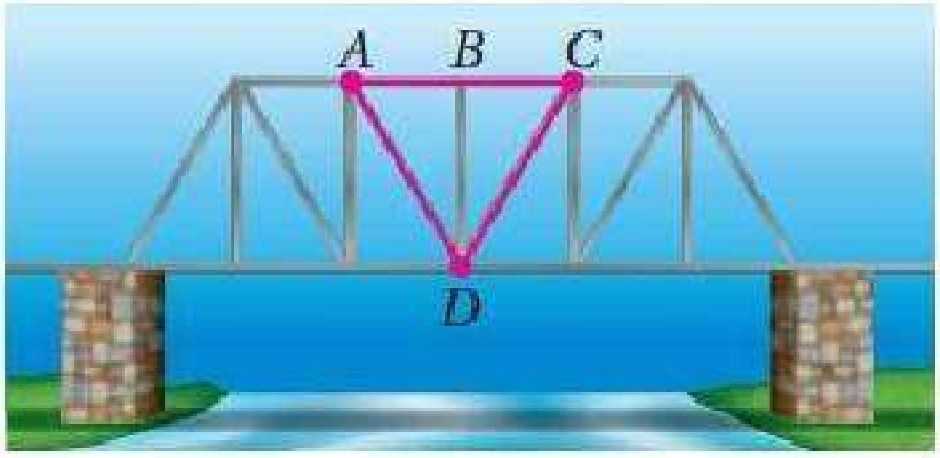


$\Delta BED = \Delta CFG \;, \Delta BJH \cong \Delta CKM \;, \; \Delta BPN \cong \Delta CQS$

$\Delta DIH = \Delta GLM \;, \Delta DON = \Delta GRS$

13) اختيار من متعدد: $D : \angle XCB \cong \angle LSM$

14) جسور:



$\overline{AB} \cong \overline{BC}$ إذن $\overline{AC}$ نقطة في منتصف B وبما أن ،$\overline{DB} \cong \overline{BD}$

وبما أن $\overline{DB} \perp \overline{AC}$ إذن $\angle CBD \cong \angle ABD$

إذن يوجد ضلعين وزاوية محصورة بينهم في ΔABD يناظرهم ضلعين وزاوية محصورة بينهم في ΔCBD و بحسب نظرية SAS يمكن إثبات أن المثلثين متطابقين.

حدد ما إذا كان $\Delta PQR \cong \Delta XYZ$ في كل من السؤالين الآتيين:

15)

$P(3,-5), Q(11,0)$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(11-3)^2 + (0-(-5))^2}$$

$$\sqrt{64+25} = \sqrt{89}$$

$Q(11,0), R(1,6)$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(1-11)^2 + (6-0)^2}$$

$$\sqrt{100+36} = 2\sqrt{34}$$

$P(3,-5), R(1,6)$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(1-3)^2 + (6-(-5))^2}$$

$$\sqrt{4+121} = 5\sqrt{5}$$

$X\ (5,1), Y\ (13,6)$

$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(13-5)^2+(6-1)^2}$

$\sqrt{64+25}=\sqrt{89}$

$Y\ (13,6), Z\ (3,12)$

$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(3-13)^2+(12-6)^2}$

$\sqrt{100+36}=2\sqrt{34}$

$X\ (5,1), Z\ (3,12)$

$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(3-5)^2+(12-1)^2}$

$\sqrt{4+121}=5\sqrt{5}$

نعم، بما أن جميع الأطوال المتناظرة متساوية إذن $\Delta XYZ \cong \Delta PQR$.

16)

$P\ (-3,-3), Q\ (-5,1)$

$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(-5-(-3))^2+(1-(-3))^2}$

$\sqrt{4+16}=\sqrt{20}$

$Q\ (-5,1), R\ (-2,6)$

$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(-2-(-5))^2+(6-1)^2}$

$\sqrt{4+25}=\sqrt{29}$

$P\ (-3,-3), R\ (-2,6)$

$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(-2-(-3))^2+(6-(-3))^2}$

$\sqrt{1+81}=\sqrt{82}$

$X(2,-6), Y(3,3)$

$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(3-2)^2+(3-(-6))^2}$

$\sqrt{1+81}=\sqrt{82}$

$Y(3,3), Z(5,-1)$

$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(5-3)^2+(-1-3)^2}$

$\sqrt{4+16}=\sqrt{20}$

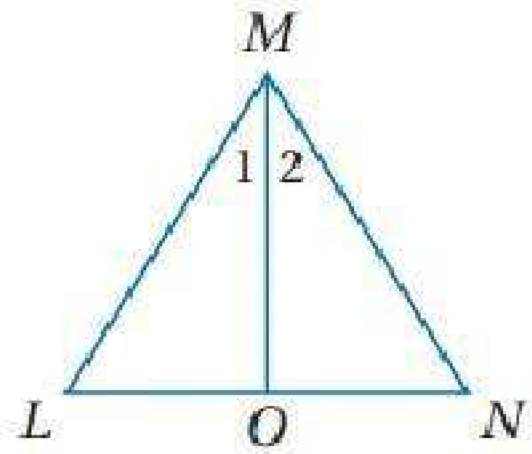
$X(2,-6), Z(5,-1)$

$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(5-2)^2+(-1-(-6))^2}$

$\sqrt{9+25}=\sqrt{34}$

بما أن ليس جميع الأضلاع المتناظرة متساوية إذن ΔXYZ لا يطابق ΔPQR

17) اكتب برهانا ذا عمودين:

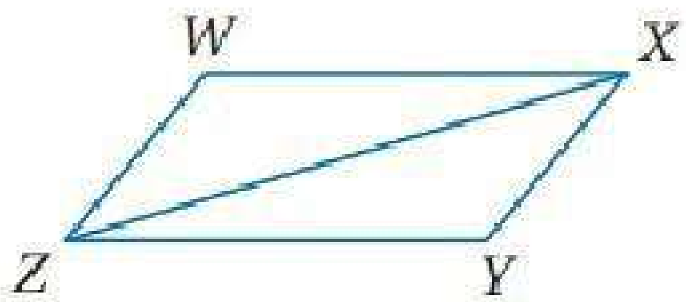


العبارات	المبررات
ΔLMN متطابق الضلعين في $LM = NM$	معطيات
MO تنصف ΔLMN	معطي
$\angle 1 = \angle 2$	تعريف منصف الزاوية
$MO = MO$	خاصية الانعكاس
$\Delta MLO = \Delta MNO$	SAS

3-5 إثبات تطابق المثلثات ASA, AAS

تحقق

(1



بما أن $\overline{ZX}$ تنصف $\angle WZY$ إذن $\angle WZX = \angle XZY$

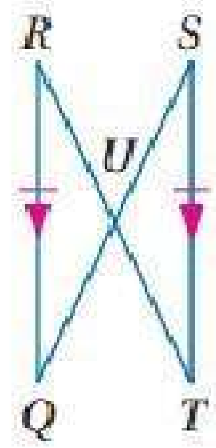
وبما أن $\overline{XZ}$ تنصف $\angle YXW$ إذن $\angle WXZ = \angle YXZ$

وبما أن $\overline{ZX} \cong \overline{ZX}$ حسب خاصية الانعكاس للتطابق

إذن $\Delta XZY \cong \Delta WXZ$ حسب ASA

تحقق

(2



$\overline{RQ} \cong \overline{ST}$ معطى

$\overline{RQ} \parallel \overline{ST}$ معطى

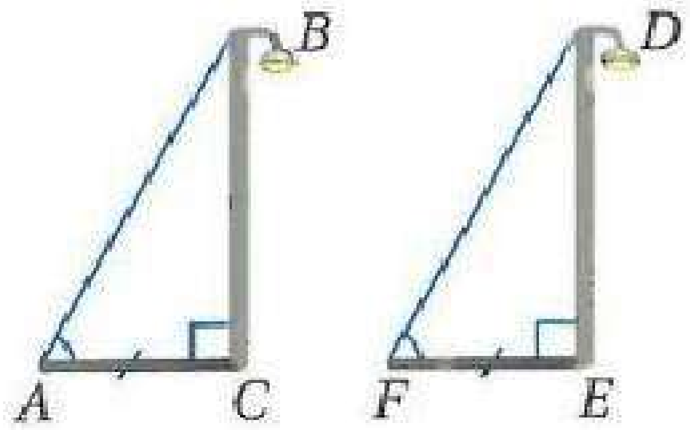
$\angle RQS \cong \angle TSQ$ الزاويتان المتبادلتان داخليا متطابقتان

$\angle RUQ \cong \angle SUT$ الزاويتان المتقابلتان بالرأس متطابقتان

$\Delta RUQ \cong \Delta TUS$

AAS

٣)



بما أن $\overline{DE} \perp \overline{FE}$, $\overline{BC} \perp \overline{AC}$ إذن $\angle BCA \cong \angle DEF$

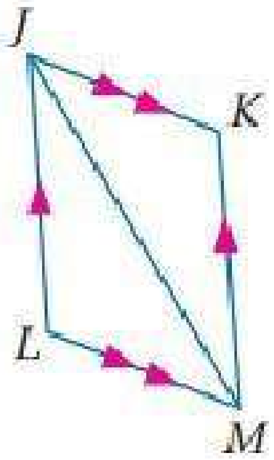
وبما أن $\angle DFE = \angle BAC$ و $AB = CD$ معطى

بحسب المسلمة AAS فان $\Delta BAC \cong \Delta DFE$

لذا $BC = DE$ لأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة

برهان:

(1



$\overline{JK} \parallel \overline{LM}$ — معطى → $\angle KJM \cong \angle LMJ$ — زاويتان متبادلتان داخلياً

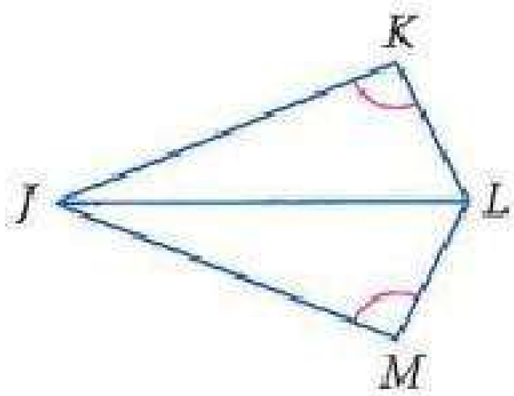
$\overline{JL} \parallel \overline{KM}$ — معطى → $\angle LJM \cong \angle KMJ$ — زاويتان متبادلتان داخلياً

$\overline{JM} \parallel \overline{MJ}$ — خاصية الانعكاس

$\Delta JML \cong \Delta MJK$

ASA

(2



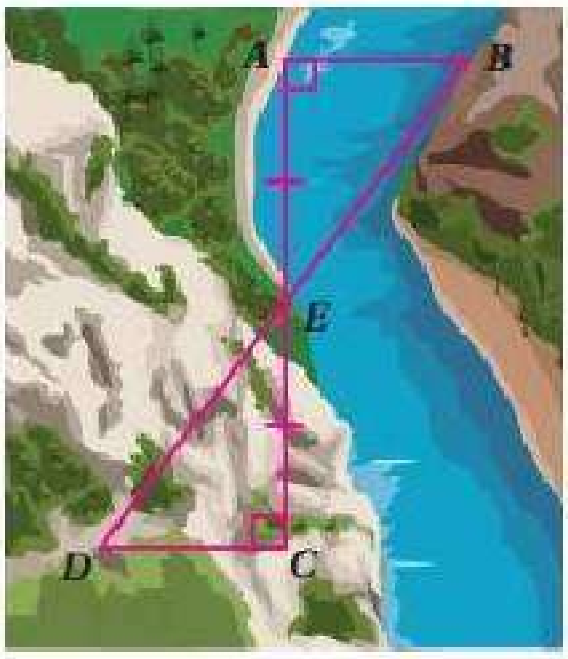
$\angle K \cong \angle M$ ، $\overline{JL}$ تنصف $\angle KLM$

بما أن $\overline{JL}$ تنصف $\angle KLM$ فإن $\angle KLJ \cong \angle MLJ$. لذا

$\Delta JKL \cong \Delta JML$ حسب نظرية التطابق AAS.

3) بناء جسور:

(a



نعلم أن $\angle DCE$, $\angle BAE$ متطابقتان. لأنهما زاويتان قائمتان، $\overline{AE}$ تطابق $\overline{EC}$ بحسب نظرية نقطة المنتصف. ومن نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس، نعلم أن $\angle BEA \cong \angle DEC$. وبحسب ASA ، يعلم المساح أن $\Delta BAE \cong \Delta DCE$

ولأن العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين متطابقة فإن $\overline{AB} \cong \overline{DC}$، ولذا يمكن للمساح أن يقيس $\overline{DC}$ وبذلك يعرف المسافة بين A,B

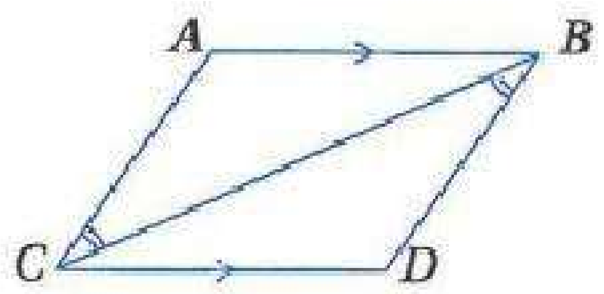
(b

المسافة بين النقطة $A,B = m\,60$ لأن $\overline{AB} \cong \overline{DC}$ بحسب تعريف تطابق القطع المستقيمة

تدرب وحل المسائل

برهان: اكتب برهانا حرا: المثال ١

(4



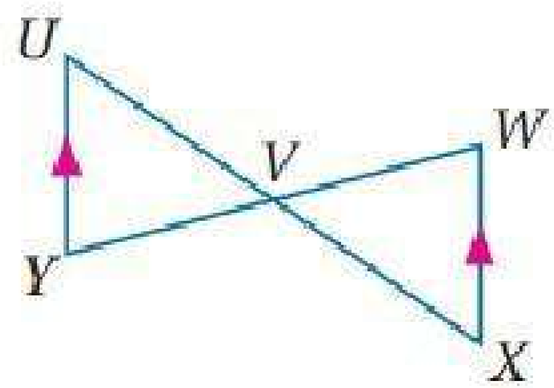
بما أن $\overline{AB} \square \overline{CD}$ إذن $\angle ABC \cong \angle BCD$

$\angle BCA \cong \angle CBD$ ، $\overline{CB}$ ضلع مشترك

$\Delta BDC \cong \Delta CAB$ بحسب مسلمة التطابق ASA

برهان: اكتب برهان ذا عمودين. المثال٢

(5



1) V نقطة منتصف $\overline{YW}$، $\overline{XW} \square \overline{UY}$ (معطيات)

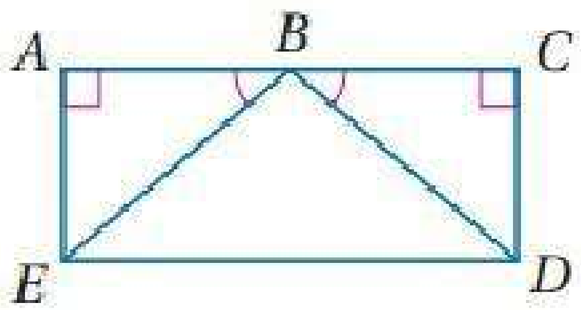
2) $\overline{VW} \cong \overline{YV}$ (تعريف نقطة المنتصف)

3) $\angle VYU \cong \angle VWX$ (نظرية الزاويتين المتبادلتين داخلياً)

4) $\angle VXW \cong \angle VUY$ (نظرية الزاويتين المتبادلتين داخلياً)

5) $\Delta XVW \cong \Delta UVY$ (حسب نظرية AAS)

6) برهان: اكتب برهاناً تسلسلياً.



$\angle A , \angle C$ زاويتان قائمتان
معطى

$\angle A \cong \angle C$
جميع الزوايا القائمة متطابقة

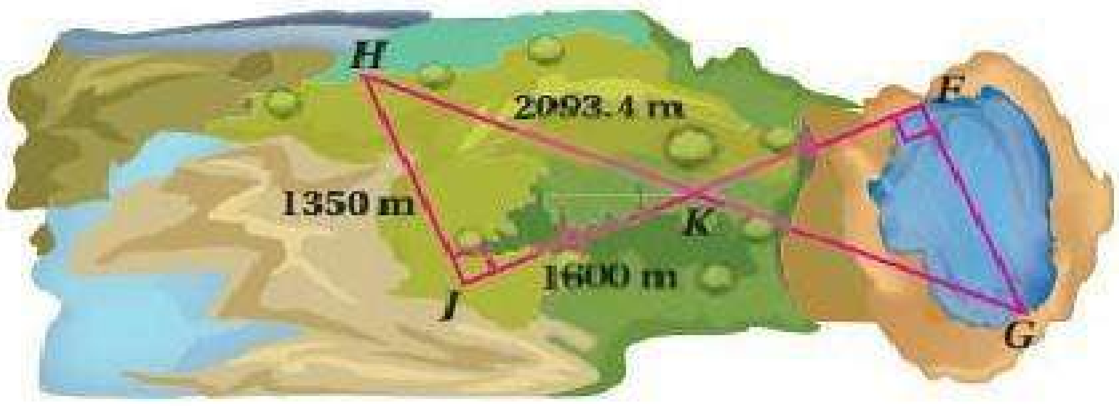
$\angle ABE \cong \angle CBD$
معطى

$\overline{AE} \cong \overline{CD}$
معطى

$\Delta EBA \cong \Delta DBC$
AAS

$\overline{BE} \cong \overline{BD}$
العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة

7) سباق زوارق: المثال٣



a) $\angle HJK \cong \angle KFG$ لان جميع الزوايا القوائم متطابقة و $\overline{KF} = \overline{JK}$

و $\angle FKG \cong \angle HKJ$ متقابلتان بالرأس وبحسب ASA فإن $\Delta HKJ \cong \Delta GFK$

لذا فإن $\overline{HJ} = \overline{FG}$ لان العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة.

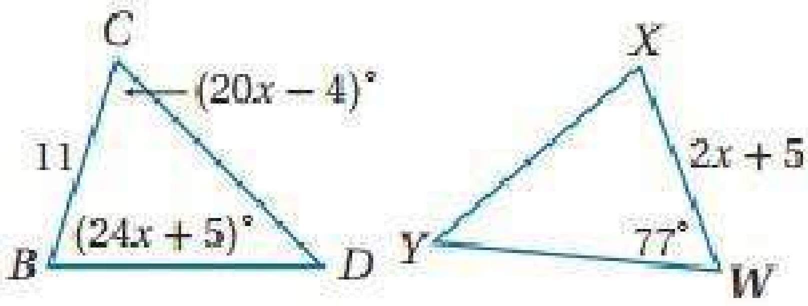
ولذلك يمكن قياس $\overline{HJ}$ لتقدير المسافة $\overline{FG}$ عبر البحيرة.

(b

بما أن $\overline{HJ} = \overline{FG}$ إذن $\overline{FG} = 1350$ أي طول البحيرة $= 1350$ وهذه المسافة غير مطابقة للمسافة المطلوبة، إذن طول البحيرة غير كاف لإجراء السباق.

جبر: أوجد قيمة المتغير التي تجعل المثلثين متطابقين في كل من السؤالين الآتيين:

8)



$\because \Delta BCD \cong \Delta WXY$

$\therefore BC = WX$

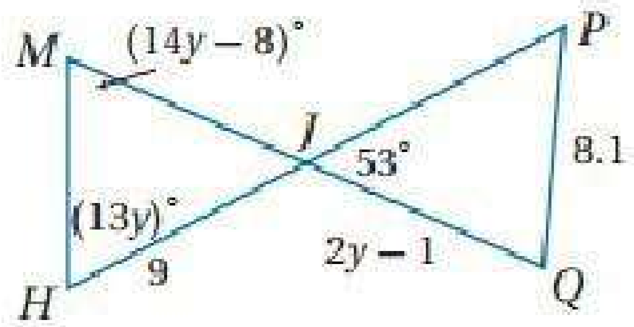
$11 = 2x + 5$

$2x = 11 - 5$

$2x = 6$

$x = 3$

9)



$\because \Delta MHJ \cong \Delta PQJ$

$\therefore HJ = QJ$

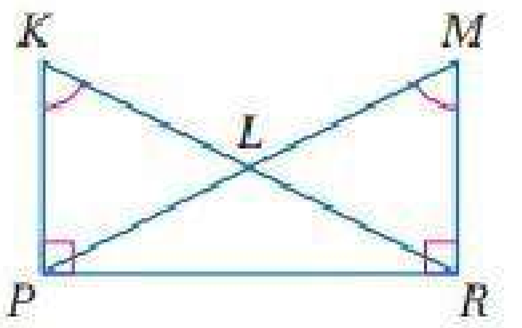
$9 = 2y - 1$

$2y = 9 + 1$

$y = 5$

برهان: اكتب برهانا ذا عمودين

(10



1) $\overline{MR} \perp \overline{PR}$, $\overline{KP} \perp \overline{PR}$, $\angle M \cong \angle K$ (معطيات)

2) $\angle MRP$, $\angle KPR$ قائمتان (تعريف التعامد)

3) $\angle MRP \cong \angle KPR$ (جميع الزوايا القوائم متطابقة)

4) $\overline{PR} \cong \overline{PR}$ (خاصية الانعكاس للتطابق)

5) $\Delta MRP \cong \Delta KPR$ (AAS)

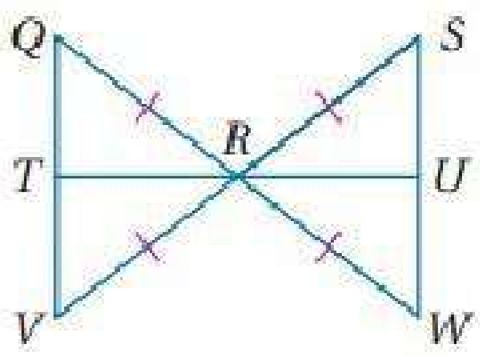
6) $\overline{MR} \cong \overline{KP}$ (العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة)

7) $\angle MLR \cong \angle KLP$ (الزاويتان المتقابلتان بالرأس متطابقتان)

8) $\Delta MLR \cong \Delta KLP$ (AAS)

9) $\angle MRL \cong \angle KPL$ (العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة)

(11



1) $\overline{VR} \cong \overline{WR} \cong \overline{SR} \cong \overline{QR}$ (معطيات)

2) $\angle SRW \cong \angle QRV$ (الزاويتان المتقابلتان بالرأس متطابقتان)

3) $\Delta VRQ \cong \Delta SRW$ (SAS)

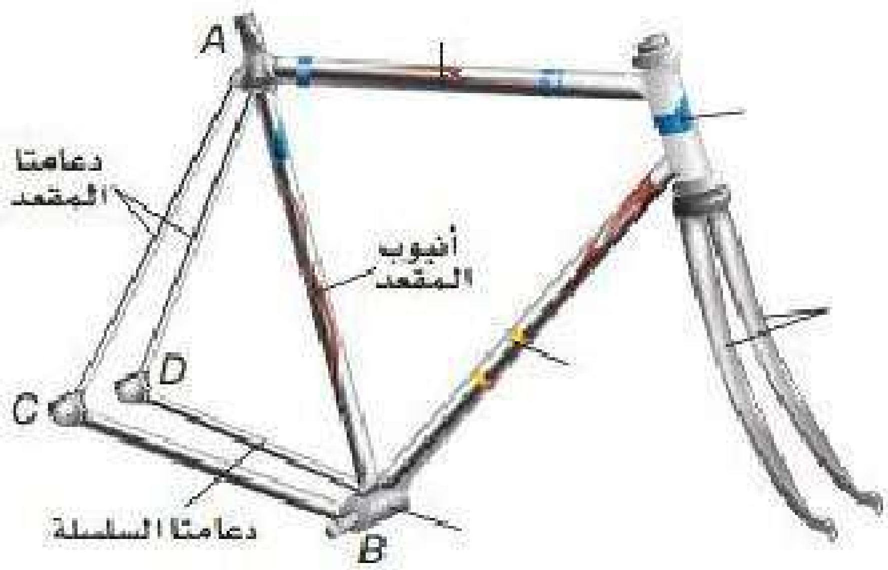
4) $\angle VQR \cong \angle SWR$ (العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة)

5) $\angle QRT \cong \angle URW$ (الزاويتان المتقابلتان بالرأس متطابقتان)

6) $\Delta TRQ \cong \Delta URW$ (ASA)

7) $\overline{WU} \cong \overline{QT}$ (العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة)

12) دراجات هوائية:



1) $m\angle DBA = 44^\circ, m\angle CBA = 44^\circ, m\angle ADB = 68^\circ, m\angle ACB = 68^\circ$
(معطيات)

2) $m\angle DBA = m\angle CBA, \ m\angle ADB = m\angle ACB$ (بالتعويض)

3) $m\angle DBA \cong m\angle CBA, \ m\angle ADB \cong m\angle ACB$ (تعريف تطابق الزوايا)

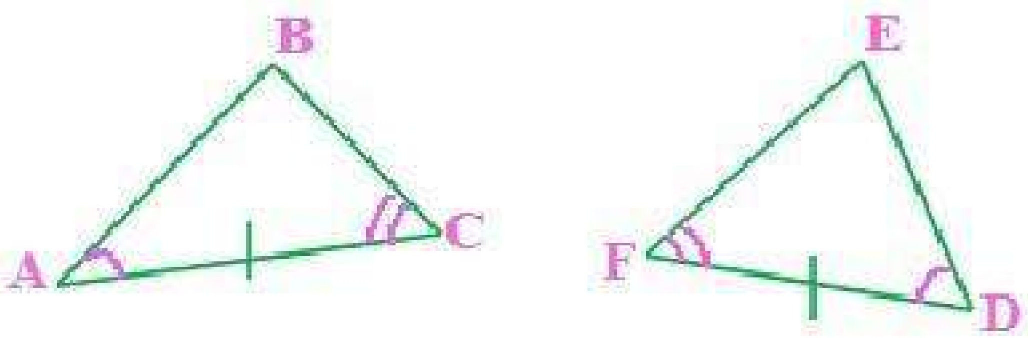
4) $\overline{AB} \cong \overline{AB}$ (خاصية الانعكاس للتطابق)

5) $\Delta ACB \cong \Delta ADB$ (AAS)

6) $\overline{AD} \cong \overline{AC}$ (العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين تكون متطابقة)

مسائل مهارات التفكير العليا

13) مسألة مفتوحة:



$\Delta DEF \cong \Delta ABC$ حسب مسلمة ASA

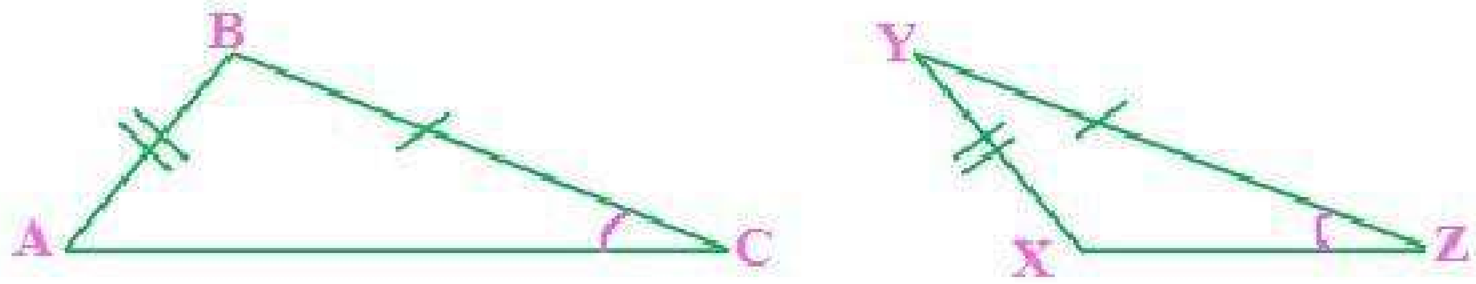
14) اكتشف الخطأ:

عمر إجابته صحيحة، لان حسن حاول إثبات التطابق باستعمال AAA وهي ليست من الحالات التي تستعمل لإثبات التطابق

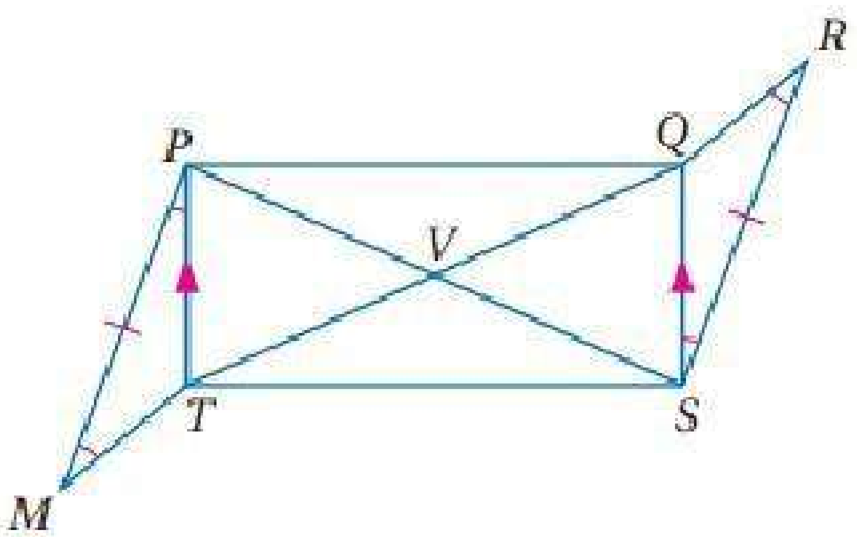
15) تبرير:

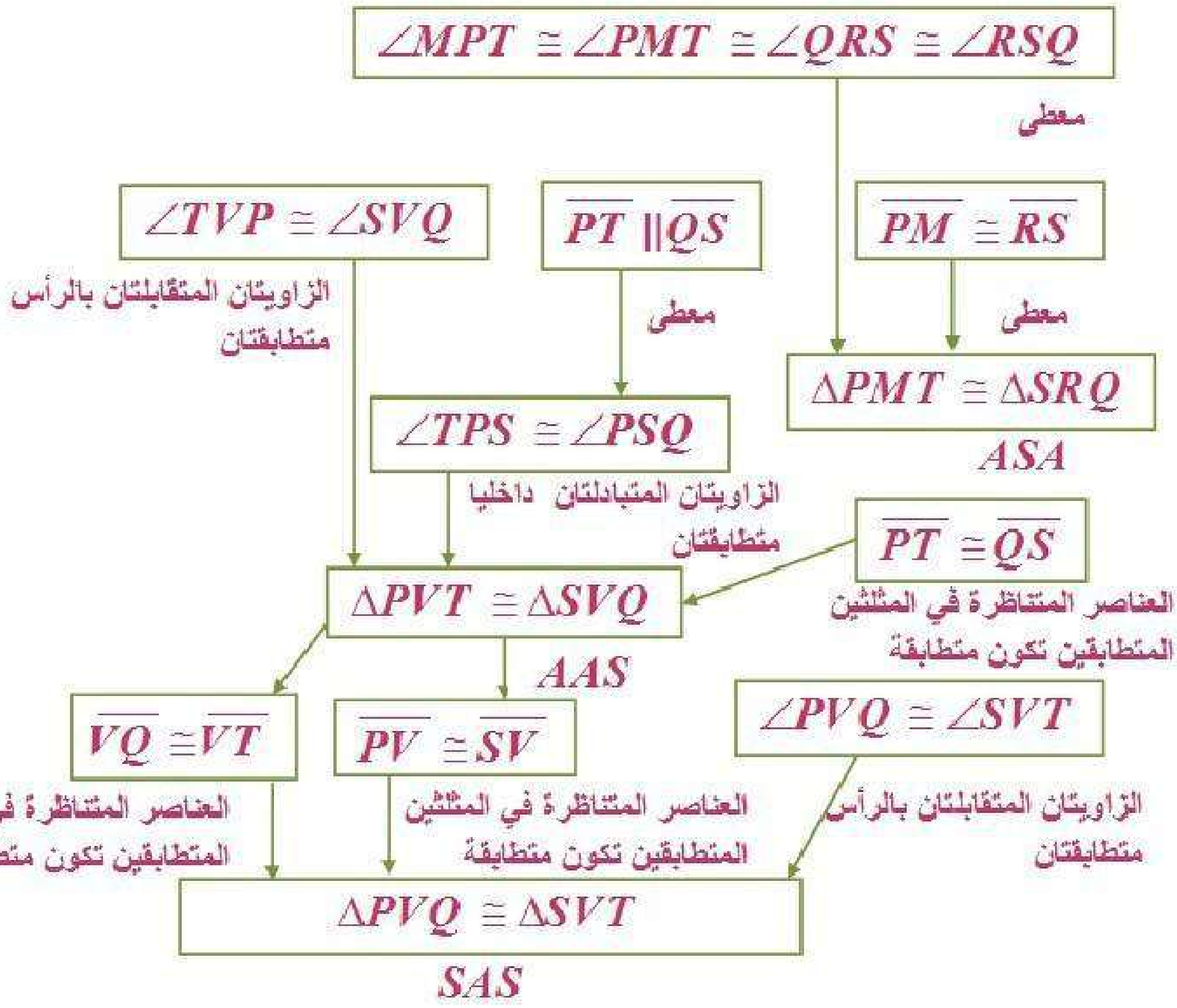
في المثلثين أدناه. نلاحظ أن $\overline{AB} \cong \overline{XY}$، $\angle C \cong \angle Z$, $\overline{BC} \cong \overline{YZ}$،

لكن $\Delta ABC \not\cong \Delta XYZ$



16) تحدٍ:





١٧) اكتب:

الطريقة	وقت استعمالها
تعريف المثلثين المتطابقين	عندما تكون جميع العناصر في أحد المثلثين متطابقة مع نظيراتها في المثلث الآخر
SSS	عندما تكون الأضلاع الثلاث في المثلث الأول متطابقة مع الأضلاع الثلاثة في المثلث الثاني
SAS	عندما يتطابق ضلعان والزاوية المحصورة بينهما في أحد المثلثين مع ضلعين والزاوية المحصورة بينهما في المثلث الآخر.

ASA	عندما يتطابق زاويتان والضلع المحصور بينهما في أحد المثلثين مع زاويتين والضلع المحصور بينهما في المثلث الآخر.
AAS	عندما تتطابق زاويتان وضلع غير محصور بينهما في أحد المثلثين مع زاويتين وضلع غير محصور بينهما في المثلث الآخر.

تدريب على الاختبار المعياري

B (18

بما أن $\angle 2 \cong \angle 1$ (معطى) و $\angle BCD \cong \angle BCA$ تعريف التعامد (زاوية قائمة)

ويوجد ضلع محصور بينهم إذن المسلمة ASA هي المستخدمة لإثبات تطابق المثلثين

A (19 : 15

مراجعة تراكمية

20)

$A(6,4), B(1,-6)$

$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(1-6)^2+(-6-4)^2}$

$\sqrt{25+100}=5\sqrt{5}$

$B(1,-6), C(-9,5)$

$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(-9-1)^2+(5-(-6))^2}$

$\sqrt{100+121}=\sqrt{221}$

$A(6,4), C(-9,5)$

$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(-9-6)^2+(5-4)^2}$

$\sqrt{225+1}=\sqrt{226}$

$X(0,7), Y(5,-3)$

$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(5-0)^2+(-3-7)^2}$

$\sqrt{25+100}=\sqrt{125}$

$Y(5,-3), Z(15,8)$

$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(15-5)^2+(8-(-3))^2}$

$\sqrt{100+121}=\sqrt{221}$

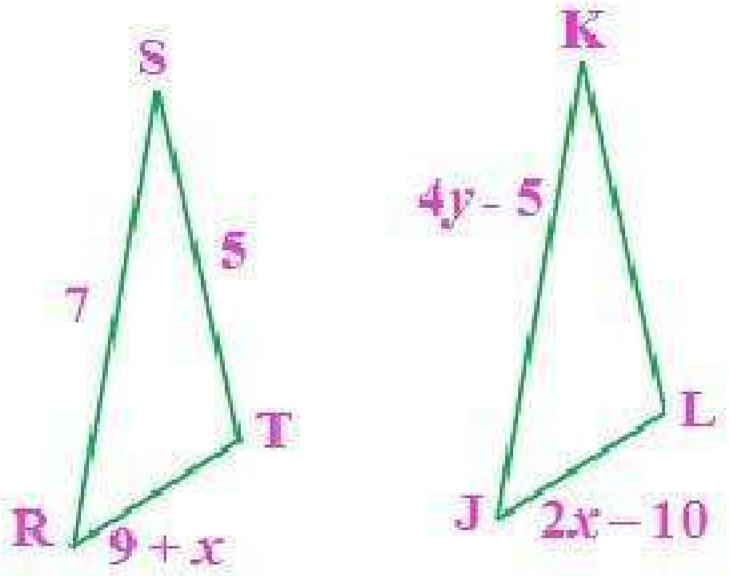
$X(0,7), Z(15,8)$

$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(15-0)^2+(8-7)^2}$

$\sqrt{225+1}=\sqrt{226}$

الأضلاع المتناظرة لها الطول نفسه ومتطابقة إذن $\Delta ABC \cong \Delta XYZ$ بحسب SSS

21) جبر:



$\Delta RST \cong \Delta JKL$

$\overline{JL} = \overline{RT}$

$2x - 10 = 9 + x$

$x = 19$

$\overline{JK} = \overline{SR}$

$4y - 5 = 7$

$4y = 12$

$y = 3$

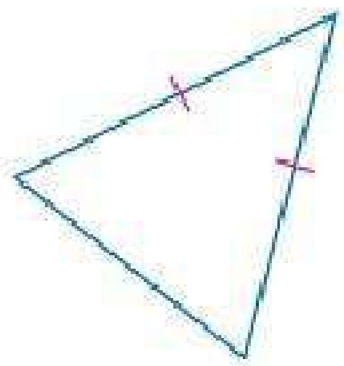
22)

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$
F	T	T	T
T	T	F	T
F	F	T	T
T	F	F	F

استعد للدرس اللاحق

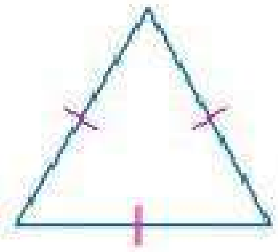
صنف كلا من المثلثين الآتيين وفقا لأضلاعه:

(23



متطابق الضلعين

(24



متطابق الأضلاع

توسع
معمل الهندسة

3-5 تطابق المثلثات القائمة

حل:

(1

a) نعم يتطابق حسب مسلمة SAS

b) نعم يتطابق حسب مسلمة AAS

c) نعم يتطابق حسب مسلمة ASA

(2

a) LL

b) HA

c) LA

3) خمن:

لا نحتاج إلى معلومات إضافية، فتطابق الضلعين في مثلث قائم الزاوية مع نظريهما في مثلث آخر قائم الزاوية كاف لإثبات التطابق

4) نعم

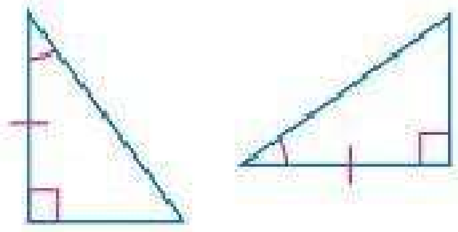
5) نعم

6) يمكن إثبات تطابق مثلثين قائمين باستعمال SSA

تمارين

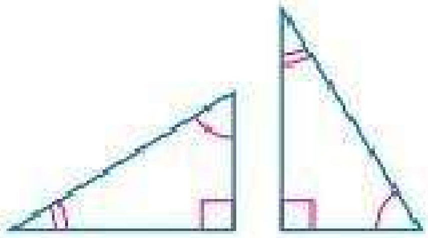
حدد ما إذا كان كل زوج من المثلثات الآتية متطابقات أم لا. وإذا كانت الإجابة (نعم) فاذكر المسلمة أو النظرية التي استعملتها:

(7



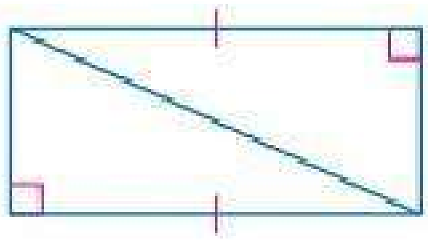
نعم متطابقين بحسب LA ضلع وزاوية حادة.

(8



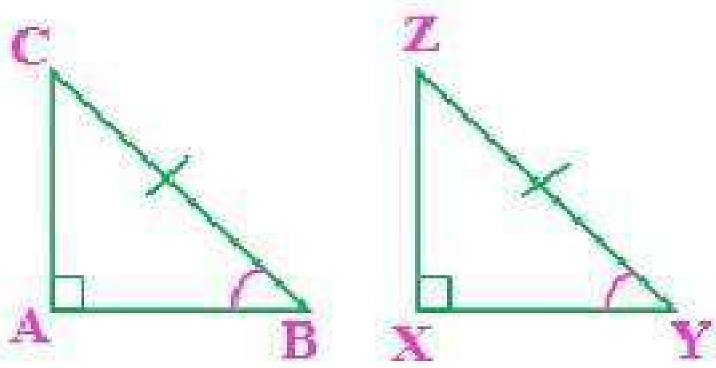
لا يمكن تطابق المثلثين.

(9



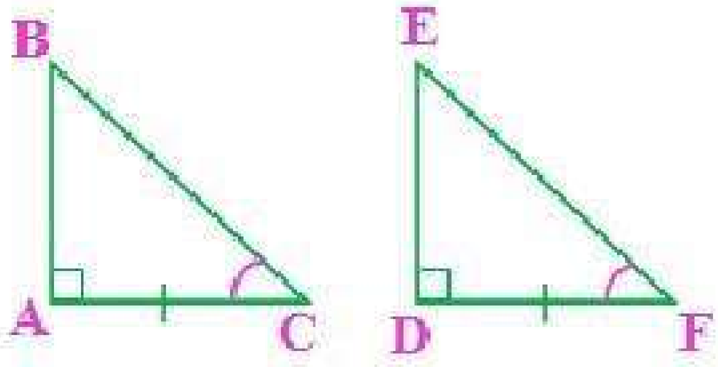
نعم متطابقين بحسب HL ضلع وزاوية حادة.

10) النظرية ٣,٧ :



البرهان: نعلم أن ΔXYZ , ΔABC قائما الزاوية. وأن $\angle X$, $\angle A$ قائمتان، وأن $\angle Y \cong \angle B$, $\overline{YZ} \cong \overline{BC}$. وبما أن جميع الزوايا القائمة متطابقة. فإن $\angle X \cong \angle A$. ولذلك فإن $\Delta XYZ \cong \Delta ABC$ بحسب AAS.

١١) النظرية ٣,٨:



الحالة 1: ΔDEF , ΔABC قائما الزاوية

$\angle A = \angle D, \; AC = DF, \; \angle C = \angle F$

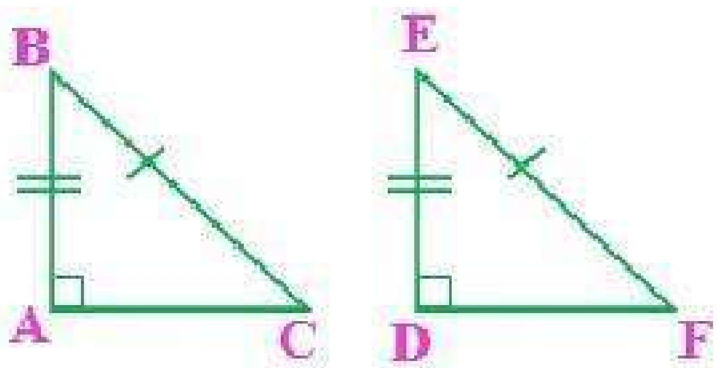
$\Delta ABC \cong \Delta DEF$ بحسب ASA

الحالة 2: ΔDEF , ΔABC قائما الزاوية

$\angle A = \angle E, \; CB = DF, \; \angle B = \angle F$

$\Delta ABC = \Delta DEF$ بحسب AAS

(12



ΔDEF , ΔABC قائما الزاوية

$\overline{BC} \cong \overline{EF}, \; \overline{AB} \cong \overline{DE}$ معطى

$\overline{AB} = \overline{DE}, \; \overline{BC} = \overline{EF}$ (تعريف التطابق)

$(BC)^2 = (CA)^2 + (AB)^2$ **نظرية فيثاغورس**

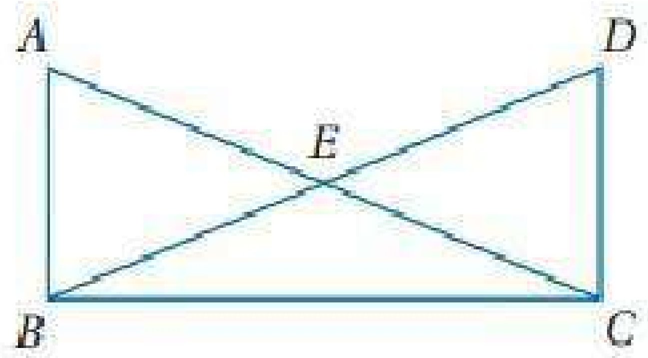
$(EF)^2 = (FD)^2 + (DE)^2$ **نظرية فيثاغورس**

$(FD)^2 + (DE)^2 = (CA)^2 + (AB)^2$ **خاصية التعويض**

$\Delta DEF \cong \Delta ABC$ **حسب** SAS

استعمل الشكل المجاور للإجابة عن السؤال 14:

(13



1) $\overline{BC} \perp \overline{DC}$, $\overline{BC} \perp \overline{AB}$. **(معطيات)**

2) $\angle ABC$ **قائمة،** $\angle DCB$ **قائمة. (المستقيمان المتعامدان يكونان زوايا قائمة)**

3) ΔDCB, ΔABC **قائما الزاوية. (تعريف المثلث القائم الزاوية)**

4) $\overline{BD} \cong \overline{AC}$ **(معطى)**

5) $\overline{BC} \cong \overline{BC}$

6) $\Delta ABC \cong \Delta DCB$ (HL)

7) $\overline{DC} \cong \overline{AB}$ **(العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين تكون متطابقة)**

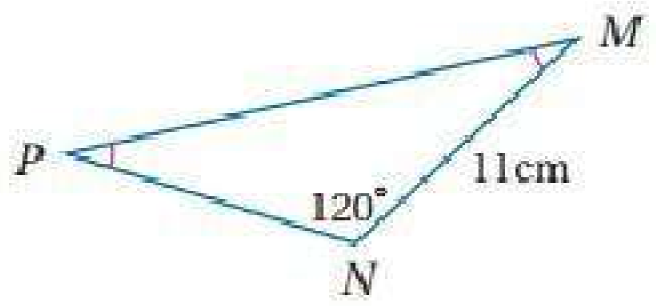
3-6 المثلثات المتطابقة الضلعين والمثلثات المتطابقة الأضلاع

تحقق

$1A)\ \angle FGJ\ ,\angle FJG$

$1B)\ GH\ ,JH$

تحقق



$2A)$

$\angle P + \angle M + \angle N = 180^\circ$

$\angle P = \angle M$

$\angle M + \angle M + 120^\circ = 180^\circ$

$2\angle M = 60^\circ$

$\angle M = 30^\circ$

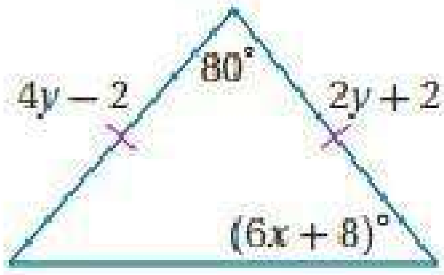
$2B)$

$\because \angle M = \angle P$ عكس نظرية المثلث المتطابق الضلعين

$\therefore \overline{MN} = \overline{PN}$

$PN = 11CM$

3) أوجد قيمة كل متغيرين في الشكل المجاور.



$4y - 2 = 2y + 2$

$4y - 2y = 2 + 2$

$2y = 4$

$y = 2$

$(6x + 8)^{\circ} = 4y - 2$

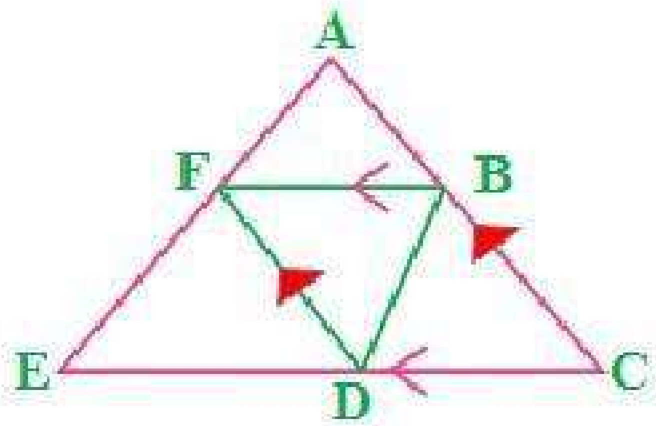
$6x + 8 = (180 - 80) \div 2$

$6x + 8 = 50$

$6x = 42$

$x = 7$

(4



1) ΔACE متطابق الأضلاع، D نقطة منتصف $\overline{EC}$ (معطيات)

2) $m\angle A = 60^{\circ}, m\angle E = 60^{\circ}, m\angle C = 60^{\circ}$ (قياس كل زاوية في المثلث المتطابق الأضلاع يساوي 60°)

3) $m\angle E = m\angle C$ (خاصية التعدي للتطابق)

4) $\angle E \cong \angle C$ (تعريف التطابق)

5) $\overline{ED} \cong \overline{DC}$ (نظرية نقطة المنتصف)

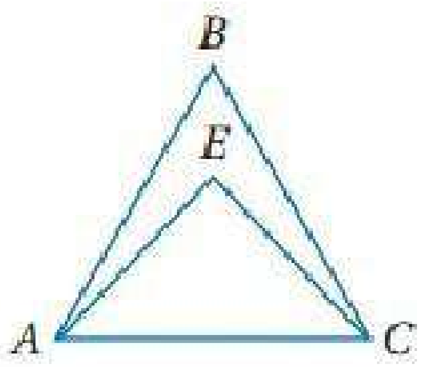
6) $\angle EFD \cong \angle BDF , \angle CBD \cong \angle BDF$ (نظرية الزاويتي المتبادلتين داخلياً)

7) $\angle CBD \cong \angle EFD$ (خاصية التعدي للتطابق)

8) $\Delta FED \cong \Delta BDC$ (AAS)

تأكد

انظر إلى الشكل المجاور: المثال ١

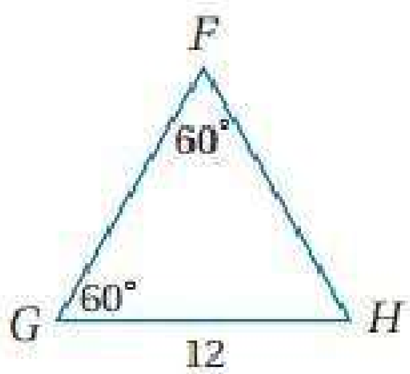


1) $\angle BAC\ ,\angle BCA$

2) $\overline{EA},\overline{EC}$

أوجد كلا من القياسين الآتيين: المثال ٢

3)

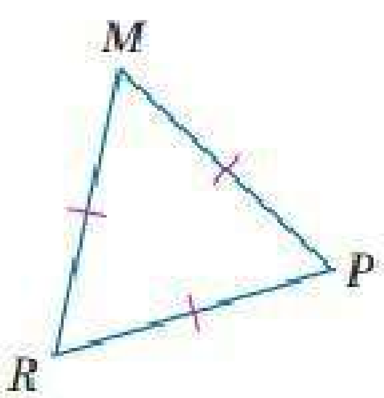


$\because \angle F = \angle G$

$\therefore GH = FH$

$FH = 12$

4)

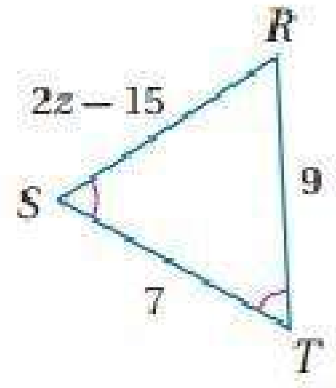


حسب نتيجة ٣,٤ قياس كل زاوية °60 في المثلث المتطابق الأضلاع

$\angle MRP = 60^\circ$

جبر: أو جد قيمة المتغير في كل من السؤالين الآتيين: المثال٣

5)



$\because \angle S = \angle T$

$RT = RS$

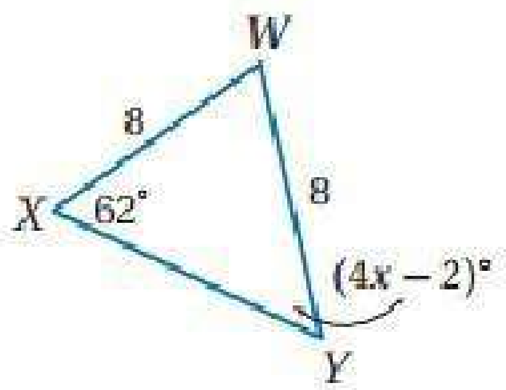
$9 = 2z - 15$ (عكس نظرية المثلث المتطابق الضلعين)

$2z = 9 + 15$

$2z = 24$

$z = 12$

6)



$\because WY = XY$

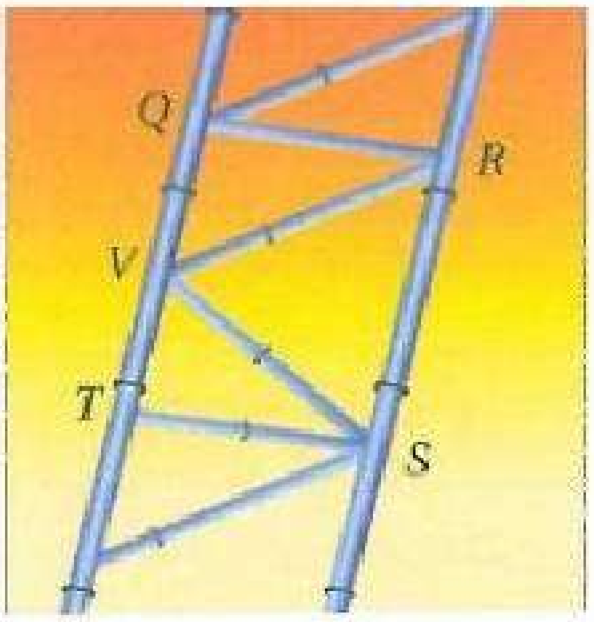
$\angle WYX = \angle WXY$

$4x - 2 = 62$

$4x = 64$

$x = 16$

7) القاطرة السريعة: المثال ٤



a) المعطيات: $\overline{QR}$ و $\overline{ST}$ عموديان على $\overline{QT}$،

المطلوب: $\Delta RQV \cong \Delta STV$

البرهان:

- $\overline{QR}$ و $\overline{ST}$ عموديان على $\overline{QT}$، و ΔVSR متطابق الضلعين و قاعدته $\overline{SR}$ و $\overline{QT} \parallel \overline{SR}$ (معطى)
- $\angle STV$, $\angle RQV$ زوايا قائمة
- $\angle RQV \cong \angle STV$ تعريف الزاوية القائمة
- $\overline{VR} \cong \overline{VS}$ تعريف المثلث المتطابق الضلعين
- $\angle VSR \cong \angle VRS$ تعريف المثلث المتطابق الضلعين
- $\angle TVS \cong \angle VRS$, $\angle QVR \cong \angle VRS$
- $\angle TVS \cong \angle QVR$
- $\angle RQV \cong \angle STV$ حسب مسلمة AAS

b) من نظرية فيثاغورث $QV = \sqrt{2.5^2 - 2^2} = 1.5m$

وحيث أن الاضلاع المتناظرة في المثلثين المتطابقين يكونوا متطابقين

إذن $VT = 1.5m$

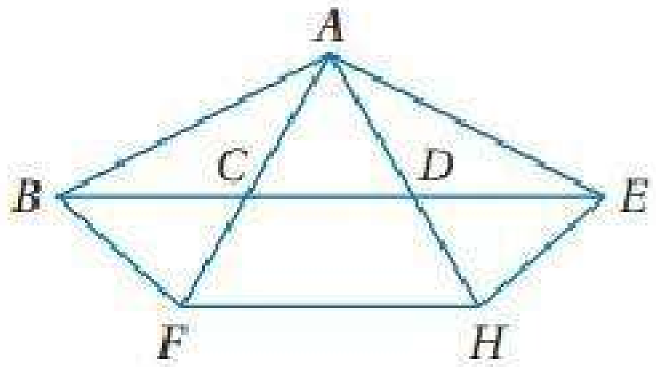
$\because\ QV + VT = QT$

$1.5 + 1.5 = QT$

$QT = 3m$

تدرب وحل المسائل

انظر إلى الشكل المجاور:



8)

$\angle ABE , \angle AEB$

9)

AB , AF

10)

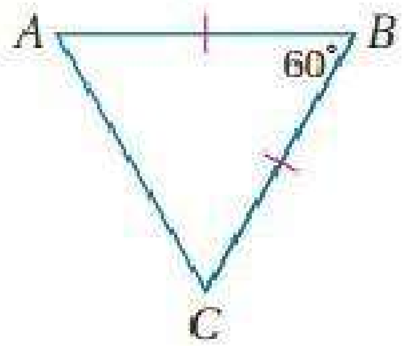
$\angle ACD , \angle ADC$

11)

AD , DE

أوجد كلا من القياسين الآتيين:

12)



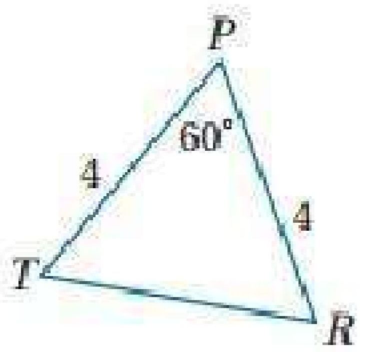
$\because AB = BC$ نظرية المثلث المتطابق الضلعين

$\therefore \angle A = \angle C$

$\angle A = \angle C = (180^\circ - 60^\circ) \div 2 = 60^\circ$

$m\angle BAC = 60^\circ$

13)



$\because PR = PT$ نظرية المثلث المتطابق الضلعين

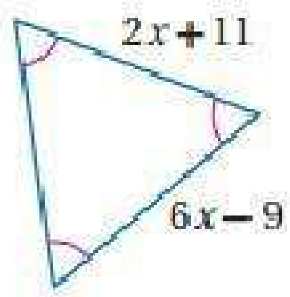
$\therefore \angle R = \angle T$

$\therefore \angle R = \angle T = (180^\circ - 60^\circ) \div 2 = 60^\circ$

$PR = PT = TR$

$TR = 4cm$

14)



بما أن جميع زوايا المثلث متطابقة إذن الأضلع متطابقة حسب عكس نظرية المثلث المتطابق الضلعين.

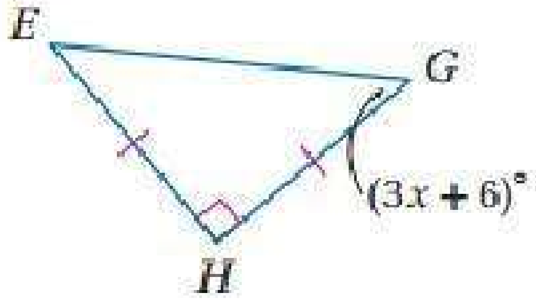
$6x - 9 = 2x + 11$

$6x - 2x = 11 + 9$

$4x = 20$

$x = 5$

15)



$\because HG = HE$

$\therefore \angle E = \angle G = 45^\circ$

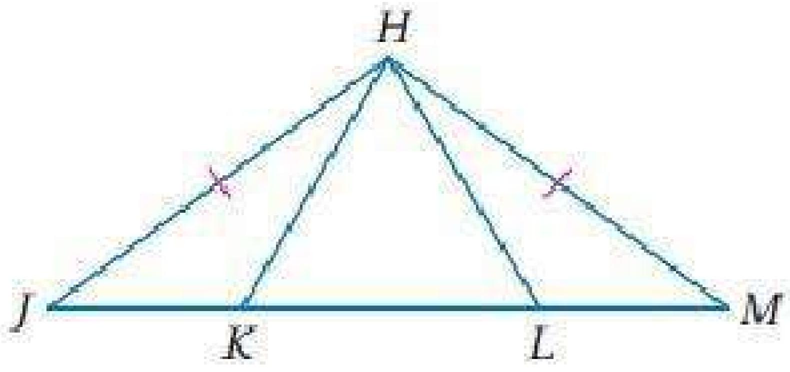
$3x + 6 = 45$ نظرية المثلث المتطابق الضلعين

$3x = 39$

$x = 13$

برهان: اكتب برهانا حرا. المثال ٤

(16



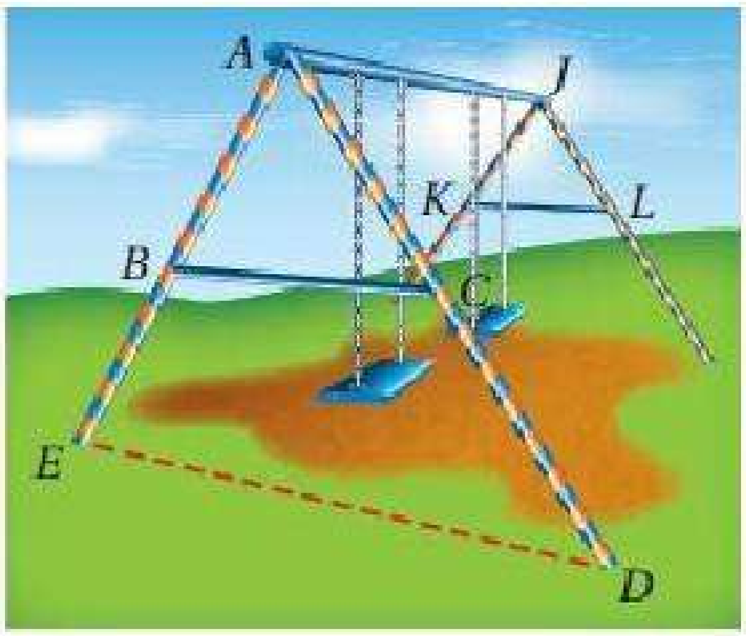
بما أن $HM = HJ$ إذن $\angle HMJ = \angle HJM$

وبما أن ΔHKL متطابق الأضلاع إذن $\angle HKJ = \angle HLM$ لأن $\angle HKL = \angle HLK$ من تطابق المثلث

إذن $\Delta HKJ \cong \Delta HLM$ حسب نظرية AAS.

ولان العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة فان $\angle JHK = \angle MHL$

17) حدائق:



(a

بما أن $\overline{AB} \cong \overline{AC}$ إذن $\angle ABC = \angle ACB$

حسب نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث: $180^\circ - 50^\circ = \angle ABC + \angle ACB$

$130^\circ = \angle ABC + \angle ABC$ (خاصية التعويض)

$65^\circ = \angle ABC$

(b

العبارات	المبررات
$AB \cong AC$, $BE \cong CD$	معطيات

$AB = AC\ ,\ BE = CD$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
$AB + BE = AE$	مسلمة جمع القطع المستقيمة
$AC + CD = AD$	مسلمة جمع القطع المستقيمة
$AB + BE = AC + CD$	خاصية الجمع للمساواة
$AE = AD$	تعريف تطابق القطع المستقيمة
مثلث AED متطابق الضلعين	تعريف المثلث المتطابق الضلعين

(c

1) $\overline{AB} \cong \overline{AC}\ ,\ \overline{BC} \parallel \overline{ED}\ ,\ \overline{ED} \cong \overline{AD}$ (معطيات)

2) $\angle ABC \cong \angle ACB$ (نظرية المثلث متطابق الضلعين)

3) $\angle ABC = \angle ACB$ (تعريف تطابق الزوايا)

4) $\angle ACB \cong \angle ADE\ ,\ \angle ABC \cong \angle AED$ (زوايا متناظرة)

5) $\angle ACB = \angle ADE\ ,\ \angle ABC = \angle AED$ (تعريف تطابق الزوايا)

6) $m\angle AED = m\angle ACB$ (بالتعويض)

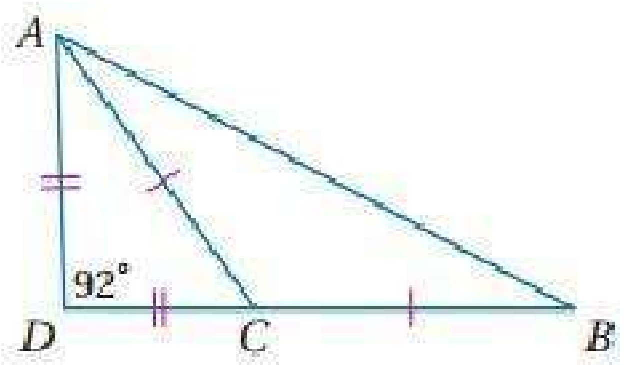
7) $m\angle AED = m\angle ADE$ (بالتعويض)

8) $\angle AED \cong \angle ADE$ (تعريف تطابق الزوايا)

9) $\overline{AD} \cong \overline{AE}$ (عكس نظرية المثلث المتطابق الضلعين)

10) $\triangle AED$ متطابق الأضلاع (تعريف المثلث المتطابق الأضلاع)

أوجد كلا من القياسات الآتية:



18)

$\because DA = DC$

$\angle CAD = \angle ACD$

$2\angle CAD = 180^\circ - 92^\circ$

$\angle CAD = 44^\circ$

19)

$\because DA = DC$

$\angle CAD = \angle ACD$

$2\angle ACD = 180^\circ - 92^\circ$

$\angle ACD = 44^\circ$

20)

$\angle ACB = 180^\circ - \angle ACD$

$\angle ACB = 180^\circ - 44^\circ$

$\angle ACB = 136^\circ$

21)

$\because AC = CB$

$\angle CAB = \angle ABC$

$2\angle ABC = 180^\circ - \angle ACB$

$2\angle ABC = 180^\circ - 136^\circ$

$\angle ABC = 22^\circ$

برهان: اكتب برهانا ذا عمودي لكل نتيجة أو نظرية مما يأتي:

22) الحالة الأولى:

1) $\triangle ABC$ متطابق الأضلاع (معطى)

2) $\overline{AB} \cong \overline{AC} \cong \overline{BC}$ (تعريف المثلث المتطابق الأضلاع)

3) $\angle A \cong \angle B \cong \angle C$ (تعريف المثلث المتطابق الضلعين)

4) $\triangle ABC$ متطابق الزوايا (تعريف المثلث المتطابق الزوايا)

الحالة الثانية:

1) $\triangle ABC$ متطابق الزوايا (معطى)

2) $\angle A \cong \angle B \cong \angle C$ (تعريف المثلث المتطابق الزوايا)

3) $\overline{AB} \cong \overline{AC} \cong \overline{BC}$ (إذا تطابقت زاويتان في مثلث فإن الضلعين المقابلين لهما يكونان متطابقين)

4) $\triangle ABC$ متطابق الأضلاع (تعريف المثلث المتطابق الأضلاع)

(23

1) $\triangle ABC$ متطابق الأضلاع (معطى)

2) $\overline{AB} \cong \overline{AC} \cong \overline{BC}$ (تعريف المثلث المتطابق الأضلاع)

3) $\angle A \cong \angle B \cong \angle C$ (نظرية المثلث المتطابق الضلعين)

4) $m\angle A = m\angle B = m\angle C$ (تعريف التطابق)

5) $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^\circ$ (نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث)

6) $m\angle A = 60^\circ$ (خاصية القسمة)

7) $m\angle A = m\angle B = m\angle C = 60^\circ$ (بالتعويض)

24)

1) افترض أن $\overrightarrow{BD}$ ينصف $\angle ABC$ (مسلمة المنقلة)

2) $\angle ABD \cong \angle CBD$ (تعريف منصف الزاوية)

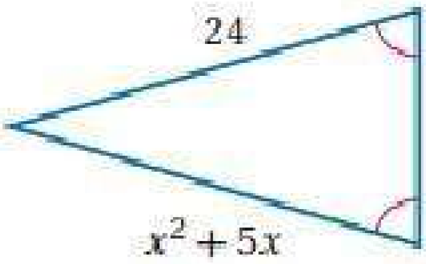
3) $\angle A \cong \angle C$ (معطى)

4) $\overline{BD} \cong \overline{BD}$ (خاصية الانعكاس)

5) $\triangle ABD \cong \triangle CBD$ (AAS)

6) $\overline{AB} \cong \overline{CB}$ (العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين تكون متطابقة)

أوجد قيمة المتغير في كل من السؤالين الآتيين:



25)

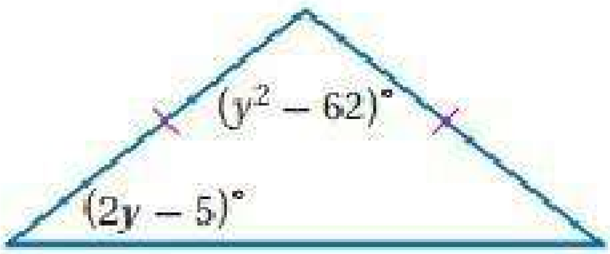
$x^2+5x=24$

$x^2+5x-24=0$ عكس نظرية المثلث المتطابق الضلعين

$(x-3)(x+8)=0$

$x=3$

$x=-8$ ✗



26)

$(y^2-62)+2(2y-5)=180^\circ$

$y^2-62+4y-10=180^\circ$

$y^2+4y-62-190^\circ=0$

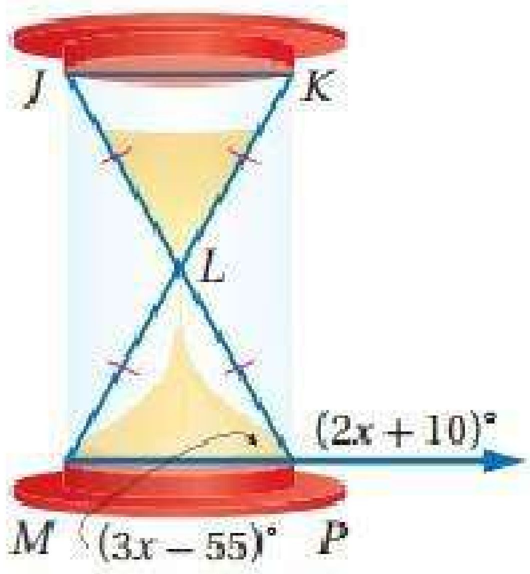
$y^2+4y-252^\circ=0$

$(y+18)(y-14)=0$

$y=14$

$y=-18$ ✗

الساعة الرملية: استعمل الساعة الرملية المبينة في الشكل المجاور، وأوجد كل من القياسات الآتية:



27)

$(2x+10)+(3x-55)=180^\circ$

$5x-45=180$

$5x=180+45$ زاويتان متجاورتان على مستقيم

$x=45$

$\angle LPM=(3x-55)=3\times 45-55$

$\angle LPM=80^\circ$

28)

$\because LP=LM$ نظرية المثلث المتطابق الضلعين

$\angle LPM=\angle LMP=80^\circ$

29)

$\angle MLP=180^\circ-(80^\circ+80^\circ)$ نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث

$\angle MLP=20^\circ$

$\angle MLP=\angle JLK=20^\circ$ زاويتان متقابلتان بالرأس

30)

$\angle JKL + \angle KJL = 180^\circ - 20^\circ$ نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث

$\angle JKL + \angle KJL = 160^\circ$

$\because LK = JL$

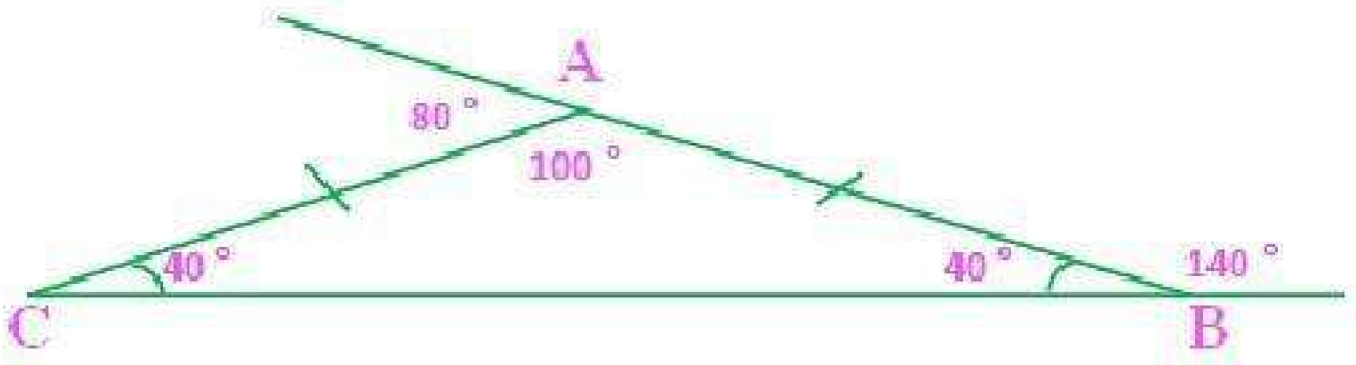
$\therefore \angle JKL = \angle KJL$ نظرية المثلث المتطابق الضلعين

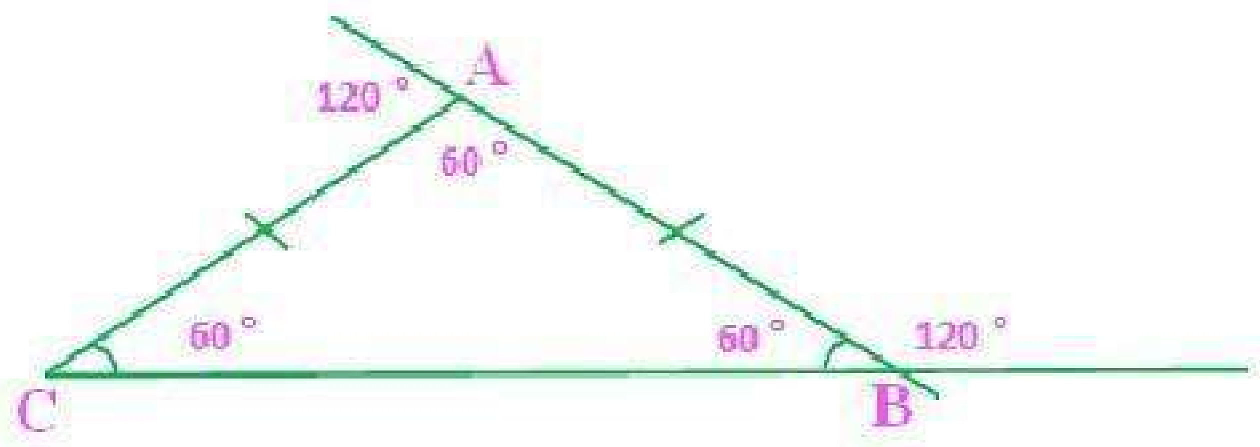
$2\angle JKL = 160^\circ$

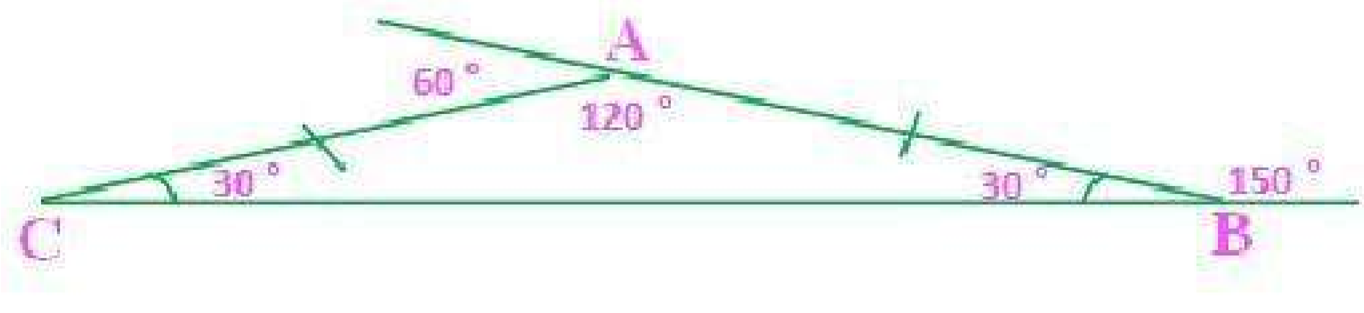
$\angle JKL = 80^\circ$

31) تمثيلات متعددة:

a) هندسيا:







b) جدوليا:

$m\angle 5$	$m\angle 4$	$m\angle 3$	$m\angle 1$
٤٠	٤٠	١٠٠	١٤٠
٦٠	٦٠	٦٠	١٢٠
٣٠	٣٠	١٢٠	١٥٠

$m\angle 5$	$m\angle 4$	$m\angle 3$	$m\angle 2$
٤٠	٤٠	١٠٠	٨٠
٦٠	٦٠	٦٠	١٢٠
٣٠	٣٠	١٢٠	٦٠

c) لفظيا:

زاويتان متجاورتان على مستقيم $m\angle 5 = 180 - m\angle 1$

نظرية المثلث المتطابق الضلعين $m\angle 4 = m\angle 5$

نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث $m\angle 3 = 180 - (m\angle 4 + m\angle 5)$

d) جبريا:

$$m\angle 5 = 180 - x$$

$$m\angle 4 = 180 - x$$

$$m\angle 3 = 180 - 2(180 - x) = 2x - 180$$

مسائل مهارات التفكير العليا

32) تحد:

نعلم أن ΔWJZ متطابق الأضلاع، وبما أن المثلث المتطابق الأضلاع يكون متطابق الزوايا، فإن $\angle JZW \cong \angle WJZ \cong \angle ZWJ$ وبحسب تعريف تطابق الزوايا

$$m\angle ZWJ = m\angle WJZ = m\angle JZW$$

وبما أن $\angle JZL \cong \angle WJM \cong \angle ZWP$ فإن:

$m\angle ZWP = m\angle WJM = m\angle JZL$ ومن تعريف تطابق الزوايا وباستعمال مسلمة جمع الزوايا ينتج أن:

$$m\angle ZWJ = m\angle ZWP + m\angle PWJ\,,$$
$$m\angle WJZ = m\angle WJM + m\angle MJZ\,,$$
$$m\angle JZW = m\angle JZL + m\angle LZW$$

وبالتعويض ينتج أن:

$$m\angle ZWP + m\angle PWJ = m\angle WJM + m\angle MJZ = m\angle JZL + m\angle LZW$$

وبالتعويض مرة أخرى ينتج أن:

$$m\angle ZWP + m\angle PWJ = m\angle ZWP + m\angle PJZ = m\angle ZWP + m\angle LZW$$

وبحسب خاصية الطرح للمساواة ينتج أن:

$m\angle PWJ = m\angle PJZ = m\angle LZW$. ومن تعريف التطابق ينتج أن

$\angle PWJ \cong \angle PJZ \cong \angle LZW$. وبحسب مسلمة ASA ينتج أن

$\Delta WZL \cong \Delta ZJM \cong \Delta JWP$. ولأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين تكون متطابقة، فإن $\overline{JM} \cong \overline{ZL} \cong \overline{WP}$

تبرير:

33) أحيانا، تكون صحيحة فقط عندما يكون قياس زاوية الرأس عددا زوجيا.

34) غير صحيحة أبدا، لان قياس زاوية الرأس يساوي (قياس إحدى زاويتي القاعدة)2 – 180)، إذا كان قياس احدي زاويتي القاعدة عدد صحيح فان مجموع قياس زاويتي القاعدة يكون عددا زوجيا وبالتالي فان قياس زاوية الرأس سيكون زوجيا أيضا.

35) مسألة مفتوحة:

لا يمكن أن يحوى المثلث أكثر من زاوية منفرجة، لذا لا يمكن رسم المثلث المطلوب.

36) اكتب:

مجموع قياسات زوايا المثلث يساوي 180 وزاويتا القاعدة لهما نفس القياس، لذا فان قياس زاوية رأس المثلث يساوي 180 ناقصا مثلي قياس إحدى زاويتي القاعدة

تدريب على الاختبار المعياري

37) $A \;:\; \angle A \cong \angle BCA$

38) D

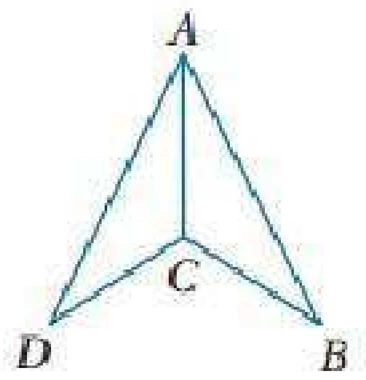
$x = -3$

$4 \times (-3)^2 - 7 \times (-3) + 5$

$36 + 21 + 5 = 62$

مراجعة تراكمية

39)



$\because AB = AD = 27in$ (معطى)

$\because CB = DC = 7in$

$\because AC = AC$ حسب خاصية الانعكاس

$\therefore \Delta ADC \cong \Delta ABC$ حسب SSS

اذكر الخاصية التي تبرر كلا من العبارات الآتية:

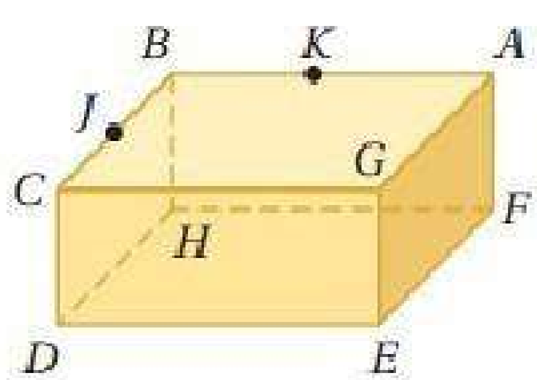
40) خاصية التوزيع

41) خاصية الجمع للمساواة

42) خاصية التعويض

43) خاصية التعدي

انظر إلي الشكل المجاور:



44) 6 مستويات.

45) A, K, B

استعد للدرس اللاحق

أوجد إحداثيات نقطة المنتصف للقطعة التي إحداثيات طرفيها كما يأتي:

46) $A(2,15),\ B(7,9)$

$$\left(\frac{2+7}{2}\right),\left(\frac{9+15}{2}\right)$$

$$(4.5,12)$$

47) $C(-4,6),\ D(2,-12)$

$$\left(\frac{-4+2}{2}\right),\left(\frac{6-12}{2}\right)$$

$$(-1,-3)$$

48) $E(3,2.5),\ F(7.5,4)$

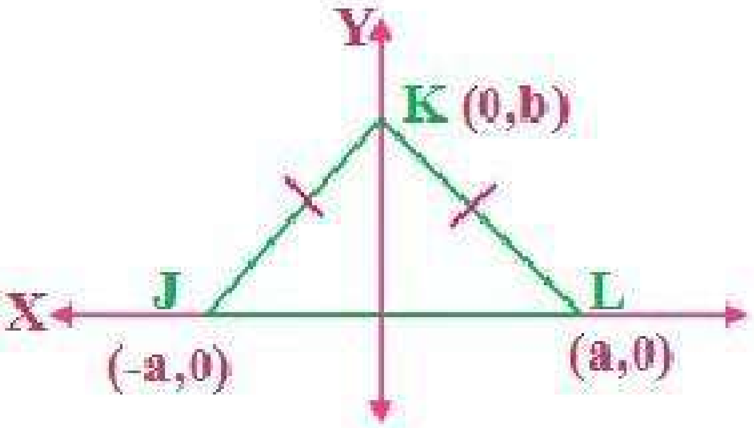
$$\left(\frac{7.5+3}{2}\right),\left(\frac{2.5+4}{2}\right)$$

$$(5.25,3.25)$$

3-7 المثلثات والبرهان الإحداثي

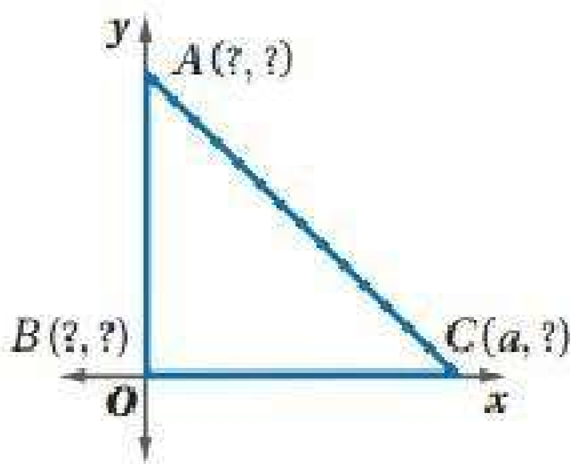
تحقق
صفحة 190

(1



تحقق
صفحة 191

(٢



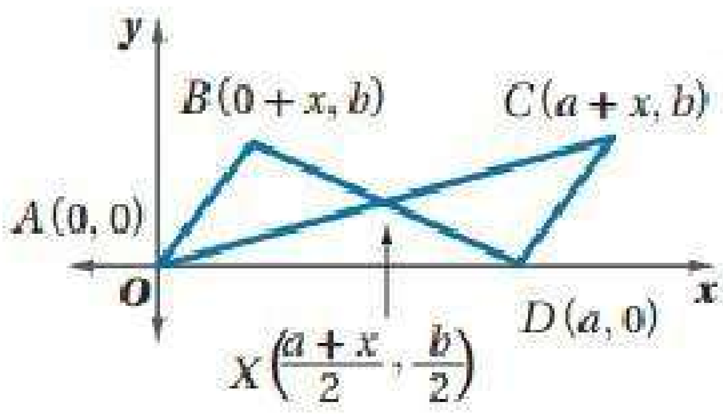
بما أن الرأس B يقع عند نقطة الأصل، فإن إحداثياته هي $(0,0)$

وبما أن الرأس C يقع على المحور X فإن الإحداثي $Y=0$ وتكون الرأس C: $(a,0)$

وبما أن المثلث متطابق الضلعين والرأس A يقع على المحور Y فإن الإحداثي $X=0$
وتكون الرأس A: $(0,a)$

تحقق

(3



نقطة منتصف $\overline{AC}$ هي

$$\left(\frac{0+a+x}{2}, \frac{0+b}{2}\right) = \left(\frac{a+x}{2}, \frac{b}{2}\right)$$

نقطة منتصف $\overline{BD}$ هي $\left(\frac{0+x+a}{2}, \frac{b+0}{2}\right) = \left(\frac{a+x}{2}, \frac{b}{2}\right)$

$\overline{AC}$ ينصف $\overline{BD}$ و $\overline{BD}$ ينصف $\overline{AC}$ وذلك بتعريف المنصف.

$\overline{BX} \cong \overline{XD}$ و $\overline{AX} \cong \overline{XC}$ وذلك بتعريف المنصف.

$$CD = \sqrt{((a+x)-a)^2 + (b-0)^2} = \sqrt{x^2 + b^2}$$

$$AB = \sqrt{((0+x)-0)^2 + (b-0)^2} = \sqrt{x^2 + b^2}$$

إذن $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ بتعريف تطابق القطع المستقيمة.

$\Delta ABX \cong \Delta CDX$ بحسب SSS

4) جغرافيا:

افترض أن T ترمز لمدينة تبوك، A ترمز لمدينة عرعر، Hلمدينة حائل

$$AT = \sqrt{(28.37-30.9)^2+(36.6-41.13)^2} \approx 5.19$$

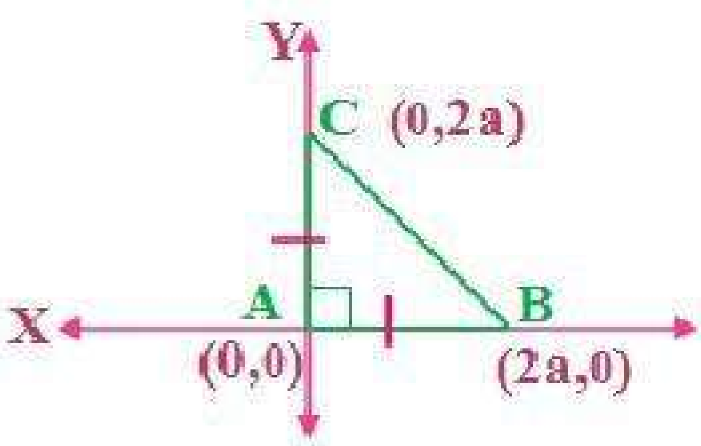
$$HT = \sqrt{(28.37-27.43)^2+(36.6-41.68)^2} \approx 5.17$$

$$AH = \sqrt{(30.9-27.43)^2+(41.13-41.68)^2} \approx 3.51$$

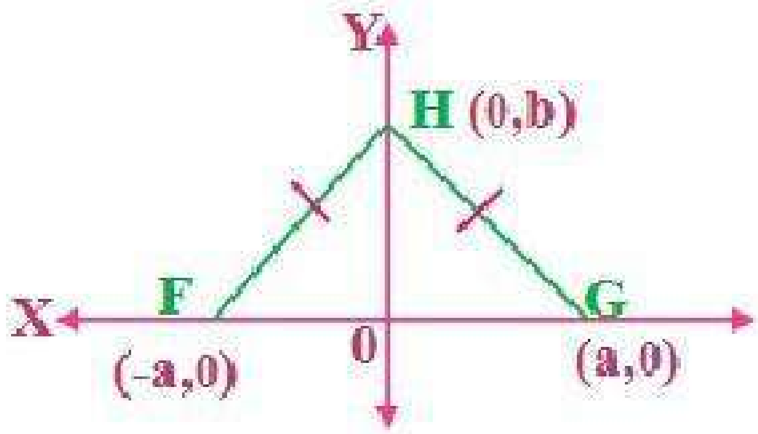
وبما أن $AT \cong HT$، فإن ΔATH متطابق الضلعين تقريباً.

ارسم كلا من المثلثين الآتيين في المستوي الاحداثي وحدد إحداثيات رؤوسه: المثال١

(1

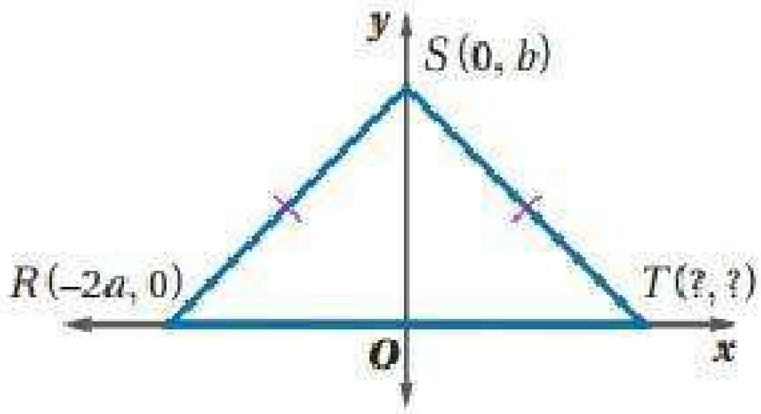


(2



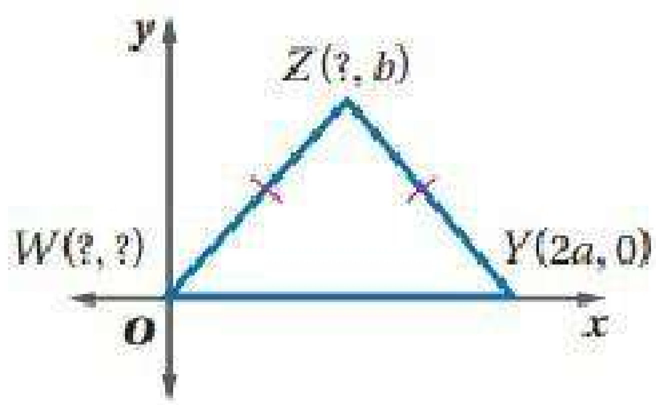
أوجد الإحداثيات المجهولة في كل من المثلثين الآتيين: المثال ٢

(3



وبما أن الرأس T يقع على المحور X فإن الإحداثي $Y = 0$ وبما أن المثلث متطابق الضلعين فإن النقطة T تقع عند النقطة $(2a, 0)$

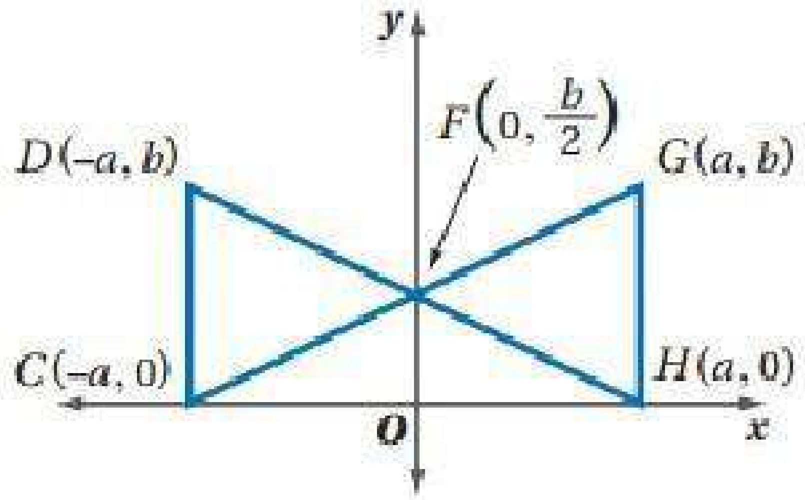
(4



بما أن الرأس W يقع عند نقطة الأصل، فإن إحداثياته هي $(0,0)$

وبما أن المثلث متطابق الضلعين فإن الإحداثي x للرأس Z يقع في منتصف المسافة بين $0, 2a$ ويكون a إذن الإحداثي الرأسي Z: (a,b)

5) اكتب برهانا احداثياً لإثبات أن $\Delta FDC \cong \Delta FGH$. المثال٣



$$DC = \sqrt{(-a-(-a))^2 + (b-0)^2} = b$$

$$GH = \sqrt{(a-a)^2 + (b-0)^2} = b$$

بما أن $GH = DC$، فإن $\overline{GH} \cong \overline{DC}$.

$$DF = \sqrt{(0-a)^2 + \left(\frac{b}{2} - b\right)^2} = \sqrt{a^2 + \frac{b^2}{4}}$$

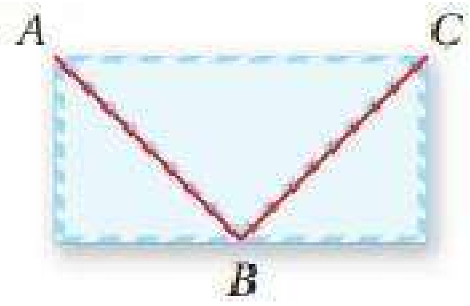
$$GF = \sqrt{(0+a)^2 + \left(\frac{b}{2} - b\right)^2} = \sqrt{a^2 + \frac{b^2}{4}}$$

$$CF = \sqrt{(0+a)^2 + \left(\frac{b}{2} - 0\right)^2} = \sqrt{a^2 + \frac{b^2}{4}}$$

$$HF = \sqrt{(a-0)^2 + \left(0 - \frac{b}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 + \frac{b^2}{4}}$$

$\Delta FDC \cong \Delta FGH$ بحسب SSS

6) اكتب برهانا إحداثياً لإثبات أن المثلث ABC متطابق الضلعين: المثال٤



استعمل صيغة المسافة بين نقطتين لتجد AB و BC

$$A(0,10), B(10,0), C(20,10)$$

$$AB = \sqrt{(0-10)^2 + (10-0)^2} = \sqrt{200}$$

$$BC = \sqrt{(20-10)^2 + (10-0)^2} = \sqrt{200}$$

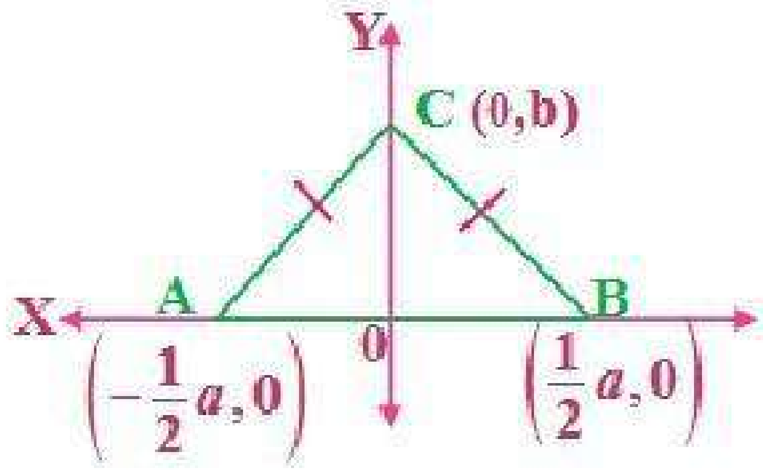
وبما أن $AB = BC$، فإن $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ ويكون الساقان متطابقتين، أي أن:

ΔABC متطابق الضلعين.

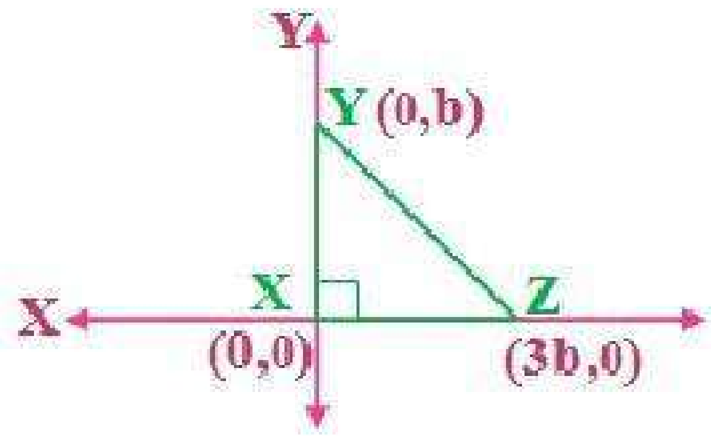
تدرب وحل المسائل

ارسم كلا من المثلثين الآتيين في المستوي الاحداثي وحدد إحداثيات رؤوسه:

(7

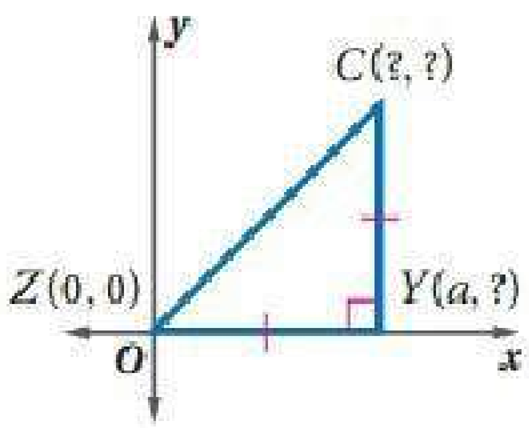


(8



أوجد الإحداثيات المجهولة في كل مثلث مما يأتي: المثال ٢

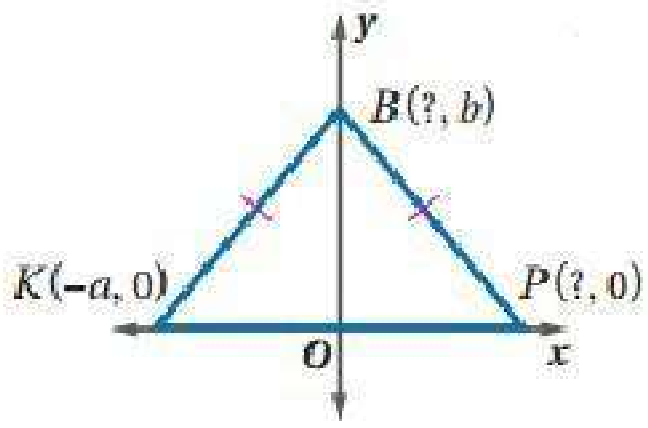
(9



وبما أن الرأس Y يقع على المحور X فإن الإحداثي $Y = 0$ وتكون الرأس Y: $(a,0)$

وبما أن المثلث متطابق الضلعين إذن تكون الرأس C: (a,a)

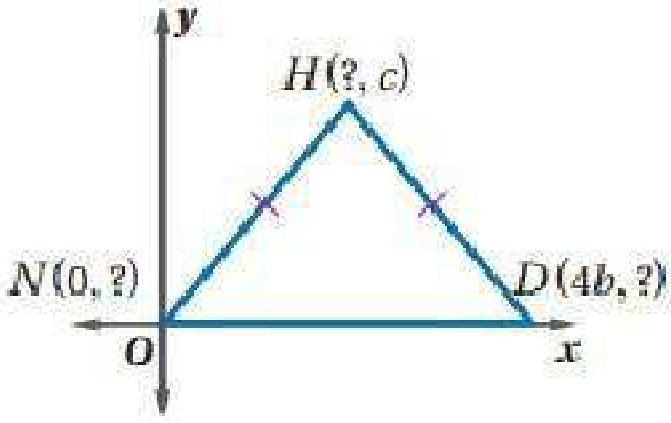
(10



وبما أن الرأس B يقع على المحور Y فإن الإحداثي $X = 0$ وتكون الرأس B: $(0,b)$

بما أن المثلث متطابق الضلعين إذن B تقع في المنتصف إذن النقطة P: $(a,0)$

(11



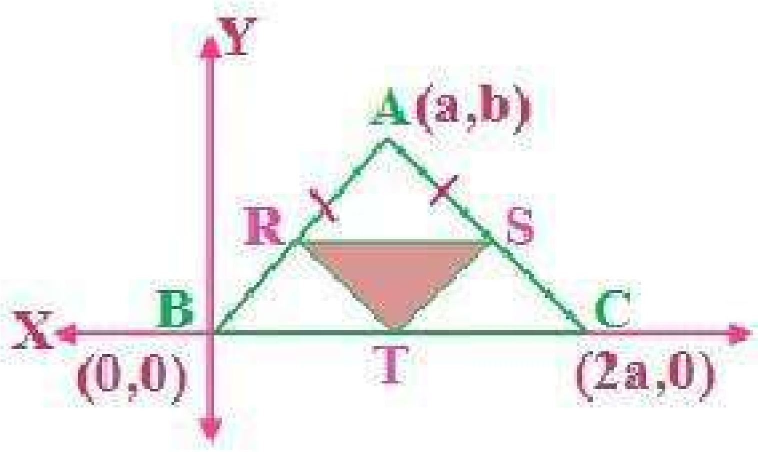
بما أن الرأس N يقع عند نقطة الأصل، فإن إحداثياته هي $(0,0)$

وبما أن الرأس D يقع على المحور X فإن الإحداثي $Y=0$ وتكون الرأس D: $(4b,0)$

وبما أن المثلث متطابق الضلعين فإن الإحداثي x للرأس H يقع في منتصف المسافة بين $0,4b$ ويكون $2b$ إذن الإحداثي الرأسي H: $(2b,c)$

برهان:

(12



إحداثيات R هي $\left(\frac{a+0}{2},\frac{b+0}{2}\right)=\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right)$

إحداثيات S هي $\left(\frac{a+2a}{2},\frac{b+0}{2}\right)=\left(\frac{3a}{2},\frac{b}{2}\right)$

إحداثيات T هي $\left(\frac{2a+0}{2},\frac{0+0}{2}\right)=(a,0)$

$$ST=\sqrt{\left(\frac{3a}{2}-a\right)^2+\left(\frac{b}{2}-0\right)^2}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{4}}$$

$$RT=\sqrt{\left(\frac{a}{2}-a\right)^2+\left(\frac{b}{2}-0\right)^2}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{4}}$$

لاحظ أن $RT=ST$، وهذا يعني أن $\overline{ST}\cong\overline{RT}$، لذا فالمثلث ΔRST متطابق الضلعين.

(13

إحداثيات S هي $\left(\frac{b}{2},\frac{c}{2}\right)$

وإحداثيات T هي $\left(\frac{a+b}{2},\frac{c}{2}\right)$

$$ST=\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}-\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{c}{2}-\frac{c}{2}\right)^2}=\frac{a}{2}$$

$$AB=\sqrt{(a-0)^2+(0-0)^2}=a$$

اذن $ST=\frac{1}{2}AB$

14) جغرافيا:

المسافة بين جيزان ونجران: $\sqrt{(16.9-17.5)^2+(42.58-44.16)^2}\approx 1.69$

المسافة بين جيزان وخميس: $\sqrt{(16.9-18.3)^2+(42.58-42.8)^2}\approx 1.42$

المسافة بين نجران وخميس: $\sqrt{(17.5-18.3)^2+(44.16-42.8)^2}\approx 1.58$ وبما أن هذه المسافات مختلفة، فإن المثلث الذي رؤوسه هذه المدن الثلاث مختلف الأضلاع.

أوجد ميل كل ضلع من أضلاعه ثم حدد ما إذا كان المثلث قائم الزاوية أم لا. ووضح إجابتك:

(15

$$m_{(x,y)}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{2h-0}{2h-0}=1$$

$$m_{(y,z)}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{0-2h}{4h-2h}=-1$$

$$m_{(z,x)}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{0-0}{4h-0}=0$$

ميل XY يساوي 1، ميل YZ يساوي -1 ميل ZX يساوي صفرا

وبما أن ناتج ضرب ميلي ضلعين في المثلث يساوي -1 فانه قائم الزاوية.

(16

$$m_{(x,y)}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{h-0}{1-0}=h$$

$$m_{(y,z)}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{0-h}{2h-1}=\frac{-h}{2h-1}$$

$$m_{(z,x)}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{0-0}{2h-0}=0$$

ميل XY يساوي h، ميل YZ يساوي $\frac{-h}{2h-1}$ ميل ZX يساوي صفرا

ولا يوجد ميلان ناتج ضربهما يساوي -1 إذن المثلث ليس قائم الزاوية

17) نزهة:

ميل الطريق الواصل بين الخيميتين يساوي:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{9-25}{12-0}=\frac{-16}{12}=\frac{-4}{3}$$

وميل الطريق بين موقع الإدارة والخيمة الواقعة عند $(12,9)$ يساوي:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{9-0}{12-0}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$$

وبما أن $\frac{3}{4}\times\frac{-4}{3}=-1$، فإن المثلث المتشكل من الخيمتين وإدارة المتنزة مثلث قائم الزاوية.

18) رياضة مائية:

(a

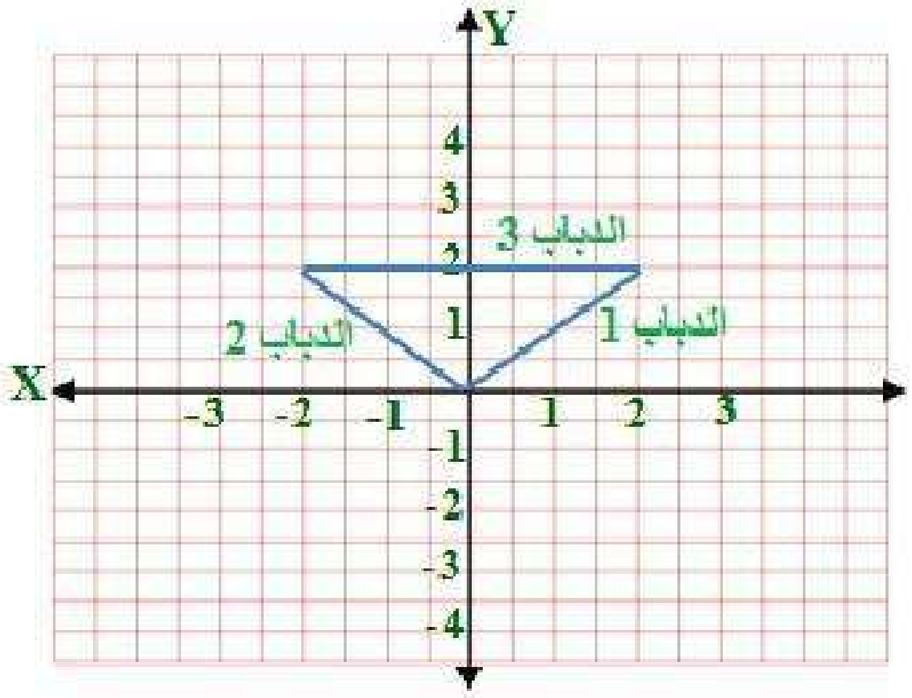
القارب الأول يسير نفس عدد الوحدات للشمال و للشرق من نقطة الأصل و الجزء المقطوع من محور الصادات = 0

لذا ميل معادلة سير القارب الأول = 1، معادلته هي $y=x$

بالمثل القارب الثاني يسير نفس عدد الوحدات للشمال و للغرب من نقطة الأصل و الجزء المقطوع من محور الصادات = 0

لذا ميل معادلة سير القارب الثاني = (-1) و معادلته هي $y=-x$

القارب الثالث يسير إلى الشمال و هذا يعني على محور الصادات، لذا معادلة المستقيم هي $x=0$



(b

المسافة بين الرصيف وكل من القاربين الأول والثاني $300m$، لذا فإن هذين الضلعين متطابقان. ويكون المثلث المتكون من الرصيف وكل من القاربين الأول والثاني متطابق الضلعين بحسب تعريف المثلث المتطابق الضلعين.

(c

الدباب الأول سار نفس الوحدات الى الشمال و الشرق من نقطة الأصل لذا مسار الدباب الاول يعتبر وتر للمثلث القائم المتطابق الأضلاع .

نفرض x طول الساقين المتطابقين للمثلث القائم و المتطابق الأضلاع .

بتطبيق نظرية فيثاغورث

$$2x^2 = 300 \times 300 = 90000$$

$$x = \sqrt{\frac{90000}{2}} = \sqrt{45000} = 150\sqrt{2}$$

بالمثل للدباب الثاني نفرض ان y طول الساقين المتطابقين للمثلث القائم و المتطابق الاضلاع.

$$2y^2 = 300 \times 300 = 90000$$

$$y = \sqrt{\frac{90000}{2}} = \sqrt{45000} = 150\sqrt{2}$$

حيث أن مسار الدباب الاول يقع في الربع الاول ، لذا فإن احداثياته هي:

$$\left(150\sqrt{2}\ ,\ 150\sqrt{2}\right)$$

بالمثل الدباب الثاني يقع في الربع الثاني، لذا فإن إحداثياته هي:

$$\left(-150\sqrt{2}\ ,150\sqrt{2}\right)$$

الدباب الثالث سار إلى الشمال $212\ yd.$ على محور الصادات، لذا احداثياته هي $(0\ ,\ 212)$.

(d

$$\because 150\sqrt{2} \approx 212.13$$

لذا يعتبر الثلاث دبابات لهما تقريبا نفس الإحداثي الصادي، أي تقريبا على استقامة واحدة

منتصف المسافة بين الدباب الاول و الثاني:

$$\left(\frac{150\sqrt{2}+\left(-150\sqrt{2}\right)}{2}\ ,\ \frac{212+212}{2}\right)=(0\ ,\ 212)$$

و هذا هو موقع الدباب الثالث.

مسائل مهارات التفكير العليا

تحد:

19) $L:(a,0)$

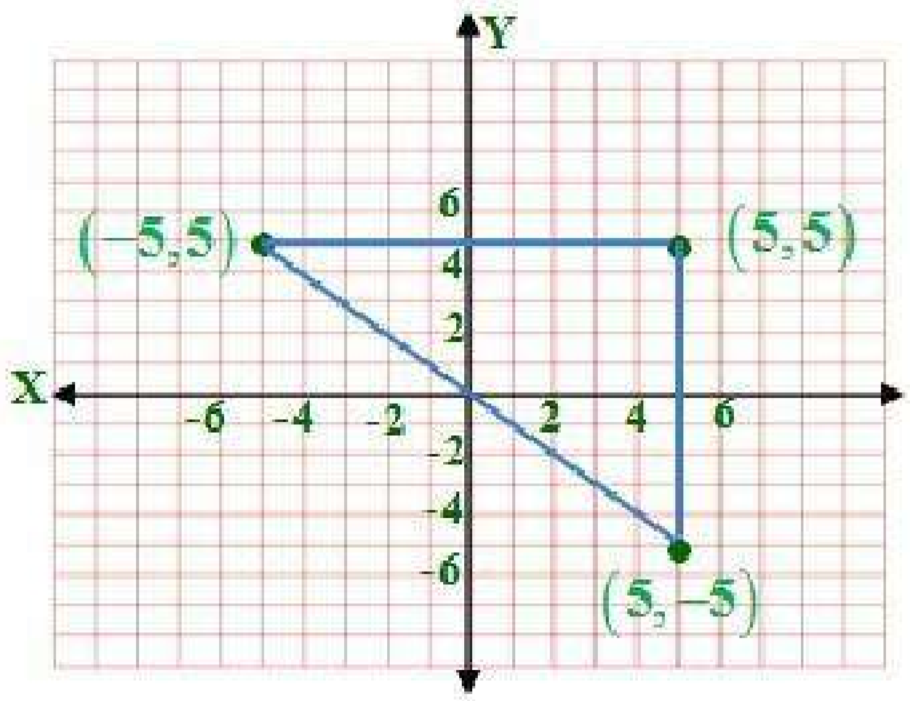
20) $L:(2a,0)$

21)

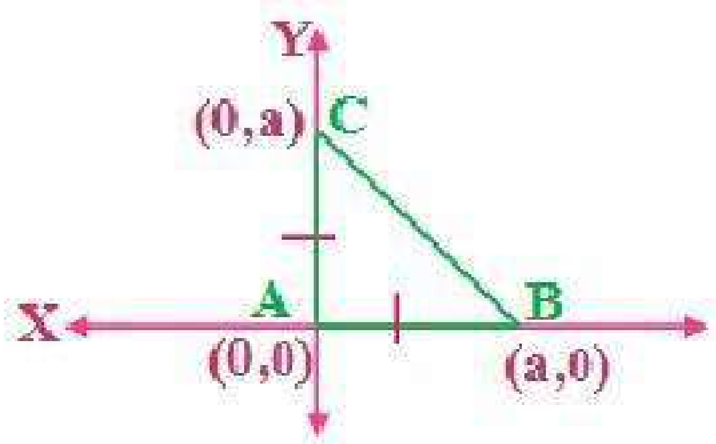
بما أن المثلث متطابق الضلعين والنقطة K تقع في متصف المسافة بين الرأس L, J

إذن النقطة $L:(4a,0)$

22) مسألة مفتوحة:



23) تبرير:



بما أن الرأس الثالث يقع على محور y إذن $x = 0$ وتكون إحداثيات الرأس $(0, a)$

24) اكتب:

a) استعمال نقطة الأصل رأسا للمثلث يسهل العمليات الحسابية لان إحداثيات نقطة الأصل (0,0)

b) رسم ضلع واحد على الأقل للمثلث على المحور X أو المحور y يسهل الحسابات عند إيجاد أطوال أضلاع لان احد الإحداثيات يكون 0

c) رسم المثلث في الربع الأول يجعل جميع إحداثيات رؤوسه موجبة وهذا يسهل إجراء العمليات الحسابية.

تدريب على الاختبار المعياري

25) D

$$m\angle B = 76^\circ$$

$$m\angle A = 76^\circ \div 2 = 38^\circ$$

$$m\angle C = 180 - (76^\circ + 38^\circ)$$

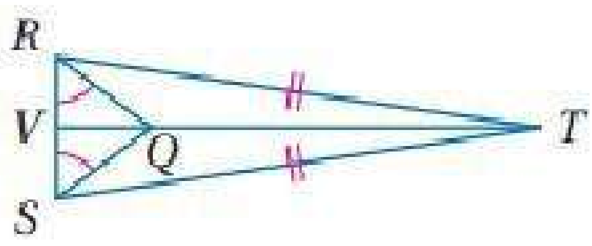
$$m\angle C = 66^\circ$$

26) B

وبما أن المثلث متطابق الضلعين فإن الإحداثي x للرأس R يقع في منتصف المسافة بين $0, 2a$ ويكون a إذن الإحداثي الرأسي R: (a, b)

مراجعة تراكمية

انظر إلى الشكل المجاور



27) $\angle TSR = \angle TRS$

28) $RQ = QS$

29) $\Delta RQV \cong \Delta SQV$

30) $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{6-(-6)}{2-(-2)} = \dfrac{12}{4} = 3$

استعد للدرس اللاحق

أوجد المسافة بين كل زوج من النقاط الآتية وقرب الناتج الى اقرب عشر:

31) $X(5,4), Y(2,1)$

$XY = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2} = \sqrt{(2-5)^2 + (1-4)^2}$

$\sqrt{9+9} = \sqrt{18} \approx 4.2$

32) $A(1,5), B(-2,-3)$

$AB = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2} = \sqrt{(-2-1)^2 + (-3-5)^2}$

$\sqrt{9+64} = \sqrt{73} \approx 8.5$

33) $J(-2,6), K(1,4)$

$JK = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2} = \sqrt{(1-(-2))^2 + (4-6)^2}$

$\sqrt{9+4} = \sqrt{13} \approx 3.6$

الفصل 3 دليل الدراسة والمراجعة

اختبر مفرداتك: حدد ما إذا كانت كل عبارة فيما يأتي صحيحة أو خاطئة. وإذا كانت خاطئة فأستبدل ماتحته خط لتصبح صحيحة:

١) عبارة صحيحة

٢) خاطئة، منفرج الزاوية

٣) عبارة صحيحة

٤) خاطئة، المتطابق الضلعين.

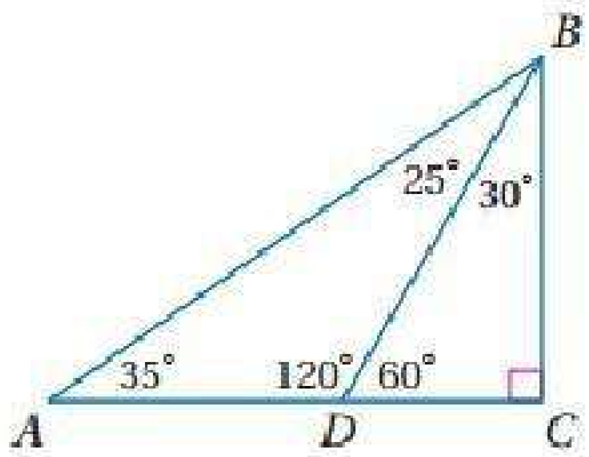
٥) عبارة صحيحة

٦) خاطئة، البرهان الإحداثي.

٧) عبارة صحيحة

3-1 تصنيف المثلثات (ص: 142-148)

صنف كلا من المثلثات الآتية إلى حاد الزوايا أو متطابق الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية:



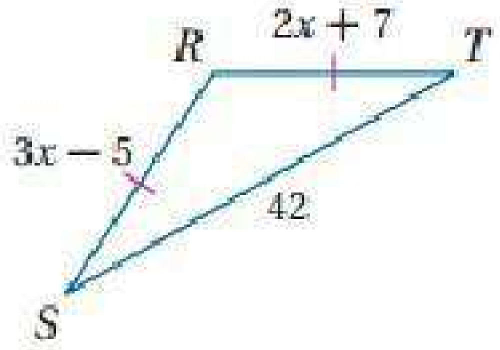
٨) $\triangle ADB$ مختلف الأضلاع لأن جميع زواياه مختلفة.

٩) $\triangle ADB$ قائم الزاوية لأن $\angle C = 90^\circ$.

١٠) $\triangle ABC$ قائم الزاوية لأن $\angle C = 90^\circ$.

جبر: أوجد قيمة x وأطوال الأضلاع المجهولة في المثلثات الآتية:

11)



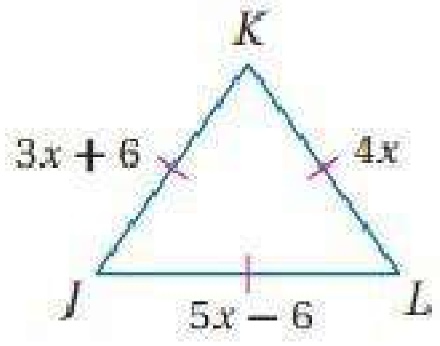
$\because RT = RS$

$\therefore 3x - 5 = 2x + 7$

$3x - 2x = 7 + 5$

$x = 12$

12)



$\because KL = KJ$

$\therefore 3x + 6 = 4x$

$4x - 3x = 6$

$x = 6$

خرائط:

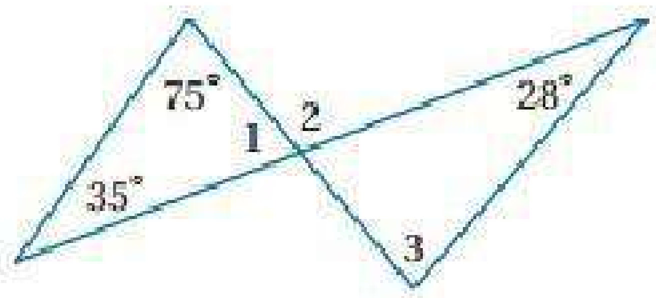
المدن الثلاثة هم رؤوس مثلث

نفرض أن المسافة بين الرياض و المدينة المنورة x ، و المسافة بين المدينة المنورة و مكة المكرمة y ، المسافة بين الرياض و مكة المكرمة z.

$$x + y + z = 2092$$
$$x = y + 515$$
$$z = y + 491$$
$$(y + 515) + (y + 491) + y = 2092$$
$$3y + 1006 = 2092$$
$$3y = 1086$$
$$y = 362\ km$$
$$x = 362 + 515 = 877\ km$$
$$z = 491 + 362 = 853\ km$$

3-2 زوايا المثلثات (ص: 157-150)

أوجد قياس كل من الزوايا المرقمة في الشكل المجاور:



14)

$\angle 1 = 180^\circ - (75 + 35)$ نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث

$\angle 1 = 70^\circ$

15)

$\angle 2 = 180^\circ - 70$ زاويتان متجاورتان على مستقيم

$\angle 1 = 110^\circ$

16)

$\angle 3 = 180^\circ - (110 + 28)$ نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث

$\angle 3 = 42^\circ$

منازل: (17

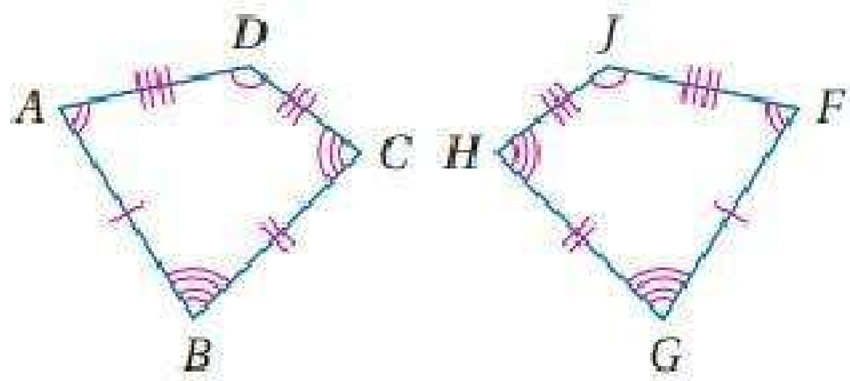
$\angle x = 180^\circ - (38 + 38)$

$\angle x = 104^\circ$

3-3 المثلثات المتطابقة (ص: 165-158)

بين أن كل مضلعين مما يأتي متطابقان، وذلك بتحديد جميع العناصر المتناظرة المتطابقة. ثم اكتب عبارة التطابق:

(١٨

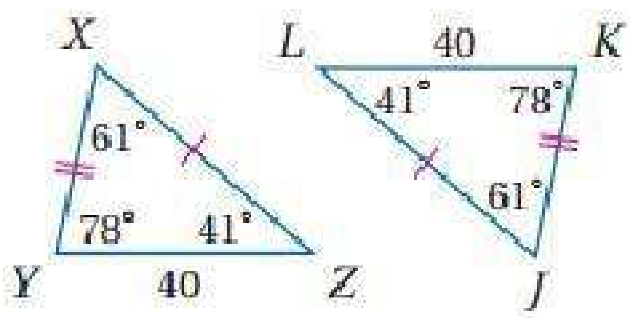


بما أن: $AB = FG, BC = GH, CD = HJ, AD = FJ$

$\angle J = \angle D, \angle A = \angle F, \angle G = \angle B, \angle H = \angle C$

إذن $ABCD \cong FGHJ$ حسب SSS

(١٩



بما أن: $LJ = XZ$, $KJ = XY$ ، $\angle J = \angle X = 61^\circ$

إذن $\Delta JKL \cong \Delta XYZ$ حسب SAS

٢٠) فسيفساء:

أربع مثلثات تبدو متطابقة: ΔFAE ,ΔEDH ,ΔGCH ,ΔFBG

3-4 إثبات تطابق المثلثات SSS, SAS

حدد ما إذا كان $\Delta ABC \cong \Delta XYZ$، ووضح اجابتك.

٢١)

$A(5,2), B(1,5)$

$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(1-5)^2+(5-2)^2}$

$\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$

$B(1,5), C(0,0)$

$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(0-1)^2+(0-5)^2}$

$\sqrt{1+25}=\sqrt{26}$

$A(5,2), C(0,0)$

$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(0-5)^2+(0-2)^2}$

$\sqrt{25+4}=\sqrt{29}$

$X(-3,3), Y(-7,6)$

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(-7+3)^2+(6-3)^2}$$

$\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$

$Y(-7,6), Z(-8,1)$

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(-8+7)^2+(1-6)^2}$$

$\sqrt{1+25}=\sqrt{26}$

$X(-3,3), Z(-8,1)$

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(-8+3)^2+(1-3)^2}$$

$\sqrt{25+4}=\sqrt{29}$

الأضلاع المتناظرة لها الطول نفسه ومتطابقة إذن $\Delta ABC \cong \Delta XYZ$ بحسب SSS

22)

$A(3,-1), B(3,7)$

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(3-3)^2+(7+1)^2}$$

$\sqrt{0+64}=\sqrt{64}=8$

$B(3,7), C(7,7)$

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(7-3)^2+(7-7)^2}$$

$\sqrt{16+0}=4$

$A(3,-1), C(7,7)$

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(7-3)^2+(7+1)^2}$$

$\sqrt{16+64}=\sqrt{80}$

$X(-7,0), Y(-7,4)$

$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(-7+7)^2+(4-0)^2}$

$\sqrt{0+16}=4$

$Y(-7,4), Z(1,4)$

$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(1+7)^2+(4-4)^2}$

$\sqrt{64+0}=8$

$X(-7,0), Z(1,4)$

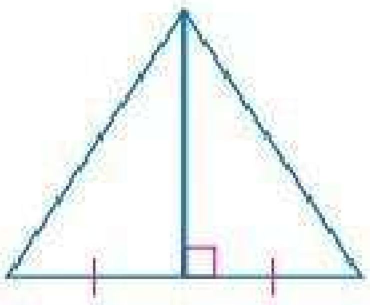
$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(1+7)^2+(4-0)^2}$

$\sqrt{64+16}=\sqrt{80}$

ليس جميع الأضلاع المتناظرة لها الطول نفسه إذن $\triangle ABC \ncong \triangle XYZ$

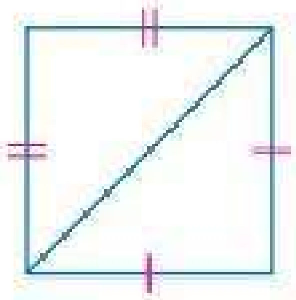
حدد المسلمة التي يمكن استعمالها لإثبات أن كل مثلثين فيما يأتي متطابقان.

٢٣)



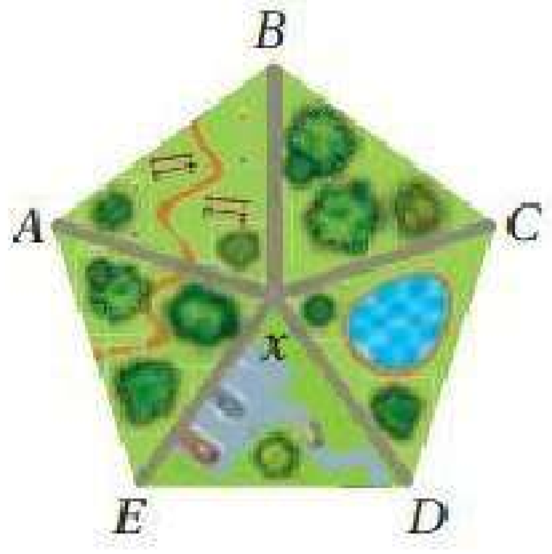
مسلمة SAS ضلعين وزاوية محصورة بينهم

٢٤)



مسلمة AAS

25) متنزهات:



بما أن جميع ممرات المشاة لها نفس الطول والزوايا المركزية متساوية إذن:

$BX = CX\ ,\ AX = DX$

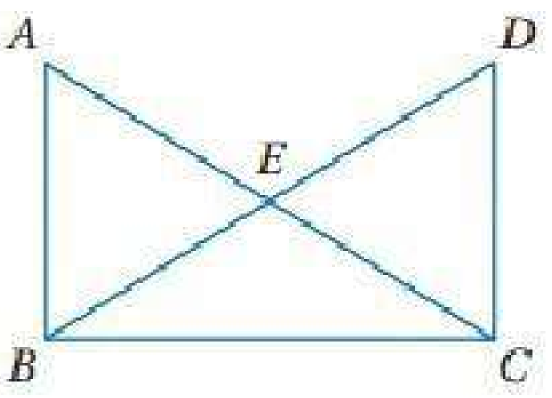
$\angle BXA = \angle CXD$

إذن $\Delta ABX \cong \Delta DCX$ حسب مسلمة SAS.

3-5 إثبات تطابق المثلثات ASA, AAS

اكتب برهانا ذا عمودين:

٢٦)



البرهان: العبارات (المبررات)

$\overline{AB} \cong \overline{DC}\ ,\ AB \parallel DC$ (معطى)

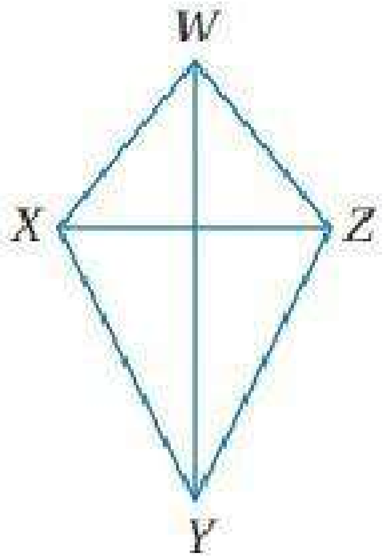
$\overline{AB} = \overline{DC}$ (تعريف تطابق القطع المستقيمة)

$\angle CDB = \angle ABD$ (زاويتان متبادلتان داخلياً)

$\angle BAC = \angle DCA$ (زاويتان متبادلتان داخلياً)

إذن $\Delta ABE \cong \Delta CDE$ حسب مسلمة ASA.

٢٧) الطائرة الورقية:



البرهان: العبارات (المبررات)

$\overline{WY}$ تنصف كل من $\angle XYZ$, $\angle XWZ$ (معطى)

$\angle ZWY = \angle XWY$ (تعريف التنصيف)

$\angle WYZ = \angle XYW$ (تعريف التنصيف)

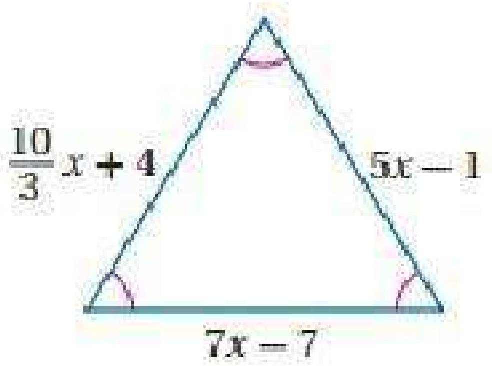
$\overline{WY} = \overline{WY}$ (حسب خاصية الانعكاس)

إذن $\Delta WZY \cong \Delta WXY$ حسب مسلمة ASA.

3-6 المثلثات المتطابقة الضلعين والمثلثات المتطابقة الأضلاع

أوجد قيمة كل من المتغيرين فيما يأتي:

28)



$7x - 7 = 5x - 1$

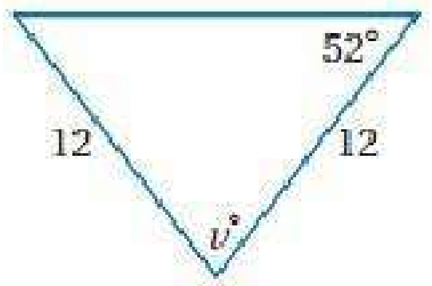
$7x - 5x = -1 + 7$

$2x = 6$

$x = 3$

عكس نظرية المثلث المتطابق الضلعين

29)



$$\angle v = 180^\circ - (52^\circ + 52^\circ)$$

نظرية المثلث المتطابق الضلعين

$$v = 76^\circ$$

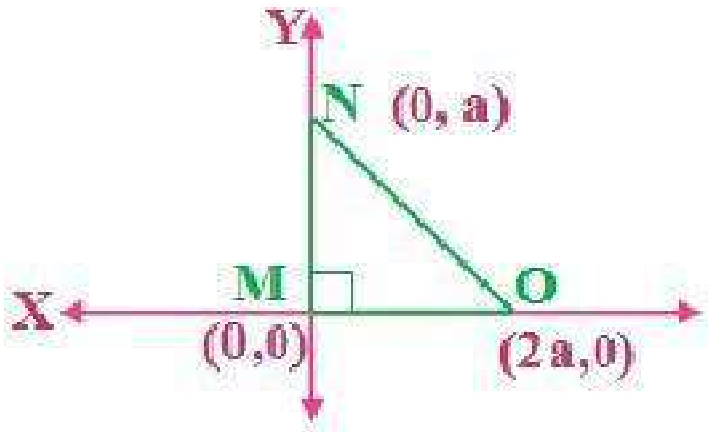
30) رسم:

بما أن المثلث متطابق الضلعين إذن زوايا القاعدة متساوية إذن قياس كل منهما:

$$(180 - 25) \div 2 = 77.5^\circ$$

3-7 المثلثات والبرهان الإحداثي (ص: 190-195)

٣١)



اجعل نقطة الأصل رأسا للزاوية القائمة في المثلث.

اجعل احد ضلعي القائمة على المحور x والضلع الأخر على المحور y.

بما أن النقطة O على المحور x إذن فإن إحداثيها $y = 0$ وإحداثيها $x = 2a$

بما أن النقطة N على المحور y إذن فإن إحداثيها $x = 0$ وإحداثيها $y = a$

32) جغرافيا:

نفرض أن حائل = A: $(3,5)$

نفرض أن بريدة = B: $(6,3)$

نفرض أن المدينة المنورة = C: $(0,0)$

$A(3,5), B(6,3)$

$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(6-3)^2+(3-5)^2}$

$\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$

$B(6,3), C(0,0)$

$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(0-6)^2+(0-3)^2}$

$\sqrt{36+9}=45$

$A(3,5), C(0,0)$

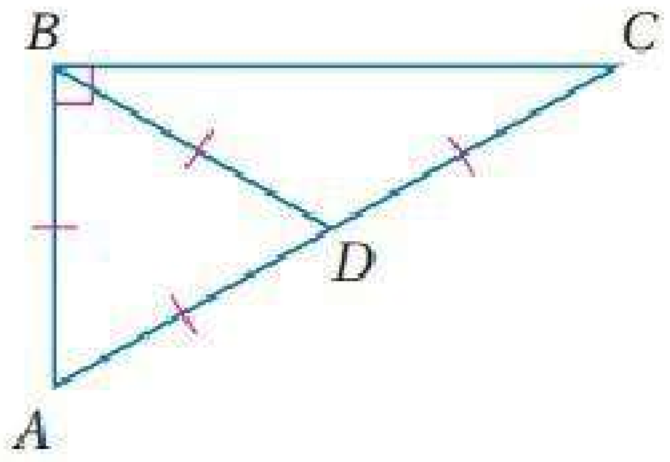
$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(0-3)^2+(0-5)^2}$

$\sqrt{9+25}=\sqrt{34}$

بما أن جميع أطوال أضلاع المثلث مختلفة إذن المثلث مختلف الأضلاع.

الفصل 3 اختبار الفصل

صنف كل من المثلثات الآتية إلى حاد الزوايا أو متطابق الزوايا أو منفرج الزاوية أو قائم الزاوية:



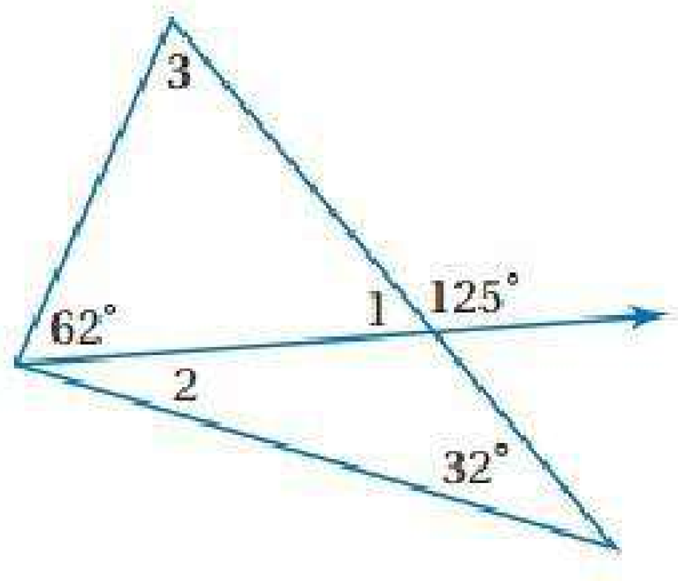
1) ΔABD متطابق الزوايا لأن جميع أطوال أضلاع متساوية حسب نظرية المثلث المتطابق الاضلاع.

2) ΔABC قائم الزاوية لأن $\angle B = 90^\circ$.

3) ΔBDC منفرج الزاوية لأن

$\angle CBD = 30^\circ, \angle BCD = 30^\circ, \angle BDC = 120^\circ$ حسب نظرية المثلث المتطابق الضلعين.

أوجد قياس كل زاوية مرقمة:



4)

$\angle 1 = 180^\circ - 125^\circ$ زاويتان متجاورتان على مستقيم

$\angle 1 = 55^\circ$

5)

$\angle 1 = \angle 2 + 32^\circ$ حسب نظرية الزاوية الخارجة عن مثلث

$55^\circ = \angle 2 + 32^\circ$

$\angle 2 = 55^\circ - 32^\circ = 23^\circ$

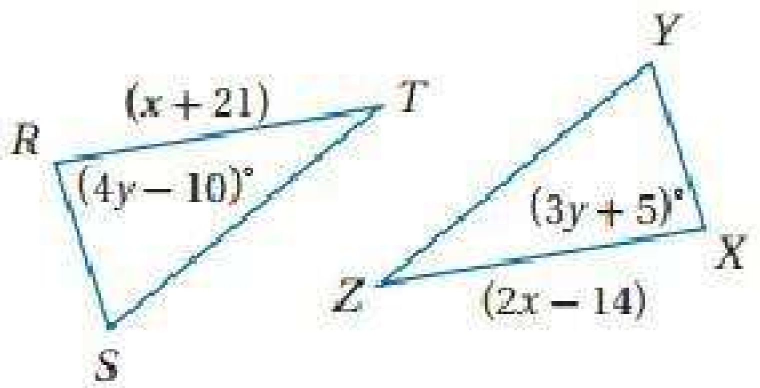
6)

$\angle 3 = 180^\circ - \left(\angle 1 + 62^\circ\right)$

$\angle 3 = 180^\circ - \left(55^\circ + 62^\circ\right)$

$\angle 3 = 63^\circ$

في المثلثين أدناه أوجد قيمة x, y:



7)

$\because \Delta RST \cong \Delta XYZ$

$\therefore RT = XZ$

$2x - 14 = x + 21$

$2x - x = 21 + 14$

$x = 35$

8)

$\because \Delta RST \cong \Delta XYZ$

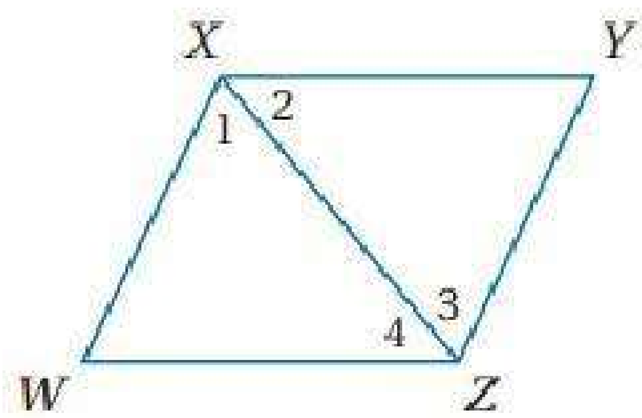
$\therefore \angle TRS = \angle ZXY$

$4y - 10 = 3y + 5$

$4y - 3y = 5 + 10$

$y = 15$

9) برهان:



$\overline{XY} \parallel \overline{WZ}$ معطى → $\angle 2 \cong \angle 4$ نظرية الزاويتين المتبادلتين داخلياً

$\overline{XZ} \cong \overline{ZX}$ خاصية الانعكاس

$\overline{XW} \parallel \overline{YZ}$ معطى → $\angle 1 \cong \angle 3$ نظرية الزاويتين المتبادلتين داخلياً

$\Delta XWZ \cong \Delta ZYX$

ASA

اختبار من متعدد:

C (10

بما أن المثلث الذي رأسه 116° متطابق الأضلاع إذن زوايا قاعدته متساوية.

زاوية قاعدة المثلث الذي رأسه 116°: $180^\circ - 116^\circ = 64^\circ$

إذن كل زاوية من زوايا القاعدة = $64^\circ \div 2 = 32^\circ$

وبذلك تكون إحدى زاوية القاعدة للمثلث الذي رأسه x:

$180^\circ - (72^\circ + 32^\circ) = 76^\circ$ لأنهما زاويتان متجاورتان على مستقيم

وبما أن المثلث الذي رأسه x متطابق الضلعين إذن

$$\angle x = 180^\circ - (76 + 76)$$

$$\angle x = 28^\circ$$

(11

نعم $\Delta TJD \cong \Delta SEK$ باستعمال مسلمة SSS

$T(-4,-2), J(0,5)$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(0+4)^2 + (5+2)^2}$$

$$\sqrt{16+49} = \sqrt{65}$$

$J(0,5), D(1,-1)$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(1-0)^2 + (-1-5)^2}$$

$$\sqrt{1+36} = \sqrt{37}$$

$T(-4,-2), D(1,-1)$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(1+4)^2 + (-1+2)^2}$$

$$\sqrt{25+1} = \sqrt{26}$$

$S(-1,3), E(3,10)$

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(3+1)^2 + (10-3)^2}$

$\sqrt{16+49} = \sqrt{65}$

$E(3,10), K(4,4)$

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(4-3)^2 + (4-10)^2}$

$\sqrt{1+36} = \sqrt{37}$

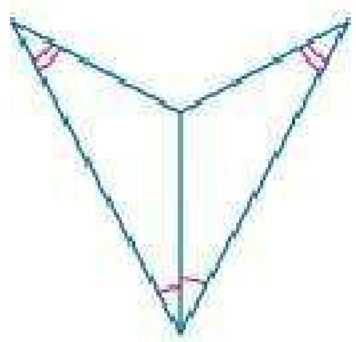
$S(-1,3), K(4,4)$

$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(4+1)^2 + (4-3)^2}$

$\sqrt{25+1} = \sqrt{26}$

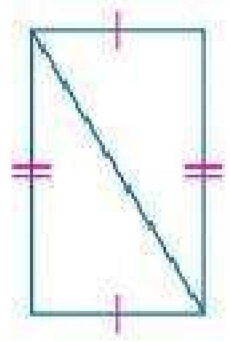
حدد النظرية أو المسلمة التي يمكن لإثبات أن كل زوج من أزواج المثلثات متطابق واكتب (غير ممكن) إذا تعذر إثبات التطابق:

(12



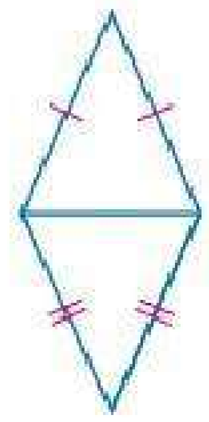
مسلمة AAS

(13



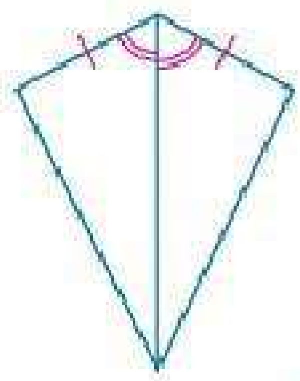
مسلمة SSS

(14



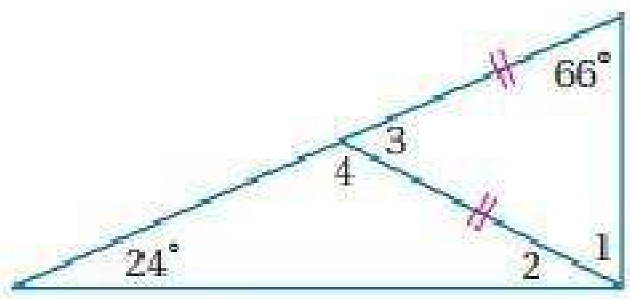
غير ممكن

(15



مسلمة SAS

أوجد قياس كل من الزاويتين الآتيتين:



16)

لأن المثلث متطابق الضلعين

$\angle 1 = 66^\circ$

17)

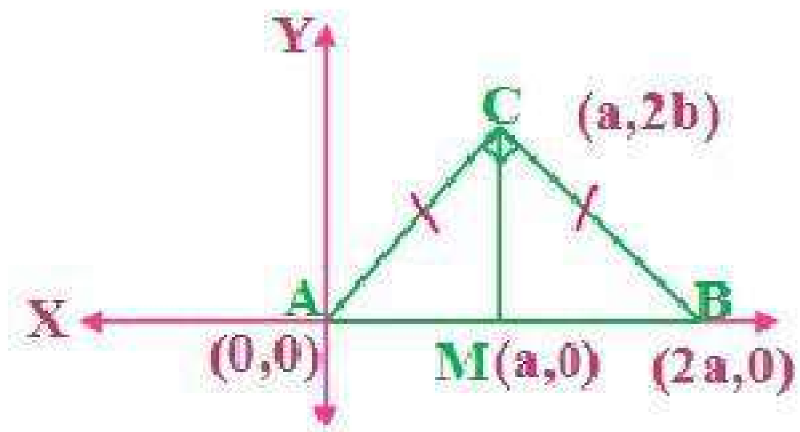
$(\angle 1 + \angle 2) = 180 - (66 + 24)$

$(\angle 1 + \angle 2) = 90^\circ$

$\angle 2 = 90^\circ - 66^\circ$

$\angle 2 = 24^\circ$

18) برهان:



ميل CM غير معرف

ميل AB يساوي صفرا

نقطة منتصف AB هي $(a,0)$

معطى

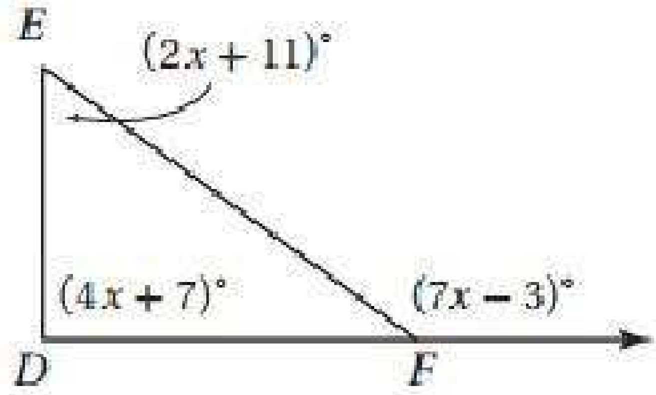
إذن CM خط رأسي

إذن فهو أفقي

$AB \perp CM$

تمارين ومسائل

١) صنف ΔDEF حسب زواياه



زاوية $\angle F$ الخارجة عن المثلث تساوي مجموع الزاويتين الداخلتين البعيدتين إذن:

$$(7x-3)^\circ = (2x+11)^\circ + (4x+7)^\circ$$

$$7x-3 = 6x+18$$

$$7x-6x = 18+3$$

$$x = 21$$

$$\angle FED = 2x+11 = 2\times 21+11$$

$$\angle FED = 53^\circ$$

$$\angle EDF = 4x+7 = 4\times 21+7$$

$$\angle EDF = 91^\circ$$

$$\angle EFD = 180^\circ - (84+53)$$

$$\angle EFD = 36^\circ$$

هذا المثلث منفرج الزوايا لأنه يحتوي على زاوية أكبر من 90°

٢) اكتب معادلة المستقيم المار بالنقطتين: $(2,4),(0,-2)$

$$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{-2-4}{0-2} = \frac{-6}{-2} = 3$$

التعويض بالنقطة $(2,4)$ في معادلة المستقيم

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 4 = 3(x - 2)$$
$$y - 4 = 3x - 6$$
$$y = 3x - 6 + 4$$
$$y = 3x - 2$$

٣)

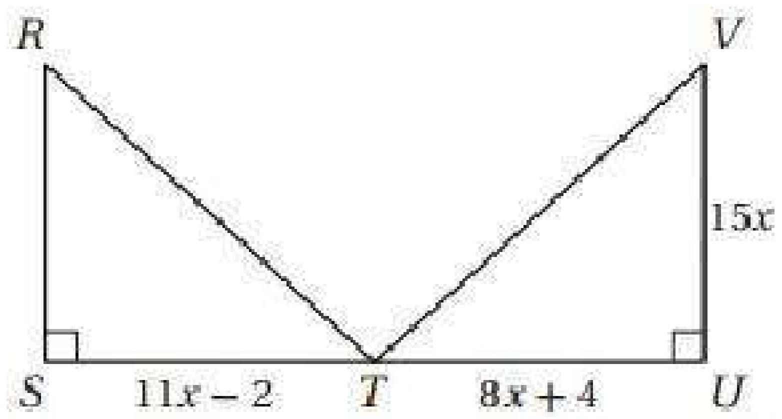
مساحة المستطيل = الطول في العرض

بفرض أن الطول س العرض ص

١٠٠٠ = س × ص

إذن ضلعي المستطيل ٤٠ و ٢٥

٤)



$$\because \Delta RST \cong \Delta VUT$$
$$\therefore ST = UT$$
$$11x - 2 = 8x + 4$$
$$11x - 8x = 4 + 2$$
$$3x = 6$$
$$x = 2$$
$$ST = 11x - 2 = 11 \times 2 - 2 = 20$$

$RS = UV$

$RS = 15x = 15 \times 2$

$RS = 30$

مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ طول القاعدة في الإرتفاع

مساحة المثلث = $\frac{1}{2} \times RS \times ST = \frac{1}{2} \times 20 \times 30 = 300$

أسئلة الاختيار من متعدد

1) $D : \angle 1 = \angle 2 = 110^\circ$ زاويتان متبادلتان خارجياً

2) D : مختلف الأضلاع

3) $C : \Delta WXY \cong \Delta JKI$

4) A

$\angle RTS = 180^\circ - 125^\circ$

$\angle RTS = 55^\circ$

$\angle R = 180^\circ - (55^\circ + 68^\circ)$

$\angle R = 57^\circ$

5) B

$180^\circ - 2(44^\circ) = 92^\circ$

6) A

$180^\circ - (70 + 47) = 63^\circ$ حسب نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث

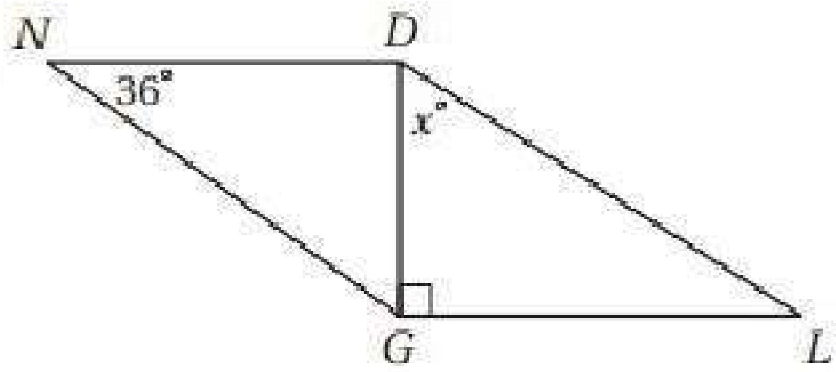
$\angle 1 = 180^\circ - (63 + 32) = 85^\circ$ حسب نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث

وحسب نظرية الزاويتان المتقابلان بالرأس متساويتان

أسئلة ذات إجابات قصيرة

أجب عن كل مما يأتي:

٧) إجابة شبكية:



$\because \triangle NDG \cong \triangle LGD$

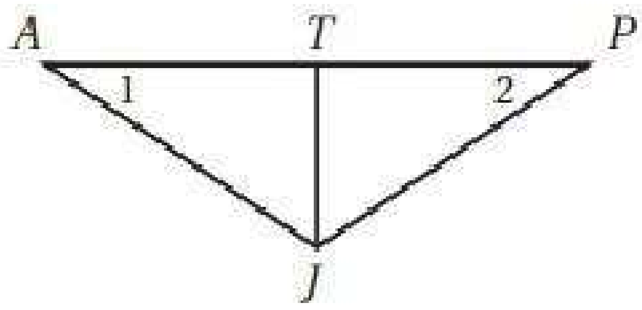
$\therefore \angle LDG = \angle DNG$

$36^\circ = x^\circ$

٨) اكتب عكس العبارة الآتية:

إذا كنت أنا الخاسر فإنك تكون الرابح

٩)



بما أن $\angle 2 = \angle 1$ إذن $\overline{JA} = \overline{JP}$ عكس نظرية المثلث المتطابق الضلعين

$\overline{JT} = \overline{TJ}$ خاصية الانعكاس

إذن $\triangle ATJ \cong \triangle PTJ$ حسب مسلمة AAS.

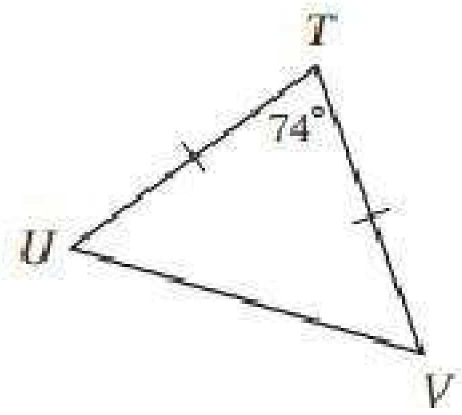
١٠) اكتب معادلة المستقيم المار بالنقطتين $(4,-5),(0,3)$ بصيغة الميل والمقطع

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-5-3}{4-0}=\frac{-8}{4}=-2$$

التعويض بالنقطة $(0,3)$ في معادلة المستقيم

$$y-y_1=m(x-x_1)$$
$$y-3=-2(x-0)$$
$$y-3=-2x+0$$
$$y=-2x+3$$

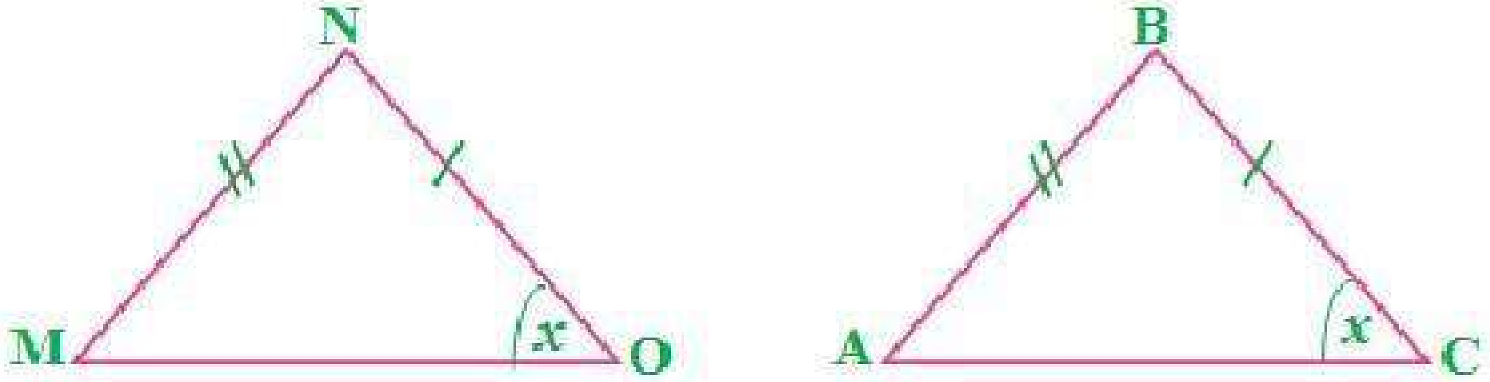
١١) أوجد $\angle TUV$ في الشكل أدناه:



بما أن ΔUTV متطابق الضلعين إذن $\angle TUV=\frac{(180^\circ-74^\circ)}{2}$

$53^\circ=\angle TUV$

١٢)



لا يمكن تطابق المثلثين لأنه لايوجد مسلمة SSA

١٣)

$$\Delta EFG \cong \Delta DCB$$

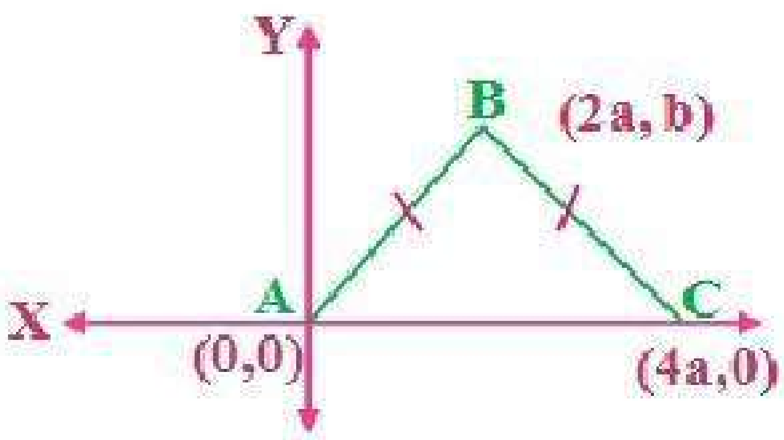
$$EF \cong DC, FG \cong CB, EG \cong DB$$

$$\angle EFG \cong \angle DCB, \angle FGE \cong \angle CBD, \angle FEG \cong \angle CDB$$

أسئلة ذات إجابات مطولة

14)

a)



b)

$A(0,0), B(2a,b)$

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(2a-0)^2+(b-0)^2}$$

$$\sqrt{4a^2+b^2}=2a+b$$

c)

$B(2a,b), C(4a,0)$

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(4a-2a)^2+(0-b)^2}$$

$$\sqrt{4a^2+b^2}=2a+b$$

d)

نستنتج من الفرعين b ,c أن ΔABC متطابق الضلعين في AB, BC.

الفصل

4

العلاقات في المثلث
Relationships in Triangle

فيما سبق:

درستُ طرائق تصنيف المثلثات.

والآن:

- أتعرف القطع المستقيمة والنقاط المرتبطة بالمثلثات.
- أتعرف العلاقات الخاصة بين أضلاع المثلث وزواياه.
- أكتب برهانًا غير مباشر.

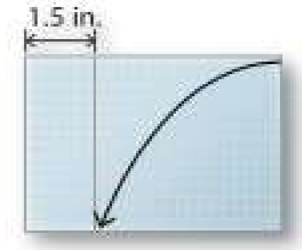
لماذا؟

التصميم الداخلي: تستعمل العلاقات في المثلث لإيجاد الأبعاد وقياسات الزوايا ومقارنتها. ويستعمل مهندسو التصميم الداخلي هذه العلاقات لتحسين تصاميمهم.

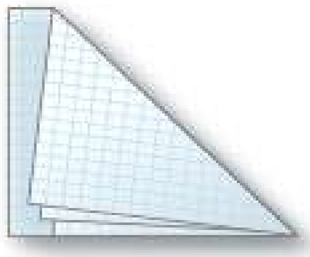
المطويات منظم أفكار

العلاقات في المثلث: اعمل هذه المطوية؛ لتساعدك على تنظيم ملاحظاتك حول الفصل 4 ، مبتدئًا بسبع أوراق رسم بياني.

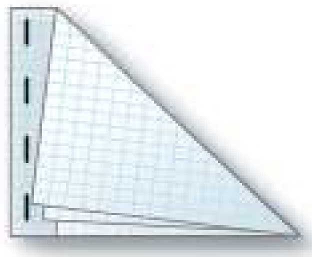
1. **اجمع الأوراق**، واطوِ الركن العلوي الأيمن إلى الحافة السفلى لتشكل مثلثات متطابقة وحافة مستطيلة .



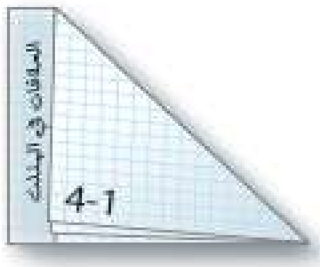
2. **اطوِ الجزء** المستطيل كما هو مبين بالشكل.



3. **ثبّت الأوراق** على طول الحافة المستطيلة في أربعة أماكن.

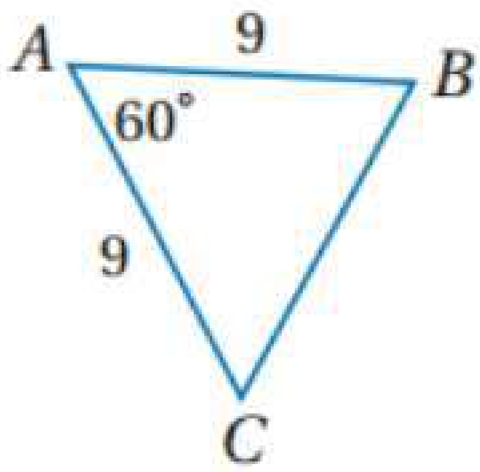


4. **اكتب** عنوان الفصل على الحافة المستطيلة، ورقّم كل درس أسفل المثلث، وخصص الورقة الأخيرة للمفردات الجديدة كما هو موضح بالشكل.



أوجد قياس كل من الزاويتين الآتيتين:

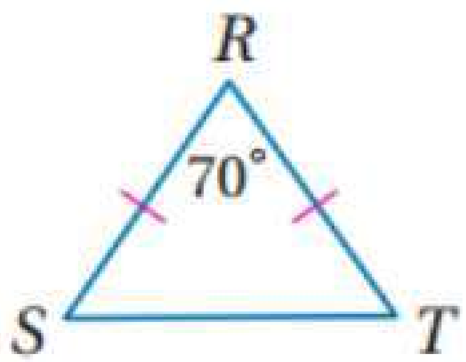
١)



بما أن $AB = AC$ إذن المثلث متطابق الضلعين وبالتالي سيكون زوايا القاعدة متساوية = 60° وبما أن زاوية الرأس ايضا = 60° إذن المثلث متطابق الأضلاع

إذن $BC = 9$

٢)



بما أن $RS = RT$ إذن المثلث متطابق الضلعين وبالتالي سيكون زوايا القاعدة متساوية = $\left(180^\circ - 70^\circ\right) \div 2 = 55^\circ$

إذن $m\angle RST = 55^\circ$

٣) حدائق: طول الضلع الثالث يساوي جزر مربع كل ضلع من ضلعي القائمة:

$$\sqrt{(7)^2 + (7)^2} = \sqrt{98} \approx 10$$

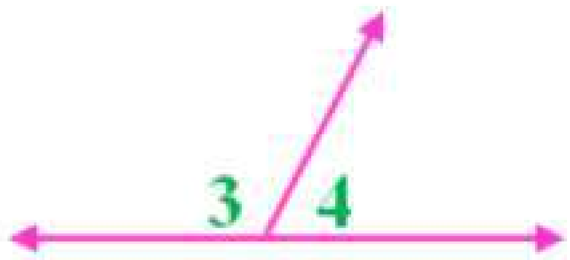
ضع تخميناً مبنياً على المعطيات في كل مما يأتي:

٤)

المعطيات: $\angle 4, \angle 3$ زاويتان متجاورتان على خط مستقيم

التخمين: إذن مجموعهما 180° أي أنهما متكاملتان.

التحقق:

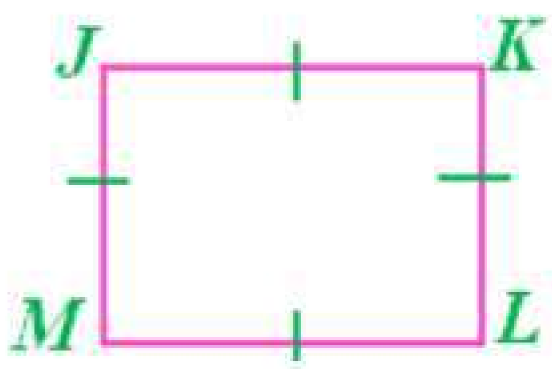


٥)

المعطيات: $JKLM$ مربع

التخمين: $JM = ML = LK = JK$

التحقق:

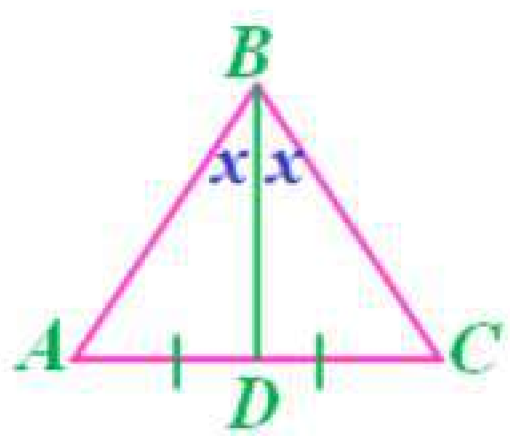


٦)

المعطيات: $\overrightarrow{BD}$ منصف $\angle ABC$

التخمين: $DC = DA, \angle DBC = \angle DBA$

التحقق:



حل كلا من المتباينات الآتية:

8) $x + 13 < 41$

$x + \cancel{13} - \cancel{13} < 41 - 13$

$x < 28$

9) $x - 6 < 2x$

$-\cancel{x} + \cancel{x} - 6 < 2x - x$

$-6 < x$

10) $6x + 9 < 7x$

$-6x + 6x + 9 < 7x - 6x$

$9 < x$

11) $8x + 15 < 9x - 26$

$-\cancel{8x} + \cancel{8x} + 15 < 9x - 26 - 8x$

$15 < x - 26$

$15 + 26 < x$

$41 < x$

١٢) صور:

نفرض أن عدد الصور الألبوم = x

بعد إضافة ١٥ صور أصبح عدد الصور $x + 15$

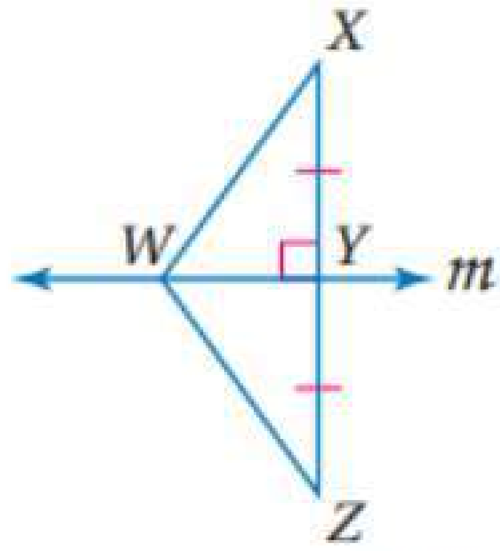
بما أن عدد الصور أكبر من ١٢٠ إذن $x + 15 > 120$

$\cancel{-15} + x + \cancel{15} > 120 - 15$

$x > 105$

4-1 المنصّفات في المثلث

تحقق صفحة 210



(1A

بما أن $\overline{YX}=\overline{YZ}$ (معطى)

إذن $\overline{XY}=22.4$

(1B

بما أن $\overleftrightarrow{WY}$ عمود منصف لـ $\overline{XZ}$ إذن $\overline{WX}=\overline{WZ}$ حسب نظرية العمود المنصف.

إذن $\overline{WX}=14.9$ (بالتعويض)

(1C

بما أن $\overleftrightarrow{WY}$ عمود منصف لـ $\overline{XZ}$ إذن $\overline{WX}=\overline{WZ}$ حسب نظرية العمود المنصف.

إذن:

$$4a-15=a+12$$

$$4a-a=12+15$$

$$3a=27$$

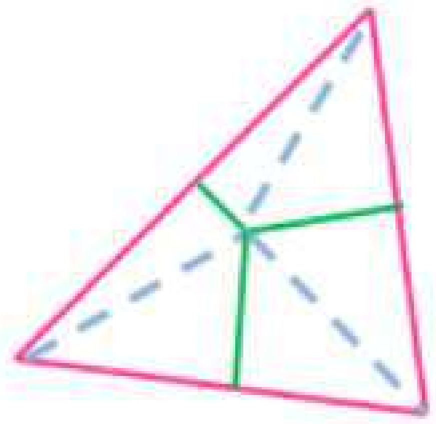
$$a=9$$

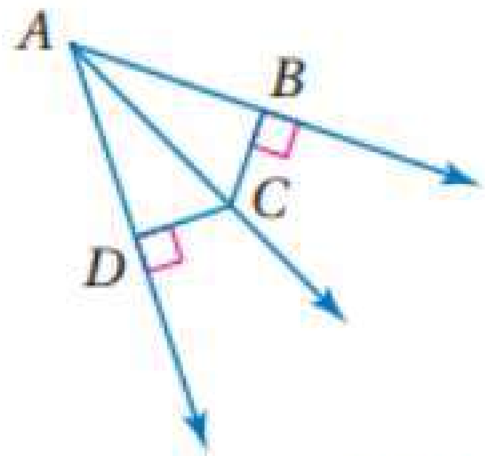
$$\overline{WX}=4a-15$$

$$\overline{WX}=4\times 9-15=21$$

(2

بحسب نظرية مركز الدائرة التي تمر برووس مثلث الحديقة يمكن تعيين النقطة التي تكون على أبعاد متساوية من النقاط الثلاث للحديقة باستعمال الأعمدة المنصفة لأضلاع المثلث المتكون من هذه النقاط كما في الشكل الآتي:





(3A

بما أن $BC = DC$ و $BC \perp AB$ و $DC \perp AD$ إذن حسب عكس نظرية منصف الزاوية $\angle BAC = \angle DAC$

إذن $\angle DAC = 38^\circ$

(3B

$DC = BC = 10$ حسب نظرية منصف الزاوية.

(3C

بما أن $\overrightarrow{AC}$ ينصف $\angle DAB$ و $BC \perp AB$ و $DC \perp AD$ إذن $BC = DC$

$$4x + 8 = 9x - 7$$

$$9x - 4x = 8 + 7$$

$$5x = 15$$

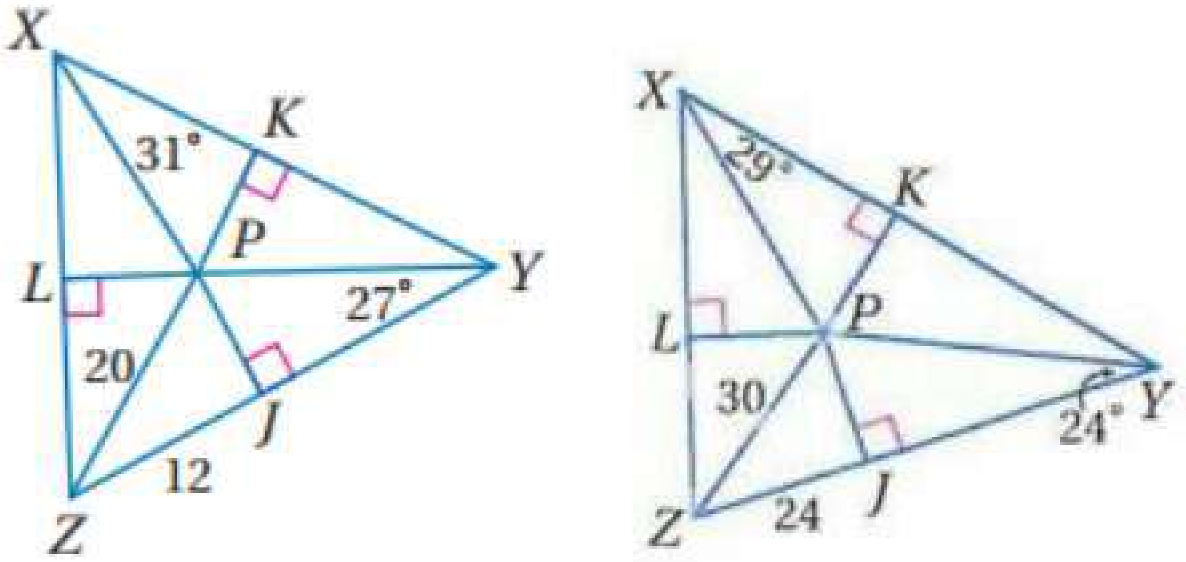
$$x = 3$$

$$\because BC = 4x + 8$$

$$BC = 4 \times 3 + 8$$

$$BC = 20$$

حسب نظرية منصف الزاوية.



(4A

بما أن P على أبعاد متساوية من أضلاع ΔXYZ بحسب نظرية مركز الدائرة الداخلية للمثلث. $PK = PJ$ لذا يجب إيجاد PJ باستعمال نظرية فيثاغورس.

$$(ZP)^2 = (PJ)^2 + (JZ)^2$$

$$(20)^2 = (PJ)^2 + (24)^2$$

$$(PJ)^2 = 900 - 576 = 324$$

$$PJ = PK = 18$$

(4B

بما أن $\overrightarrow{BX}$ ينصف $\angle YXZ$ فإن

$\angle ZXY = 2\angle YXJ = 2\times 29 = 58$

وبالمثل $\angle XYZ = 2\times 24 = 48^\circ$

وبالمثل $\angle YZX = 2\angle LZP$

$\angle YXZ + \angle XYZ + XZY = 180^\circ$ نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث

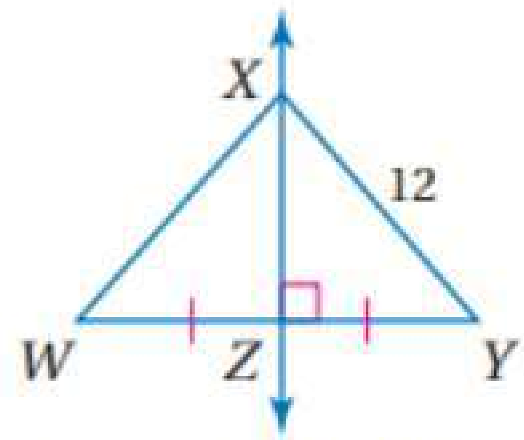
$58^\circ + 48^\circ + \angle XZY = 180^\circ$

$\angle XZY = 74^\circ$

$\angle LZP = 74 \div 2 = 37^\circ$

أوجد قياس كل مما يأتي: المثال ١

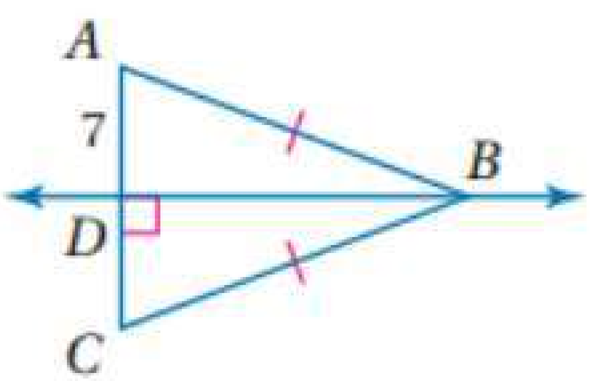
(1



بما أن ZX عمود منصف لـ WY

إذن $XY = WX = 12$ (حسب نظرية العمود المنصف)

(2

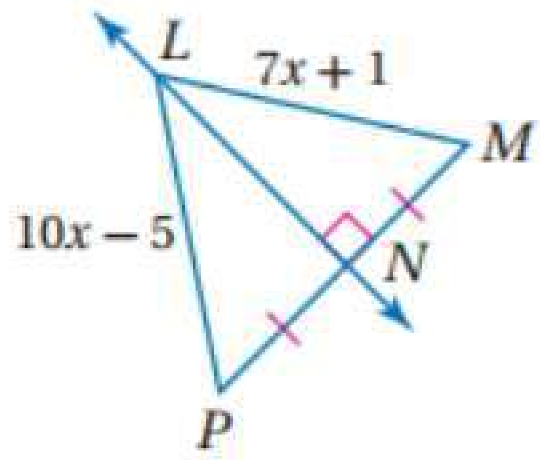


بما أن $AB = BC$ و $BD \perp AC$ إذن BD عمود منصف لـ AC

إذن $DC = AD = 7$ (حسب عكس نظرية العمود المنصف)

$AC = AD + DC = 7 + 7 = 14$

(3



بما أن LN عمود منصف لـ PM إذن $LP = LM$ (نظرية العمود المنصف)

$$10x - 5 = 7x + 1$$

$$10x - 7x = 1 + 5$$

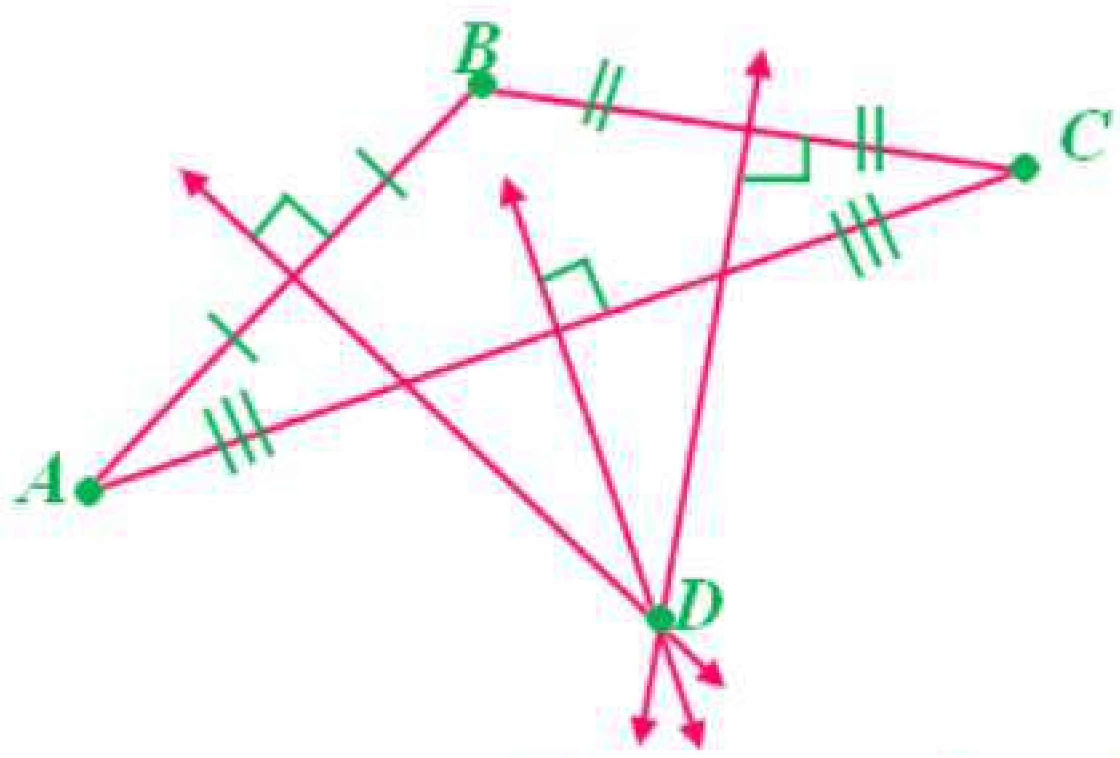
$$3x = 6$$

$$x = 2$$

$$LP = 10 \times 2 - 5$$

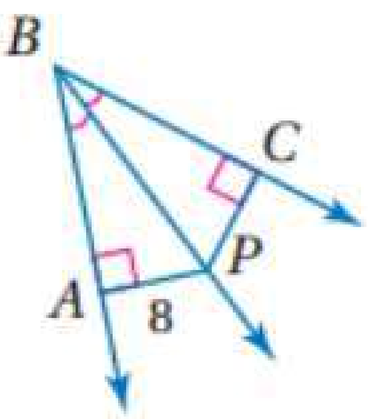
$$LP = 15$$

4) إعلانات: المثال٢



أوجد قياس كل مما يأتي: المثال٣

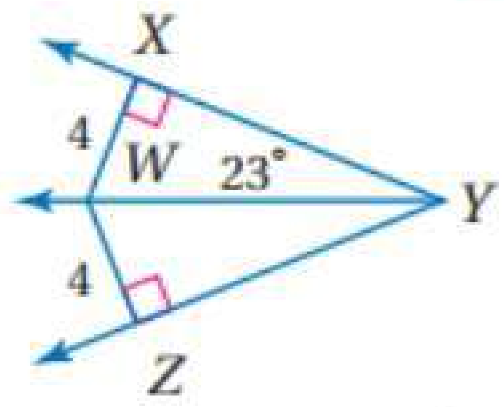
(5



بما أن $\overrightarrow{PB}$ منصفاً لـ $\angle CBA$ و $PA \perp BA$, $PC \perp BC$ (نظرية منصف الزاوية)

فإن $PA = PC = 8$

(6

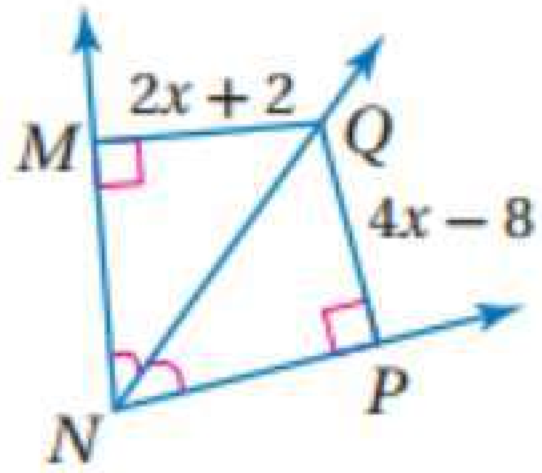


بما أن $WX \perp XY$ و $WZ \perp ZY$ و $WX = WZ$

فإن $\overrightarrow{WY}$ ينصف $\angle XYZ$ (حسب عكس نظرية منصف الزاوية)

إذن $\angle WYZ = 23^\circ$

(7



بما أن $\overrightarrow{NQ}$ منصفاً لـ $\angle MNP$ و $QP \perp PN$, $QM \perp MN$ (حسب نظرية منصف الزاوية)

فإن $QP = QM$

$4x - 8 = 2x + 2$

$4x - 2x = 2 + 8$

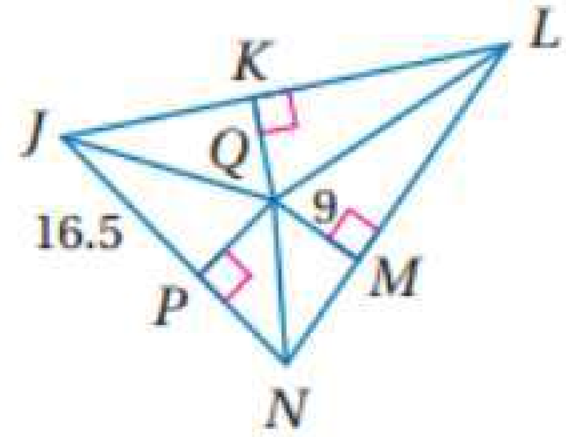
$2x = 10$

$x = 5$

$QM = 2x + 2 = 2 \times 5 + 2$

$QM = 12$

8) المثال ٤



بما أن Q مركز الدائرة الداخلية لـ ΔJLN

إذن $QK = QM = QP = 9$ وبالتالي يمكن حساب JQ بنظرية فيثاغورث.

$$(QJ)^2 = (QP)^2 + (PJ)^2$$

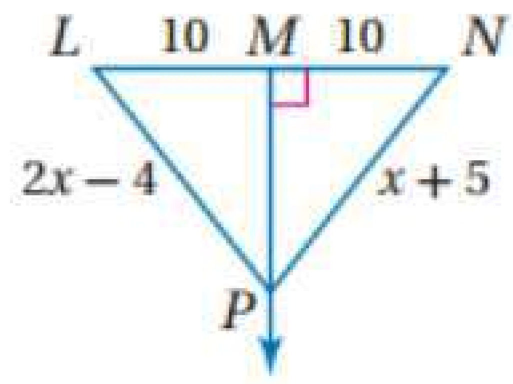
$$(QJ)^2 = (9)^2 + (16.5)^2$$

$$QJ \approx 18.8$$

تدرب وحل المسائل

أوجد قياس كل مما يأتي: المثال ١

(9



بما أن $\overrightarrow{PM}$ عمود منصفاً لـ LN (حسب نظرية العمود المنصف)

فإن $PL = NP$

$$2x - 4 = x + 5$$

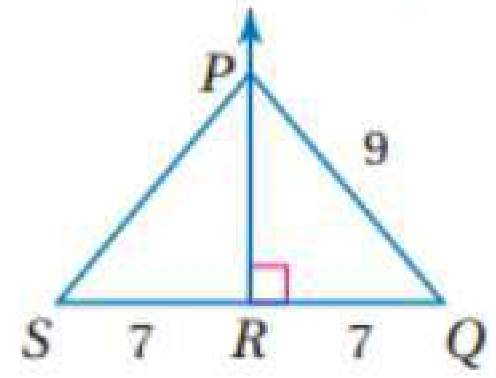
$$2x - x = 5 + 4$$

$$x = 9$$

$$NP = x + 5 = 9 + 5$$

$$NP = 14$$

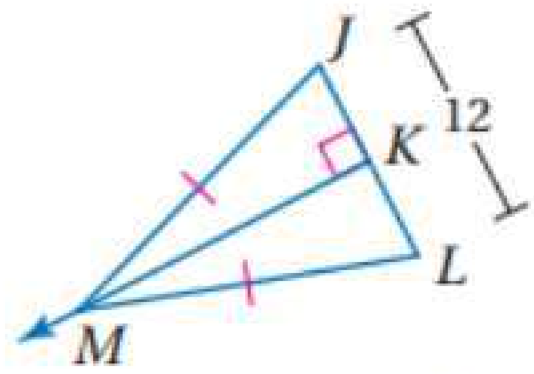
(10



بما أن $\overrightarrow{PR}$ عمود منصفاً لـ $\overline{SQ}$ (حسب نظرية العمود المنصف)

فإن $PQ = PS = 9$

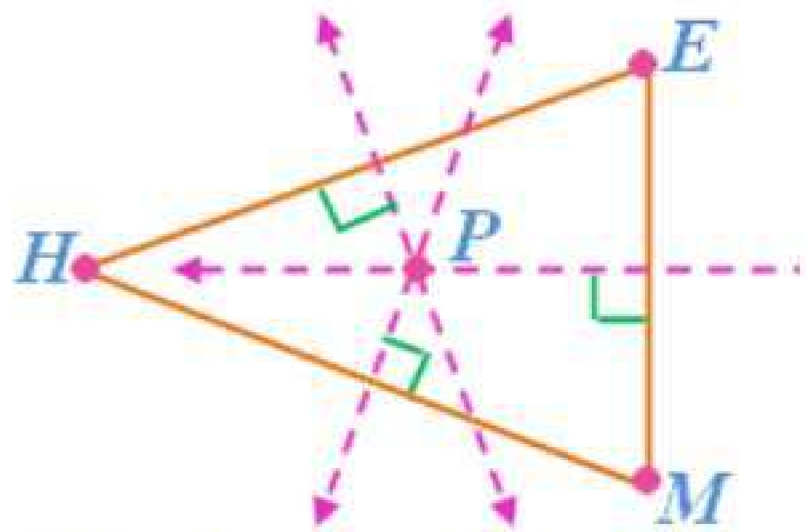
(11



بما أن $MJ = ML$ و $JL \perp MK$ إذن MK عمود منصفاً لـ $\overline{JL}$ (حسب عكس نظرية العمود المنصف) إذن:

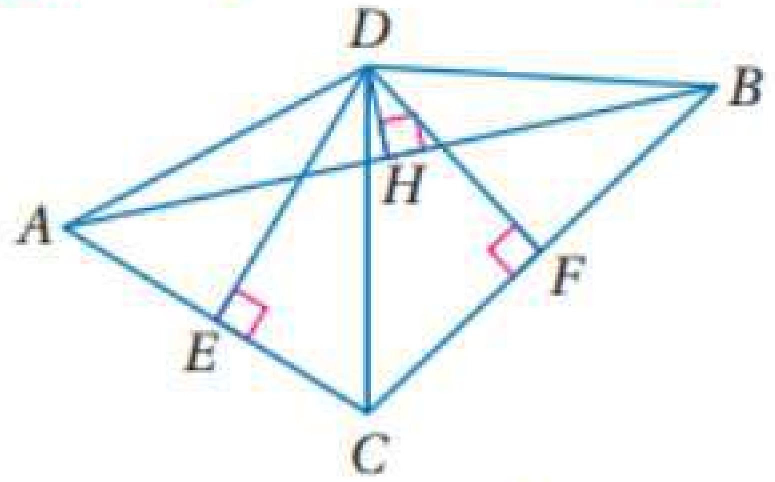
$$JK = KL = \frac{12}{2} = 6$$

12) مدرسة: المثال٢



وضع نقطة تعبر عن الحافلة ولتكن P مركز الدائرة الداخلية للمثلث ΔHEM (حسب نظرية مركز الدائرة الداخلية للمثلث) إذن سيكون بعد النقطة عن كل ضلع من أضلاع المثلث متساوي

اكتب القطعة المستقيمة التي تطابق القطعة المعطاة في كل سؤال مما يأتي:



13) بما أن D هي مركز الدائرة التي تمر برووس ΔABC إذن حسب نظرية مركز الدائرة التي تمر بروؤس المثلث:

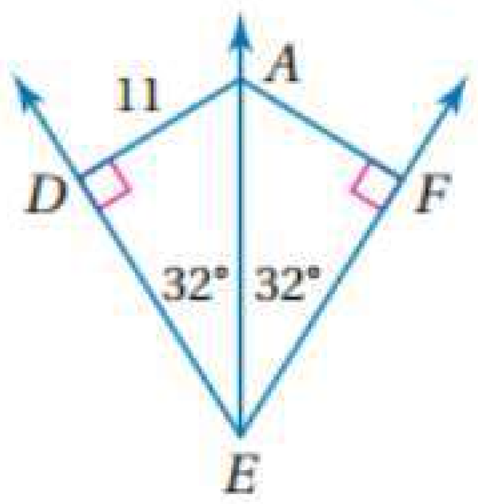
$\overline{BD}, \overline{DC} \cong \overline{AD}$

14) $\overline{DH}$ عمودي وينصف $\overline{AB}$

$\overline{HB} \cong \overline{AH}$

أوجد قياس كل مما يأتي: المثال٣

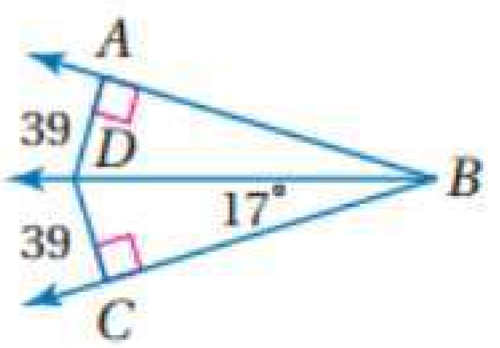
15)



بما أن $\overline{AF} \perp \overline{EF}$ و $\angle AED = \angle AEF$ إذن $AD = AF$

إذن $AF = 11$

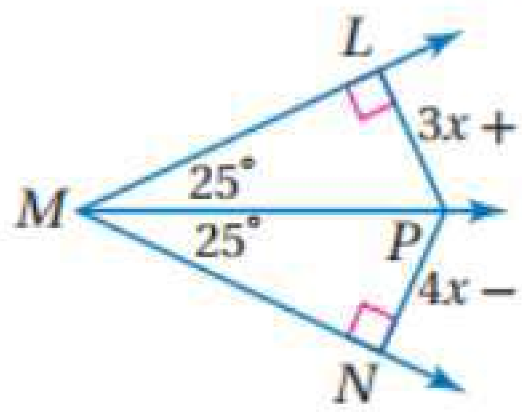
16)



بما أن $\overline{DC} \perp \overline{CB}, \overline{DA} \perp \overline{AB}$ و $DC = AD$ إذن $\angle ABD = \angle DBC$ حسب عكس نظرية منصف الزاوية .

إذن $\angle ABD = 17^\circ$

(17



بما أن $\overline{MN} \perp \overline{PN}$, $\overline{LM} \perp \overline{PL}$ و $\angle LMP = \angle PMN$ إذن $LP = PN$
حسب نظرية منصف الزاوية .

$$4x - 2 = 3x + 6$$

$$4x - 3x = 6 + 2$$

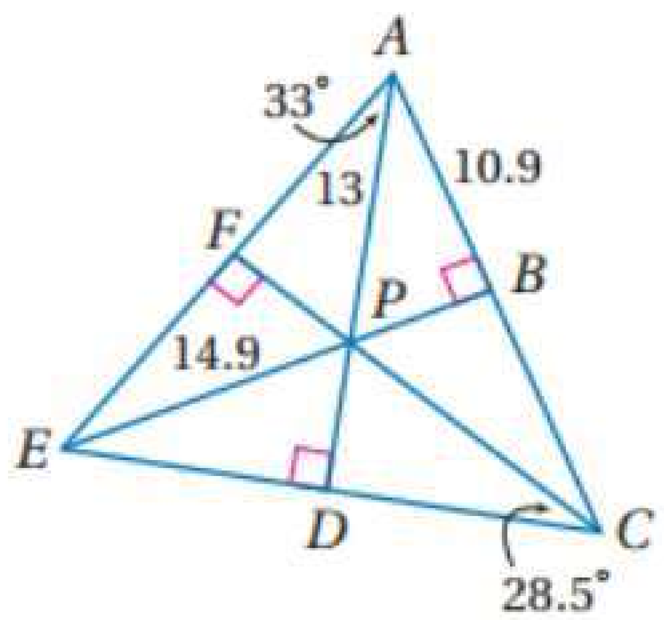
$$x = 8$$

$$PN = 4 \times 8 - 2$$

$$PN = 30$$

إذا كانت النقطة P مركز الدائرة الداخلية لـ ΔAEC ، فأوجد كل من القياسات الآتية:

المثال ٤



(18

بما أن النقطة P مركز الدائرة الداخلية لـ ΔAEC ، إذن $PB = PD = PF$
يمكن إيجاد PB حسب نظرية فيثاغورث:

$$(AP)^2 = (AB)^2 + (PB)^2$$

$$(13)^2 = (10.9)^2 + (PB)^2$$

$$PB \approx 7.1$$

(19

بما أن $PB = PD$ إذن باستعمال فيثاغورث:

$$(EP)^2 = (PD)^2 + (ED)^2$$

$$(14.9)^2 = (7.1)^2 + (ED)^2$$

$$ED \approx 13.1$$

(20

بما أن $\overline{EC} \perp \overline{AD}$ وينصف $\angle CAE$ إذن $\angle DAC = 33^\circ$

(21

بما أن $\overline{AE} \perp \overline{FC}$ وينصف $\angle ACE$ إذن $\angle ACE = 28.5 \times 2 = 57^\circ$

$\angle CAE + \angle ACE + \angle AEC = 180^\circ$ نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث

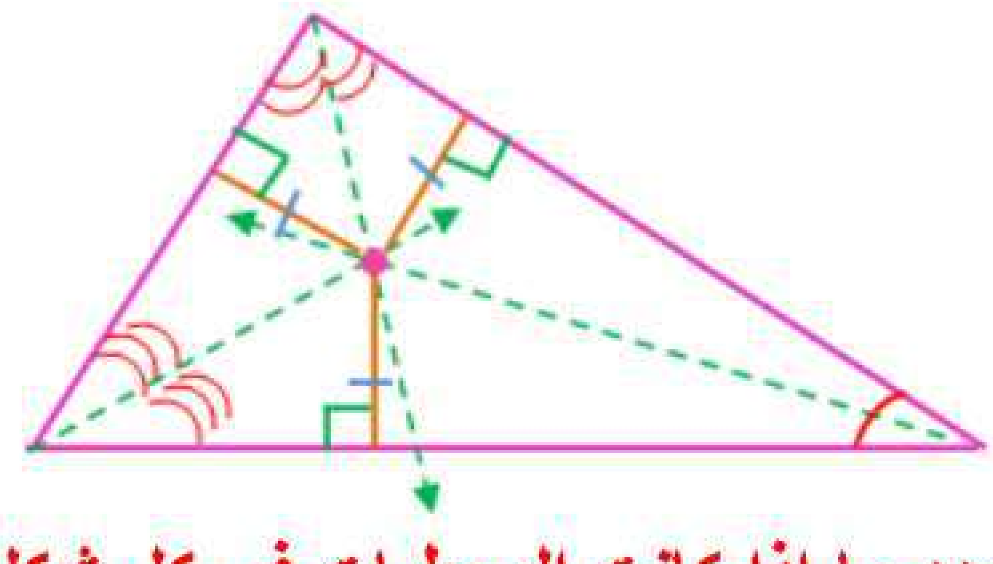
$$26 + 57 + \angle AEC = 180^\circ$$

$$\angle AEC = 97^\circ$$

بما أن $\overline{AC} \perp \overline{EP}$ وينصف $\angle AEC$ إذن $\angle DEB \ \frac{97}{2} = 48.5^\circ$

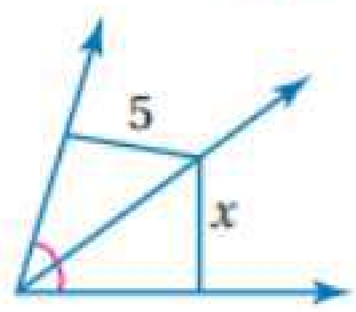
22: تصميم داخلي

أجد نقطة تلاقي منصفات زوايا المثلث التي تمثل مركز الدائرة الداخلية للمثلث وتبعد أبعادا متساوية عن أضلاع المثلث.



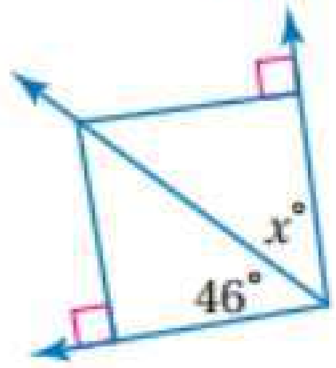
حدد ما إذا كانت المعطيات في كل شكل مما يأتي كافية لإيجاد قيمة x. وضح إجابتك.

(23



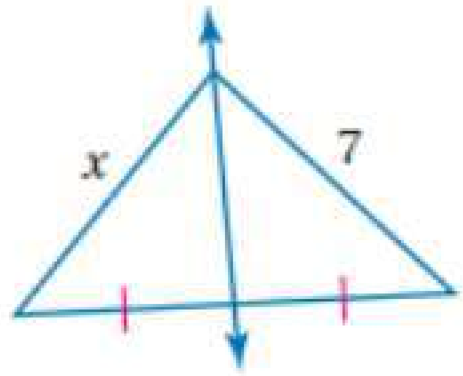
لا، يجب أن تعرف إن كانت القطعتان عموديتين على ضلعي الزاوية.

(24



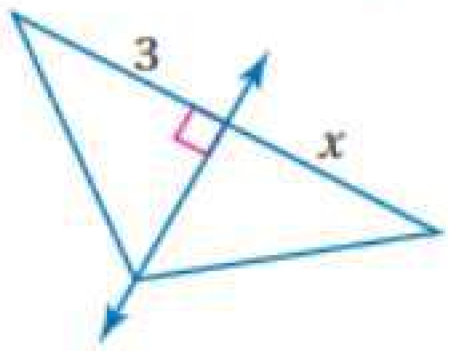
لا، يجب أن تعرف إن كانت القطعتان العموديتان على ضلعي الزاوية متساويتان أم لا.

(25



لا، يجب أن تعرف إن كان منصف القاعدة عموديا عليها.

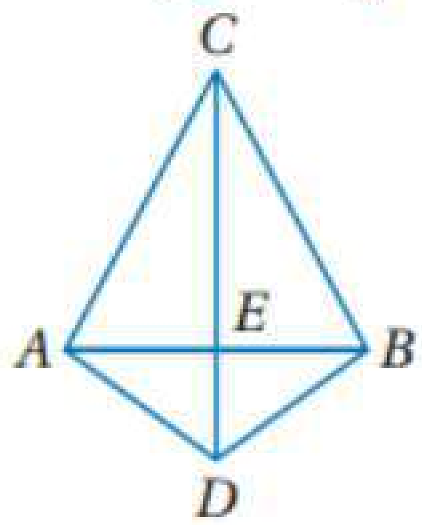
(26



لا، يجب أن تعرف إن كان الوتران متساويين أم لا.

اكتب برهانا ذا عمودين لكل من النظريتين الآتيتين:

27) النظرية ٢ , ٤ .



البرهان: العبارات (المبررات)

1) $\overline{CA} \cong \overline{CB}, \overline{AD} \cong \overline{BD}$ (معطى)

2) $\overline{CD} \cong \overline{CD}$ (خاصية الانعكاس لتطابق القطع المستقيمة).

3) $\Delta ACD \cong \Delta BCD$ (SSS)

4) $\angle ACD \cong \angle BCD$ (العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة)

5) $\overline{CE} \cong \overline{CE}$ (خاصية الانعكاس لتطابق القطع المستقيمة)

6) $\Delta CEA \cong \Delta CEB$ (SAS)

7) $\overline{AE} \cong \overline{BE}$ (العناصر المتناظره في المثلثين المتطابقين متطابقة)

8) E نقطة منتصف $\overline{AB}$ (تعريف نقطة المنتصف)

9) $\angle CEA \cong \angle CEB$ (العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة)

10) $\angle CEA, \angle CEB$ متجاورتان على مستقيم

11) $\angle CEA, \angle CEB$ متكاملتان (نظرية الزاويتين المتجاورتين على مستقيم)

12) $m\angle CEA + m\angle CEB = 180^\circ$ (تعريف التكامل)

13) $m\angle CEA + m\angle CEA = 180^\circ$ (بالتعويض)

14) $2m\angle CEA = 180^\circ$ (بالتعويض)

15) $m\angle CEA = 90^\circ$ (خاصية القسمة)

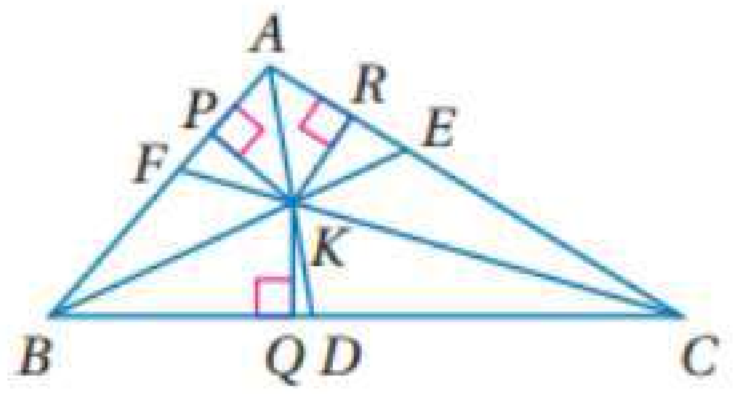
16) $\angle CEA, \angle CEB$ قائمتان (تعريف الزاوية القائمة)

17) $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ (تعريف المستقيمين المتعامدين)

18) $\overline{CD}$ عمود منصف $\overline{AB}$ (تعريف العمود المنصف)

19) D, C واقعتان على العمود المنصف لـ $\overline{AB}$ (تعريف النقطة الواقعة على مستقيم).

28) النظرية ٦,٤



البرهان: العبارات (المبررات)

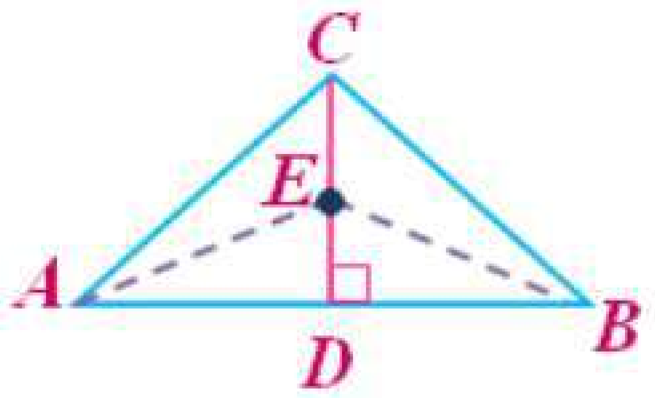
1) $\overline{AD}, \overline{BE}, \overline{CF}$ منصفات لزاويا ΔABC،
$\overline{KQ} \perp \overline{BC}, \overline{KP} \perp \overline{AB}, \overline{KR} \perp \overline{AC}$ (معطيات)

2) $KP = KR, KQ = KR, KP = KQ$ (كل نقطة على منصف الزاوية تكون على بعدين متساويين من ضلعي الزاوية)

3) $KP = KQ = KR$ (خاصية التعدي)

اكتب برهانا حر لكل من النظريتين الآتيتين:

(29



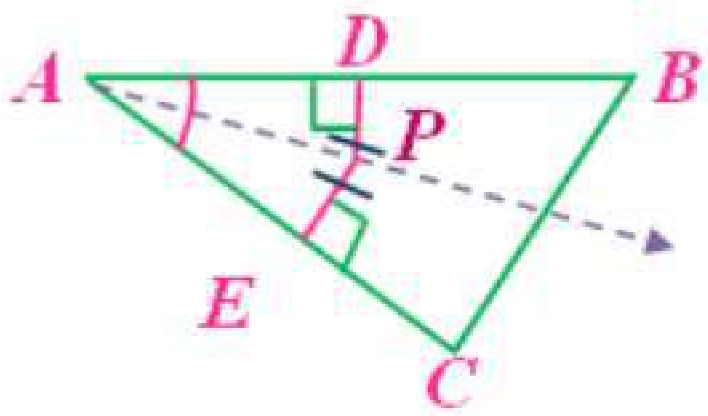
المعطيات: $\overline{CD}$ عمود منصف لـ $\overline{AB}$.

E نقطة على $\overline{CD}$.

المطلوب: $EA = EB$

البرهان: $\overline{CD}$ عمود منصف لـ $\overline{AB}$ومن تعريف المنصف فإن D نقطة منتصف $\overline{AB}$ لذلك $\overline{AD} \cong \overline{BD}$ حسب نظرية نقطة المنتصف.
$\angle CDA, \angle CDB$ قائمتان حسب تعريف العمود. وبما أن جميع الزاوايا القائمة متطابقة فإن $\angle CDA \cong \angle CDB$. وبما أن E نقطة على $\overline{CD}$ فإن $\angle EDA, \angle EDB$ قائمتان ومتطابقتان. وحسب خاصية الانعكاس $\overline{ED} \cong \overline{ED}$ إذن $\Delta EDA \cong \Delta EDB$ حسب SAS. وتكون $\overline{EA} \cong \overline{EB}$ لأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة ومن تعريف التطابق ينتج أن $EA = EB$.

(30



المعطيات:

P نقطة داخل $\angle BAC$.

بعد النقطة P عن $\overline{AB}$ يساوي بعدها عن $\overline{AC}$.

المطلوب: $\overline{AP}$ منصف لـ $\angle BAC$.

البرهان: النقطة P تقع في داخل الزاوية $\angle BAC$، و $PD = PE$. ومن تعريف التطابق $\overline{PD} \cong \overline{EP}$, $\overline{PD} \perp \overline{AB}$ و $\overline{PE} \perp \overline{AC}$ لأن المسافة من نقطة إلى مستقيم تقاس على القطعة المستقيمة العمودية على المستقيم من النقطة.

$\angle AEP , \angle ADP$ قائمتان حسب تعريف المستقيمين المتعامدين

والمثلثان ADP , AEP قائما الزاوية حسب تعريف المثلث قائم الزاوية. وحسب

خاصية الانعكاس $\overline{AP} \cong \overline{AP}$

. إذن، $\Delta ADP , \Delta AEP$ متطابقان حسب LL.

$\angle DAP \cong \angle EAP$ لأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين تكون متطابقة و

$\overline{AP}$ منصف لـ $\angle BAC$ حسب تعريف منصف الزاوية.

31) اكتب بصيغة الميل والمقطع معادلة العمود المنصف:

$$A(-3,1), B(4,3)$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-1}{4+3} = \frac{2}{7}$$

إذن ميل القطعة المستقيمة $= \frac{2}{7}$ لذلك فميل العمود المنصف $= \frac{-7}{2}$

نقطة المنتصف $= \left(\frac{-3+4}{2}, \frac{3+1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, 2\right)$

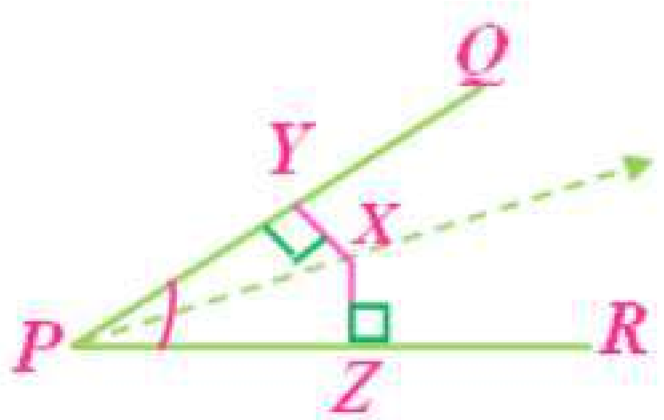
$$y = mx + b$$

$$2 = \frac{-7}{2} \times \frac{1}{2} + b$$

$$b = 2 - \frac{-7}{4} = \frac{15}{4}$$

إذن معادلة المستقيم هي: $y = -\frac{7}{2}x + \frac{15}{4}$

32) برهان: اكتب برهانا ذا عمودين للنظرية ٤ , ٤



المعطيات: PX تنصف $\angle QPR$.

$\overline{XY} \perp \overline{PQ} , \overline{XZ} \perp \overline{PR}$

المطلوب: إثبات أن $\overline{XY} \cong \overline{XZ}$

البرهان: العبارات (المبررات)

١) $\overline{PX}$ تنصف $\angle QPR$ ، $\overline{XZ} \perp \overline{PR}$, $\overline{XY} \perp \overline{PQ}$ (معطيات)

2) $\angle YPX \cong \angle ZPX$ (تعريف منصف الزاوية)

3) $\angle PYX , \angle PZX$ قائمتان (تعريف التعامد)

4) $\angle PYX \cong \angle PZX$ (الزاوايا القائمة متطابقة)

5) $\overline{PX} \cong \overline{PX}$ (خاصية الانعكاس)

6) $\Delta PYX \cong \Delta PZX$ (AAS)

7) $\overline{XY} \cong \overline{XZ}$ (العناصر المتناظره في المثلثين المتطابقين متطابقة)

33) هندسة إحداثية:

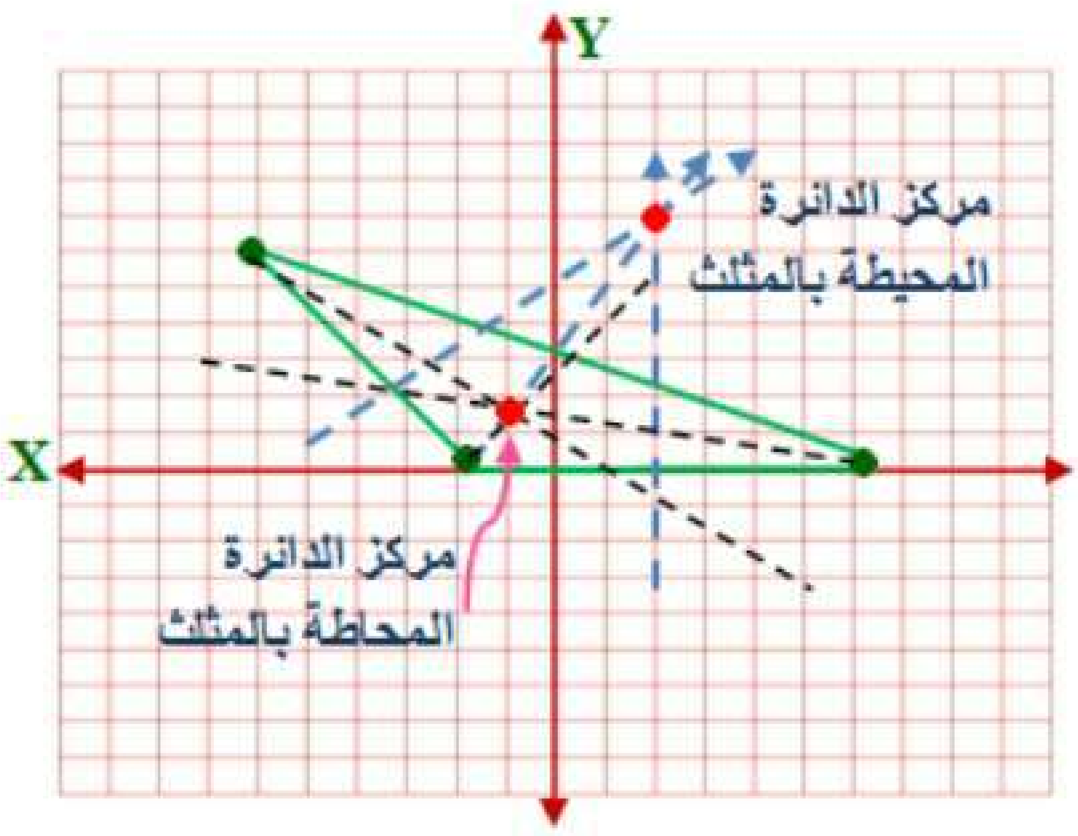
معادلة أحد الأعمدة المنصفة هي $y = 3$ ومعادلة عمود منصف آخر هي $x = 5$. ويتقاطع هذان العمودان عند النقطة $(5,3)$ لذلك فمركز الدائرة التي تمر في رؤوس المثلث يقع عند النقطة $(5,3)$

34) المحل الهندسي:

مستوى يعامد المستوى الذي تقع فيه القطعة $\overline{CD}$ وينصف $\overline{CD}$.

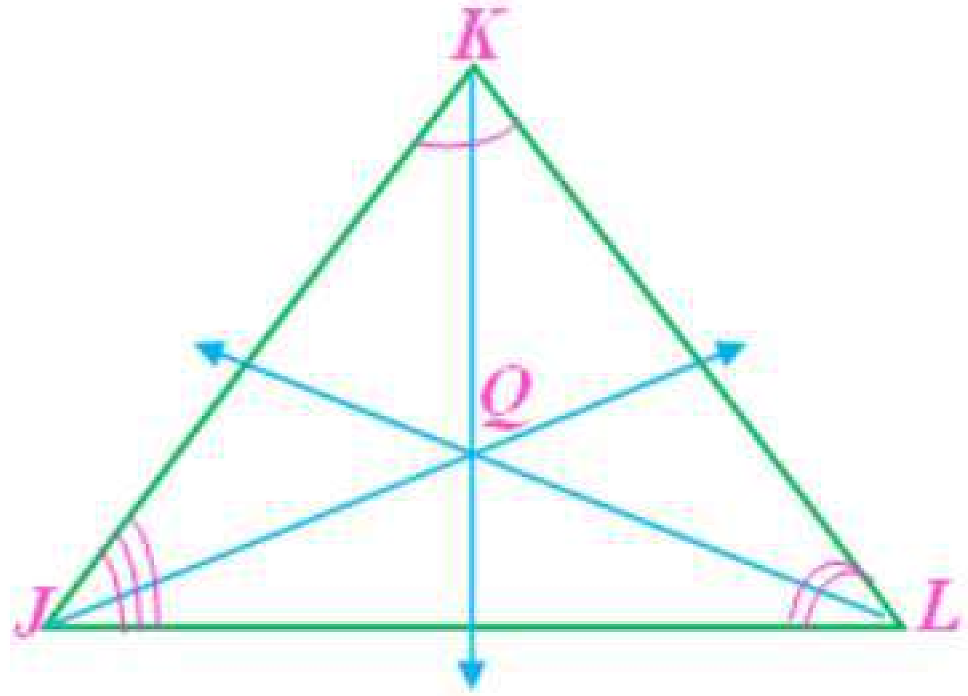
مسائل مهارات التفكير العليا

35) مسألة مفتوحة:

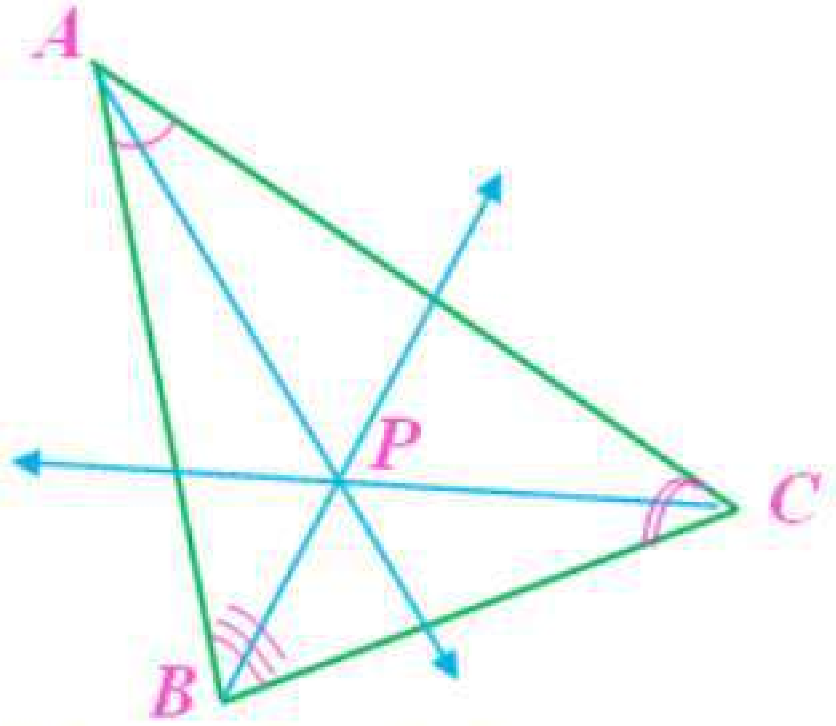


تبرير: حدد ما إذا كانت كل عبارة من العبارتين الآتيتين صحيحة دائماً أو صحيحة أحياناً أو ليست صحيحة أبداً.

36) صحيحة أحيانا إذا كان المثلث متطابق الأضلاع فإن هذه العبارة تكون صحيحة ولكن إذا كان المثلث متطابق الضلعين أو مختلف الأضلاع فإن العبارة خاطئة.

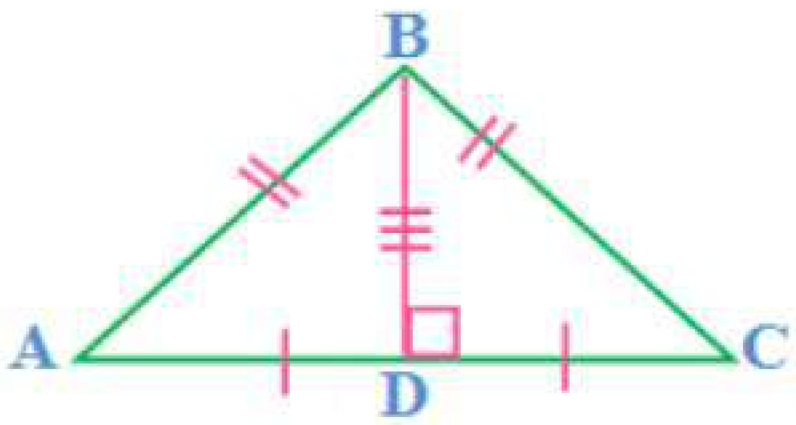


$AP \neq BP \neq CP$



$JQ = KQ = LQ$

37) صحيحة دائما.



المعطيات: ΔABC متطابق الضلعين فيه

$\overline{AB} \cong \overline{BC}$

$\overline{BD}$ عمود منصف لـ $\overline{AC}$.

المطلوب: $\overline{BD}$ منصف لـ $\angle ABC$

البرهان: العبارات (المبررات)

1) ΔABC متطابق الضلعين فيه $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ (معطى)

2) $AB = BC$ (تعريف المثلث متطابق الضلعين)

3) $\overline{BD}$ عمود منصف لـ $\overline{AC}$

4) D نقطة منتصف AC (تعريف منصف القطعة المستقيمة)

5) $\overline{AD} \cong \overline{DC}$

6) $\overline{BD} \cong \overline{BD}$ (خاصية الانعكاس)

7) $\Delta ABD \cong \Delta CBD$ (SSS)

8) $\angle ABD \cong \angle CBD$ (العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين تكون متطابقة)

9) BD منصف لـ $\angle ABC$ (تعريف منصف الزاوية)

38) اكتب:
ينصف كل منهما شيئا ما ولكن الأعمدة المنصفة تنصف القطع المستقيمة في حين تنصف منصفات الزوايا. وتتقاطع كل منها عند نقطة. ونقطة تلاقي الأعمدة المنصفة هي مركز الدائرة التي تمر في رؤوس المثلث. أما نقطة تلاقي منصفات الزوايا فهي مركز الدائرة الداخلية للمثلث والتي تقع دائما داخل المثلث. أما مركز الدائرة التي تمر في رؤوس المثلث فيمكن أن يقع داخل المثلث أو خارجه أو على أحد أضلاعه.

تدريب على الاختبار المعياري

39) D : K, S

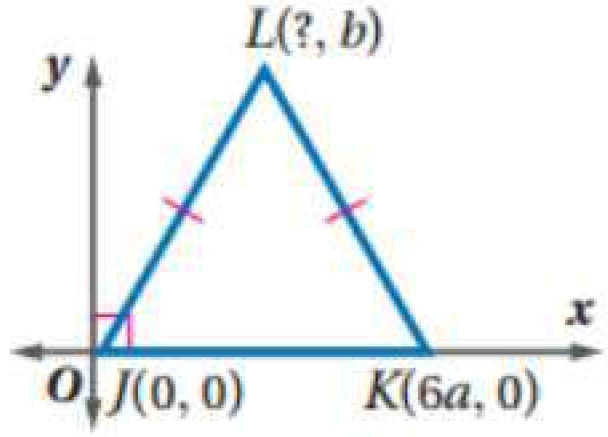
40) D : 3

$$\frac{3x+9}{x+3}=\frac{3\cancel{(x+3)}}{\cancel{x+3}}=3$$

مراجعة تراكمية

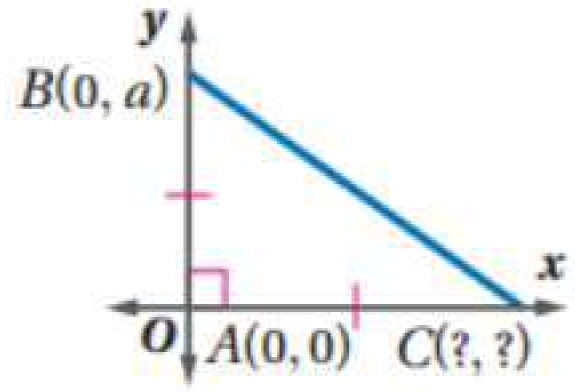
عين الإحداثي المجهول في كل من المثلثات الآتية:

٤١)



بما أن المثلث متطابق الضلعين إذن الاحداثي x للنقطة L يقع في منتصف المسافة بين 0 ، K إذن إحداثي النقطة L: $(3a, b)$

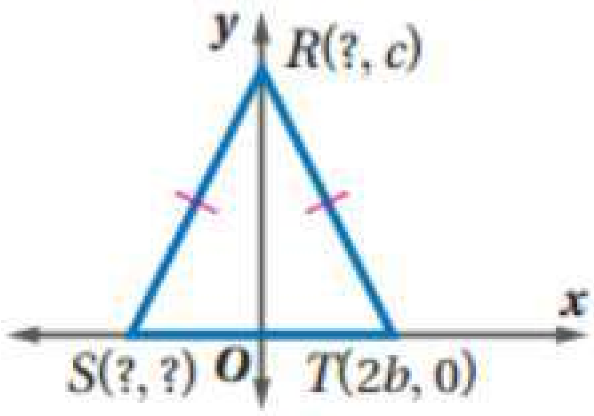
(42



وبما أن النقطة C تقع على المحور x إذن الإحداثي y لها = ٠

و بما أن المثلث متطابق الضلعين إذن النقطة $C:(a,0)$

(٤٣



بما أن المثلث متطابق الضلعين والمحور y عمودي على المحور x إذن R

تنصف $\overline{ST}$ (عكس نظرية العمود المنصف)

إذن الاحداثي للنقطة $S:(-2b,0)$

وبما أن النقطة R تقع على المحور y إذن الإحداثي x لها = ٠، $R:(0,c)$

أوجد البعد بين المستقيم ونقطة في كل مما يأتي:

(٤٤

حيث أن المستقيم $y = 5$ يوازي محور السينات

.:.المسافة بين المستقيم و النقطة المعطاة هو الفرق بين الاحداثيهما الصادي

.:. المسافة $= 5 - 4 = 1$ وحدة

٤٥)

معادلة المستقيم المعطى: $y=2x+2$

حاصل ضرب ميل المستقيمين المتعامدين $=-1$

ميل المستقيم المعطى $=2$

$$2\times\left(\frac{-1}{2}\right)=-1$$

∴ معادلة المستقيم العمودي على المستقيم المعطى $=\frac{-1}{2}$

بكتابة معادلة المستقيم المار بالنقطة $(-1,-5)$ و ميلها $\frac{-1}{2}$

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y+5=-\frac{1}{2}(x+1)$$

$$2y+10=-x-1$$

$$y=-\frac{1}{2}x-\frac{11}{2}$$

بحل المعادلتين لإيجاد نقطة التقاطع

∵ الطرف الايسر متساوي للمعادلتين

$$-\frac{1}{2}x-\frac{11}{2}=2x+2$$

$$\therefore -\frac{1}{2}x-2x=2+\frac{11}{2}$$

$$-\frac{5}{2}x=\frac{15}{2}$$

$$x=-3$$

بالتعويض في المعادلة المعطاه لإيجاد قيمة y

$$y = 2(-3)+2$$
$$= -4$$

$\therefore$ نقطة التقاطع هي $(-3\,,-4)$

لإيجادالمسافة بين النقطة و المستقيم ، نجد المسافة بين النقطتين
$(-3\,,-4)$، $(-1\,,-5)$بالقانون

$$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$
$$d = \sqrt{(-1+3)^2+(-5+4)^2}$$
$$d = \sqrt{4+1}$$
$$d = \sqrt{5}$$

$\therefore$المسافة بين النقطة و المستقيم هي $\sqrt{5}$ وحدات

٤٦)

بوضع معادلة المستقيم على الصورة :

$$y = mx + b$$
$$-3y = -9-2x$$
$$\frac{-3y}{-3} = \frac{-9}{-3} - \frac{2x}{-3}$$
$$y = \frac{2}{3}x + 3$$

حاصل ضرب ميل المستقيمين المتعامدين $= -1$

ميل المستقيم المعطى $= \frac{2}{3}$

$$\frac{2}{3}\times\left(\frac{-3}{2}\right)=-1$$

∴معادلة المستقيم العمودي على المستقيم المعطى = $\frac{-3}{2}$

بكتابة معادلة المستقيم المار بالنقطة $(2,0)$ و ميلها $\frac{-3}{2}$

$$y-y_1=m\left(x-x_1\right)$$

$$y-0=\frac{-3}{2}(x-2)$$

$$y=\frac{-3}{2}x+3$$

بحل المعادلتين لإيجاد نقطة التقاطع

∵ الطرف الايسر متساوي للمعادلتين

$$\frac{-3}{2}x+3=\frac{2}{3}x+3$$

$$\frac{-3}{2}x-\frac{2}{3}x=-3+3$$

$$\frac{-13}{6}x=0$$

$$x=0$$

$$y=\frac{2}{3}x+3$$

$$y=\frac{2}{3}\times 0+3$$

$$y=3$$

∴ نقطة التقاطع هي $(0\ ,3)$

لإيجادالمسافة بين النقطة و المستقيم ، نجد المسافة بين النقطتين $(2\ ,0)$، $(0\ ,3)$بالقانون

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$d=\sqrt{(2-0)^2+(0-3)^2}$$

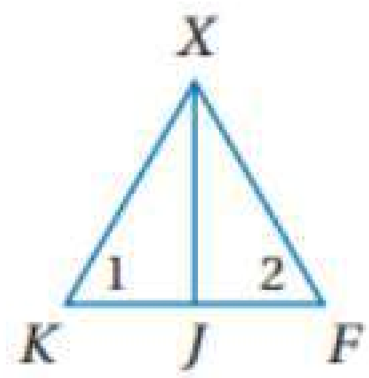
$$d=\sqrt{4+9}$$

$$d=\sqrt{13}$$

.:المسافة بين النقطة و المستقيم هي $\sqrt{13}$ وحدات

استعد للدرس اللاحق

47) برهان: اكتب برهانا ذا عمودين:



العبارات (المبررات)

1) ΔXKF متطابق الأضلاع (معطي)

2) $\angle 1 \cong \angle 2$ (المثلث متطابق الأضلاع يكون متطابق الزوايا)

3) $\overline{KX} \cong \overline{FX}$ (تعريف المثلث متطابق الأضلاع)

4) XJ تنصف $\angle X$ (معطى)

5) $\angle KXJ \cong \angle FXJ$ (تعريف منصف الزاوية)

6) $\Delta KXJ \cong \Delta FXJ$ (ASA)

7) $\overline{KJ} \cong \overline{FJ}$ (العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة)

8) J نقطة منتصف $\overline{KF}$ (تعريف نقطة المنتصف)

صفحة 218: التمثيل والتحليل

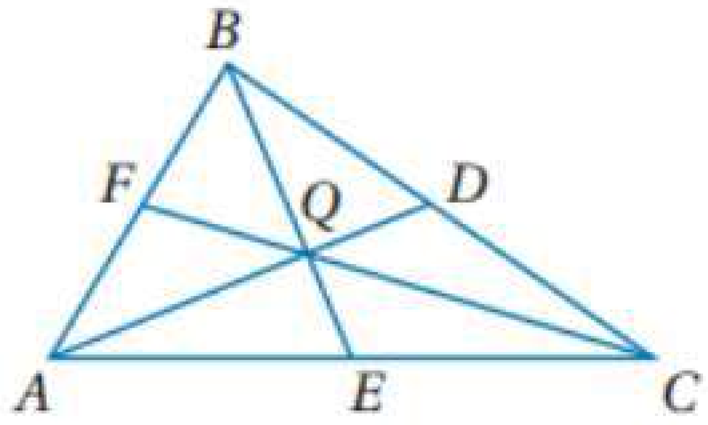
1) تتقاطع في نقطة واحدة.

2) تتقاطع في نقطة واحدة.

٤-٢ القطع المتوسطة والارتفاعات في المثلث

تحقق

صفحة 219



1A) بما أن Q هي مركز ΔABC إذن حسب نظرية مركز المثلث:

$$QC = \frac{2}{3}FC$$

$$QC = \frac{2}{3}\times 15$$

$$QC = 10$$

$$FQ = FC - QC$$

$$FQ = 15 - 10$$

$$FQ = 5$$

1B) بما أن Q هي مركز ΔABC إذن حسب نظرية مركز المثلث:

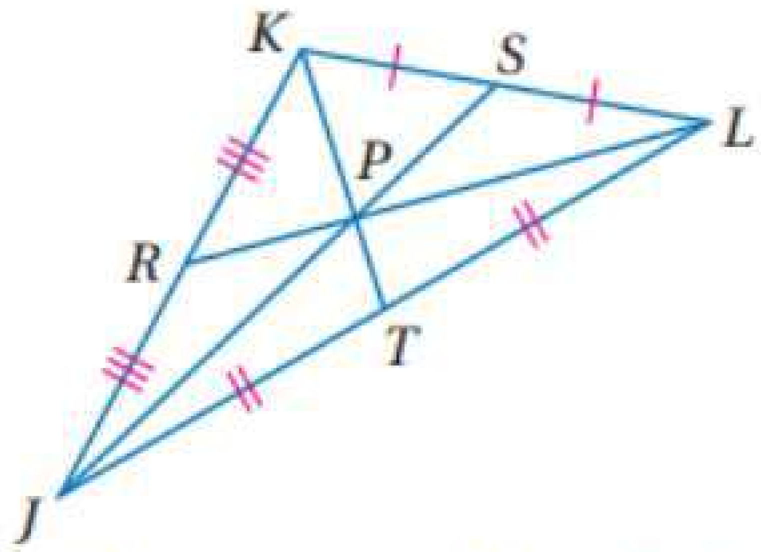
$$QC = \frac{2}{3}FC$$

$$QC = \frac{2}{3}\times 15$$

$$QC = 10$$

تحقق

صفحة 220



2A) بما أن P هي مركز $\Delta JKLS$ و $RP = 3.5$ إذن حسب نظرية مركز المثلث:

$$PL = \frac{2}{3}LR$$

$$PL = \frac{2}{3}(PL + RP)$$

$$PL = \frac{2}{3}PL + \frac{2}{3}RP$$

$$PL - \frac{2}{3}PL = \frac{2}{3} \times 3.5$$

$$\frac{1}{3}PL = \frac{7}{3}$$

$$PL = 7$$

2B)

$$JP = \frac{2}{3}JS$$

$$9 = \frac{2}{3} \times JS$$

$$JS = 9 \div \frac{2}{3} = 9 \times \frac{3}{2}$$

$$JS = 13.5$$

$$PS = JS - JP = 13.5 - 9$$

$$PS = 4.5$$

صفحة 221

تحقق

(٣

ايجاد نقطة المنتصف للنقطة D للضلع $\overline{AC}$

$$A\left(0,4\right), C\left(12,1\right)$$

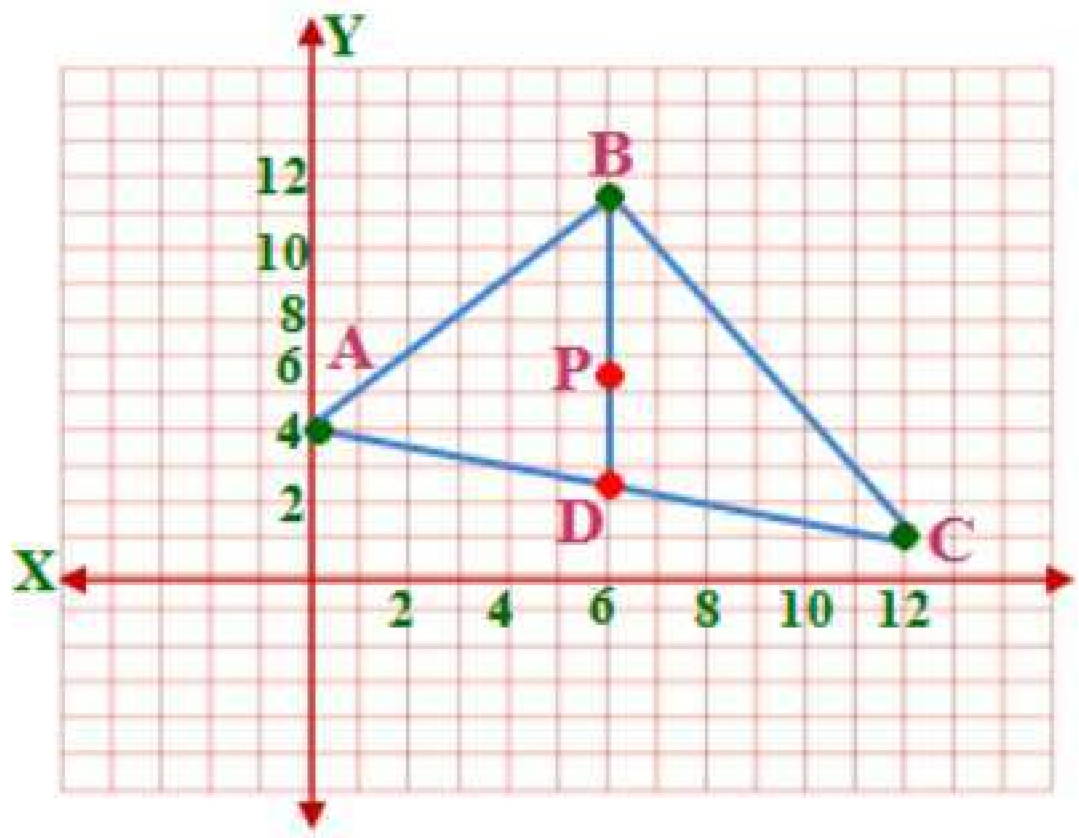
$$D\left(\frac{0+12}{2}, \frac{1+4}{2}\right) = D\left(6, 2.5\right)$$

المسافة من $D\left(6,2.5\right)$ إلى $B\left(6,11.5\right)$ تساوي $11.5-2.5$ أي ٩ وحدات

واذا كانت P هي مركز ΔABC فإن $BP = \frac{2}{3}BD$ ولذلك يقع المركز على بعد

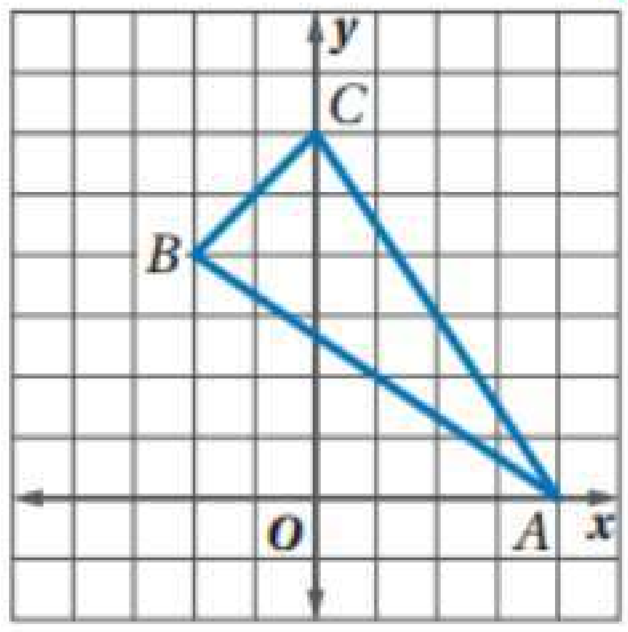
$9 \times \frac{2}{3}$ أو ٦ وحدات لأعلى وتكون احداثيات P هي $\left(6, 11.5-6\right)$ أو $\left(6, 5.5\right)$

إذن يتوازن المثلث عند النقطة $\left(6, 5.5\right)$



تحقق صفحة 222

٤)



$A(4,0), B(-2,4), C(0,6)$

أوجد معادلة ارتفاع من C إلى $\overline{AB}$

بما أن ميل $\overline{AB}$ يساوي $\frac{-2}{3} = \frac{4}{-6} = \frac{4-0}{-2-4} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m$

فإن ميل الارتفاع العمودي على $\overline{AB}$ يساوي $\frac{3}{2}$

$y - y_1 = m(x - x_1)$ صيغة الميل ونقطة

$C(0,6),\ m = \frac{3}{2}$

$y - 6 = \frac{3}{2}(x - 0)$

$y - 6 = \frac{3}{2}x$

$y = \frac{3}{2}x + 6 \to 1$

معادلة الإرتفاع من A إلى $\overline{BC}$

بما أن ميل $\overline{BC}$ يساوي $1 = \frac{2}{2} = \frac{6-4}{0+2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m$

فإن ميل الارتفاع العمودي على $\overline{AB}$ يساوي -1

$y - y_1 = m(x - x_1)$ صيغة الميل ونقطة

$A(4,0),\ m = -1$

$y - 0 = -1(x - 4)$

$y = -x + 4 \to 2$

حل المعادلتين ١ و ٢

$y = \frac{3}{2}x + 6$

$y = -x + 4$

$\frac{3}{2}x + 6 = -x + 4$

$\frac{3}{2}x + x = 4 - 6$

$\frac{5}{2}x = -2$

$x = -\frac{4}{5}$

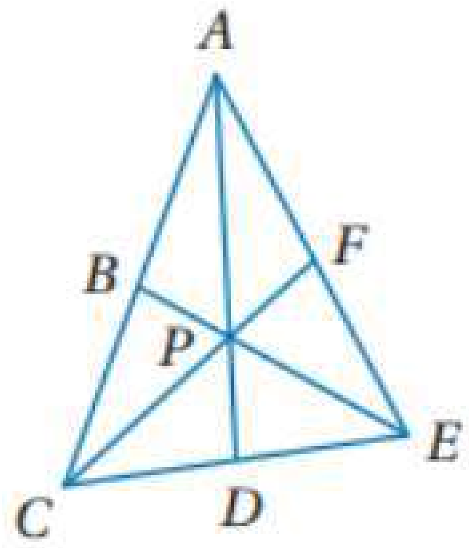
$y = -x + 4$

$y = \frac{4}{5} + 4$

$y = 4\frac{4}{5}$

إذن النقطة $\left(\frac{-4}{5}, 4\frac{4}{5}\right)$ هي ملتقي ارتفاعات المثلث.

أوجد طولي القطعتين الاتيتين: المثالان 1,2



١)

بما أن P هي مركز ΔACE إذن حسب نظرية مركز المثلث:

$$PC = \frac{2}{3}CF$$

$$PC = \frac{2}{3}(PF + CP)$$

$$PC = \frac{2}{3}(6 + CP)$$

$$PC = 4 + \frac{2}{3}CP$$

$$PC - \frac{2}{3}CP = 4$$

$$\frac{1}{3}CP = 4$$

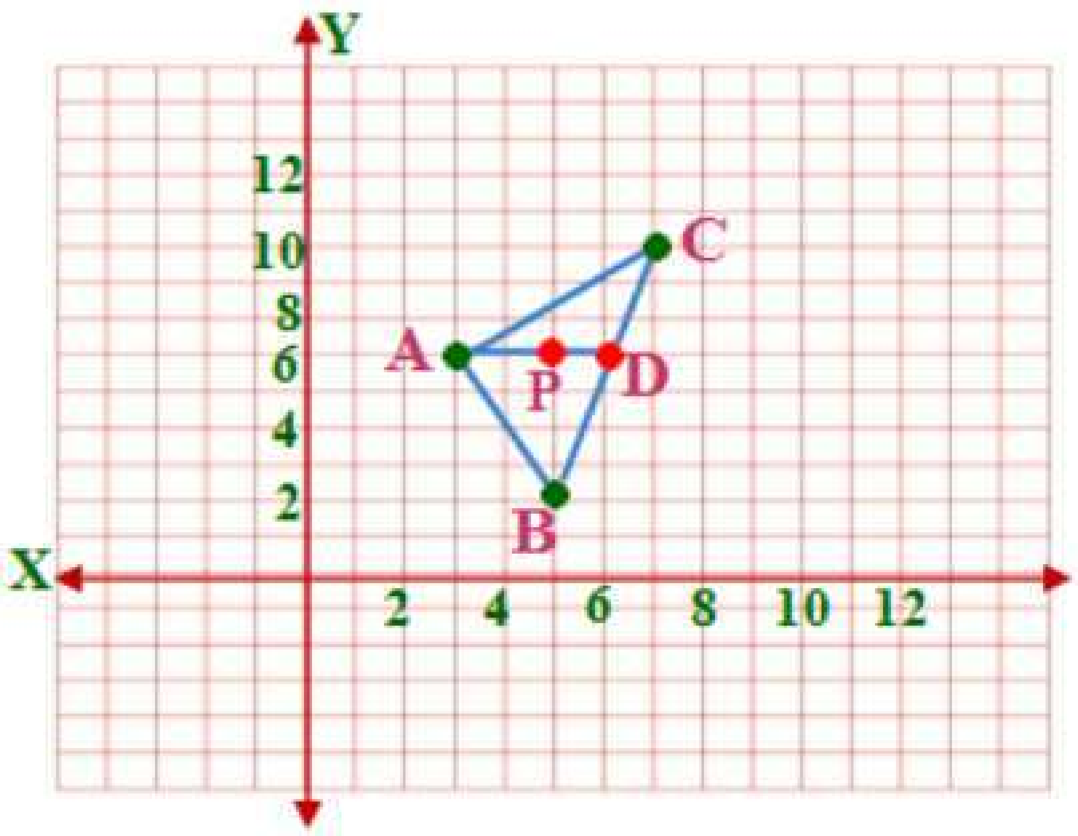
$$CP = 12$$

$$AP = \frac{2}{3}AD$$

$$AP = \frac{2}{3} \times 15$$

$$AP = 10$$

٣) تصميم داخلي:



بفرض ان اسماء نقاط المثلث هي ABC

$A(3,6), B(5,2), C(7,10)$

ايجاد نقطة المنتصف للنقطة D للضلع $\overline{BC}$

$B(5,2), C(7,10)$

$$D\left(\frac{5+7}{2},\frac{10+2}{2}\right)=D(6,6)$$

المسافة من $D(6,6)$ إلى $A(3,6)$ تساوي $6-3$ أي ٣ وحدات.

واذا كانت P هي مركز ΔABC فإن $AP=\frac{2}{3}AD$ ولذلك يقع المركز على بعد

$3\times\frac{2}{3}$ أو ٢ وحدة إلى اليمين من A وتكون احداثيات P هي $(5,6)$

إذن يتوازن المثلث عند النقطة $(5,6)$

4) هندسة احداثية:

$A(-3,3), B(-1,7), C(3,3)$

أوجد معادلة ارتفاع من C إلى $\overline{AB}$

بما أن ميل $\overline{AB}$ يساوي 2 $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{7-3}{-1+3}=\frac{4}{2}=2$

فإن ميل الارتفاع العمودي على $\overline{AB}$ يساوي $-\frac{1}{2}$

صيغة الميل ونقطة $y - y_1 = m(x - x_1)$

$C(3,3),\ m = -\frac{1}{2}$

$y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 3)$

$y - 3 = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

$y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} + 3$

$y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2} \rightarrow 1$

معادلة الإرتفاع من A إلى $\overline{BC}$

بما أن ميل $\overline{BC}$ يساوي -1 $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-7}{3+1} = \frac{-4}{4} = -1$

فإن ميل الارتفاع العمودي على $\overline{BC}$ يساوي 1

صيغة الميل ونقطة $y - y_1 = m(x - x_1)$

$A(-3,3),\ m = 1$

$y - 3 = 1(x + 3)$

$y - 3 = x + 3$

$y = x + 6 \rightarrow 2$

بطرح المعادلتين ١ و ٢

$y = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$

$y = x + 6$

$0 = -\frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$

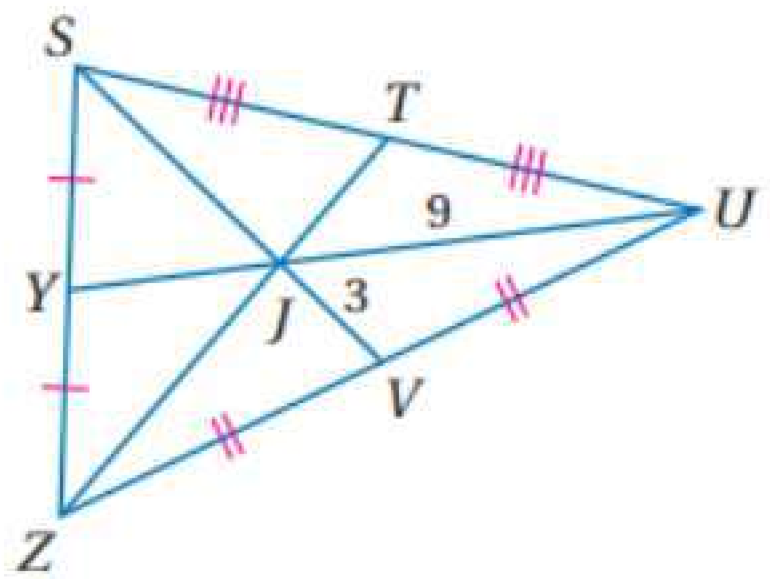
$\frac{3}{2}x = -\frac{3}{2}$

$$x = -1$$
$$y = x + 6$$
$$y = -1 + 6$$
$$y = 5$$

إذن احداثيات ملتقى ارتفاعات المثلث هي $(-1,5)$

تدرب وحل المسائل

أوجد طول كل مما يأتي:



٥)

بما أن J هي مركز ΔSZU و $JU = 9$ إذن حسب نظرية مركز المثلث:

$$JU = \frac{2}{3}YU$$
$$JU = \frac{2}{3}(JU + YJ)$$
$$9 = \frac{2}{3}JU + \frac{2}{3}YJ$$
$$9 = \frac{2}{3} \times 9 + \frac{2}{3}YJ$$
$$9 = 6 +$$
$$\frac{2}{3}YJ = 9 - 6 = 3$$
$$YJ = 3 \div \frac{2}{3} = 4.5$$

(6

بما أن J هي مركز ΔSZU و $JV = 3$ إذن حسب نظرية مركز المثلث:

$$SJ = \frac{2}{3}SV$$

$$SJ = \frac{2}{3}(JV + SJ)$$

$$SJ = \frac{2}{3}\times 3 + \frac{2}{3}SJ$$

$$SJ - \frac{2}{3}SJ = \frac{2}{3}\times 3$$

$$\frac{1}{3}SJ = 2$$

$$SJ = 6$$

(7

$$YU = (JU + YJ)$$

$$YU = 9 + 4.5$$

$$YU = 13.5$$

(8

$$SV = (SJ + VJ)$$

$$SV = 6 + 3$$

$$SV = 9$$

(9

$$ZJ = \frac{2}{3}ZT$$

$$ZJ = \frac{2}{3}\times 18 = 12$$

$$JT = ZT - ZJ$$

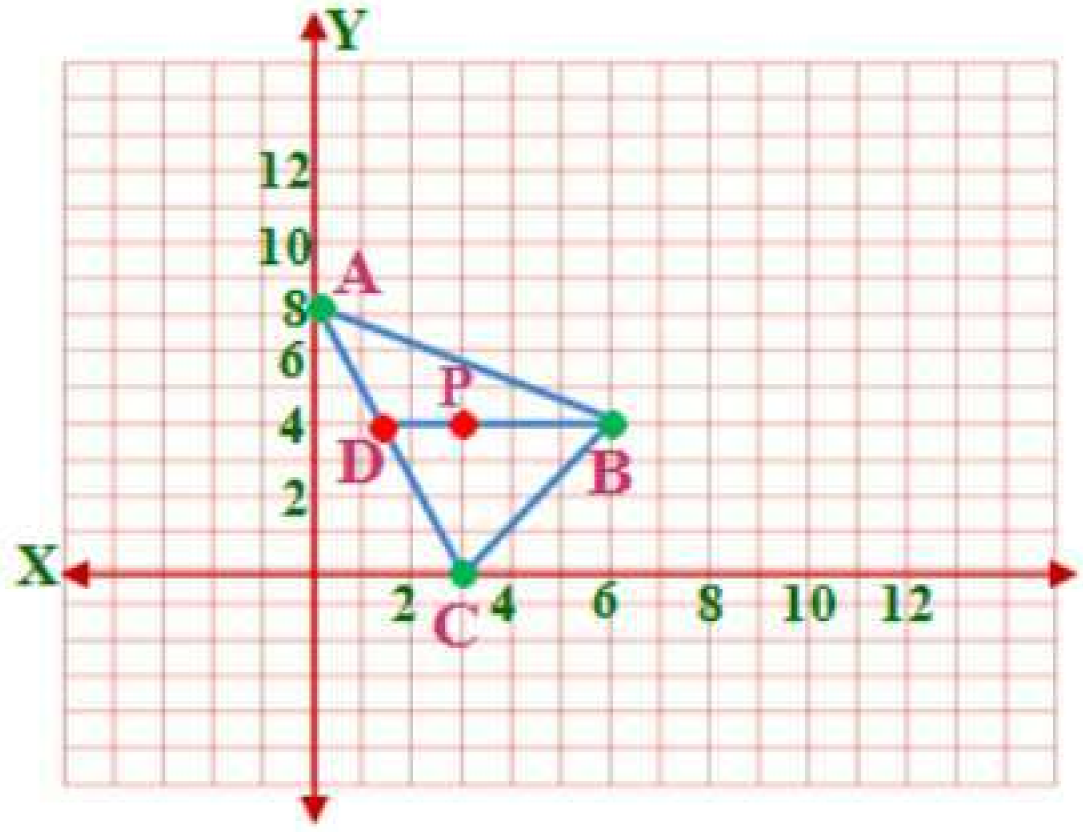
$$JT = 18 - 12 = 6$$

(10

$$ZJ = \frac{2}{3}ZT$$

$$ZJ = \frac{2}{3} \times 18 = 12$$

11) (3, 4) تصميم داخلي: المثال٣



بفرض ان اسماء نقاط المثلث هي ABC

$$A(0,8), B(6,4), C(3,0)$$

ايجاد نقطة المنتصف للنقطة D للضلع $\overline{AC}$

$$A(0,8), C(3,0)$$

$$D\left(\frac{3+0}{2}, \frac{0+8}{2}\right) = D(1.5,4)$$

المسافة من $D(1.5,4)$ إلى $B(6,4)$ تساوي $6-1.5$ أي ٤,٥ وحدات.

واذا كانت P هي مركز ΔABC فإن $BP = \frac{2}{3}BD$ ولذلك يقع المركز على بعد $AD = DC$ أو٣ وحدة إلى اليسار من B وتكون احداثيات P هي $(6-3,4)$

إذن يتوازن المثلث عند النقطة $(3,4)$

12) هندسة احداثية:

$J\left(3,-2\right), K\left(5,6\right), L\left(9,-2\right)$

أوجد معادلة ارتفاع من L إلى $\overline{JK}$

بما أن ميل $\overline{JK}$ يساوي 4 $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{6+2}{5-3}=\frac{8}{2}=4$

فإن ميل الارتفاع العمودي على $\overline{JK}$ يساوي $-\frac{1}{4}$

$y-y_1=m\left(x-x_1\right)$ صيغة الميل ونقطة

$L\left(9,-2\right),\ m=-\frac{1}{4}$

$y+2=-\frac{1}{4}\left(x-9\right)$

$y+2=-\frac{1}{4}x+\frac{9}{4}$

$y=-\frac{1}{4}x+\frac{9}{4}-2$

$y=-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\rightarrow 1$

معادلة الإرتفاع من J إلى $\overline{KL}$

$J\left(3,-2\right), K\left(5,6\right), L\left(9,-2\right)$

بما أن ميل $\overline{KL}$ يساوي -2 $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-2-6}{9-5}=\frac{-8}{4}=-2$

فإن ميل الارتفاع العمودي على $\overline{KL}$ يساوي $\frac{1}{2}$

$y-y_1=m\left(x-x_1\right)$ صيغة الميل ونقطة

$J\left(3,-2\right),\ m=\frac{1}{2}$

$$y+2=\frac{1}{2}(x-3)$$

$$y+2=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\times 3$$

$$y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}-2$$

$$y=\frac{1}{2}x-\frac{7}{2}\rightarrow 2$$

بطرح المعادلتين ١ و ٢

$$y=-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}$$

$$y=\frac{1}{2}x-\frac{7}{2}$$

$$0=\frac{1}{4}x-3.25$$

$$x=13$$

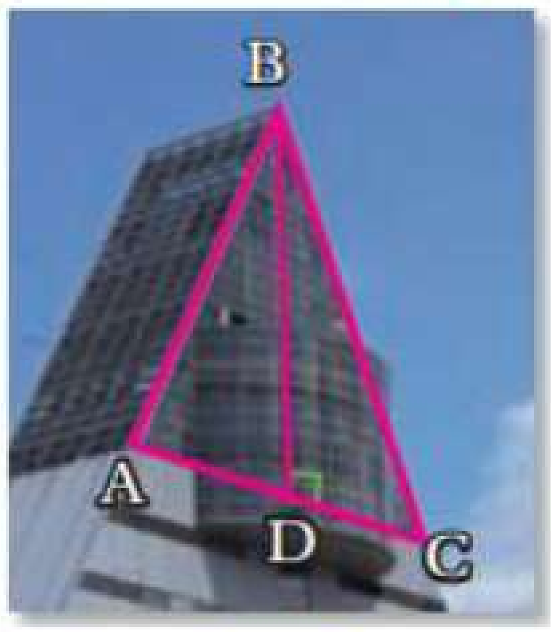
$$y=\frac{1}{2}\times 13-\frac{7}{2}$$

$$y=3$$

إذن احداثيات ملتقى ارتفاعات المثلث هي $(13,3)$

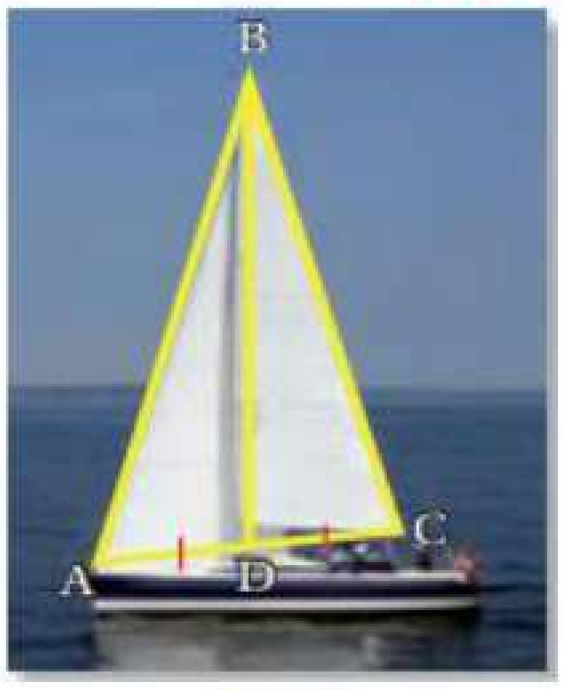
صنف $\overline{BD}$ في كل من الأسئلة الآتية إلي ارتفاع أو عمود منصف أو قطعة متوسطة:

(13



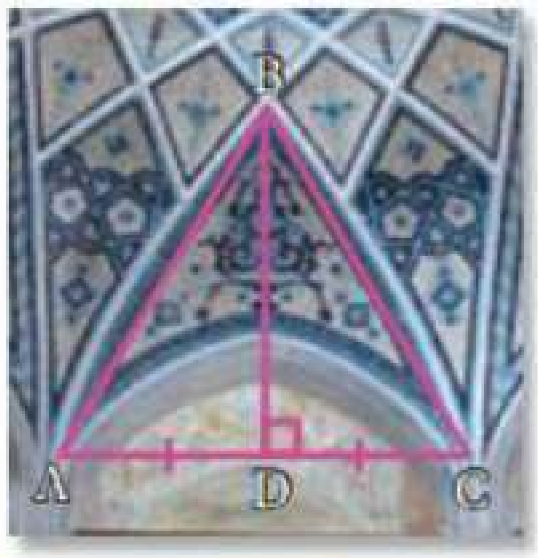
بما أن $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ ولا ينصف $\overline{AC}$ إذن $\overline{BD}$ ارتفاع المثلث ΔABC

(14



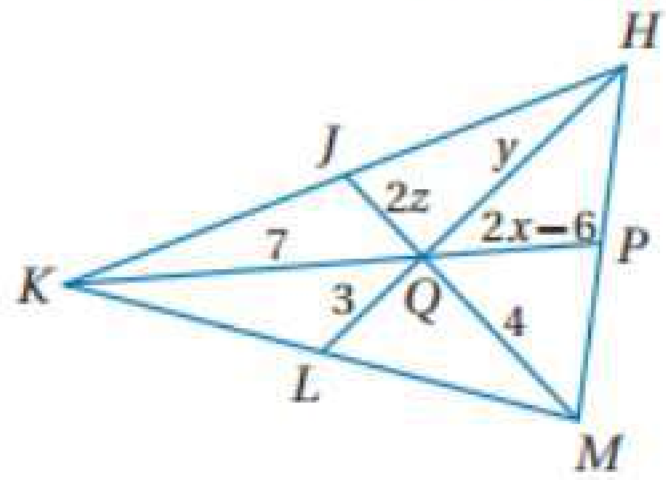
بما أن $\overline{BD}$ ليست عمودية و $AD = DC$ إذن $\overline{BD}$ قطعة متوسطة

(15



بما أن $\overline{BD}$ عمودية وتنصف $\overline{AC}$ إذن $\overline{BD}$ عمود منصف

16) جبر:



بما أن J, P, L نقط منتصفات $\overline{MK}, \overline{HM}, \overline{KH}$

إذن $\overline{LH}, \overline{MJ}, \overline{KP}$ قطع متوسطة في ΔKHM لذلك فالنقطة P هي مركز ΔKHM إذن:

$$KQ=\frac{2}{3}KP$$

$$7=\frac{2}{3}(QP+KQ)$$

$$7=\frac{2}{3}(2x-6+7)$$

$$7=\frac{2}{3}(2x+1)$$

$$7=\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}$$

$$\frac{4}{3}x=7-\frac{2}{3}=\frac{19}{3}$$

$$x=\frac{19}{3}\div\frac{4}{3}$$

$$x=4.75$$

$$MQ=\frac{2}{3}MJ$$

$$MQ=\frac{2}{3}(JQ+QM)$$

$$4=\frac{2}{3}(2z+4)$$

$$4=\frac{4}{3}z+\frac{8}{3}$$

$$\frac{4}{3}z=4-\frac{8}{3}$$

$$\frac{4}{3}z=\frac{4}{3}$$

$$z=1$$

$$HQ = \frac{2}{3}HL$$

$$y = \frac{2}{3}(HQ + QL)$$

$$y = \frac{2}{3}(y + 3)$$

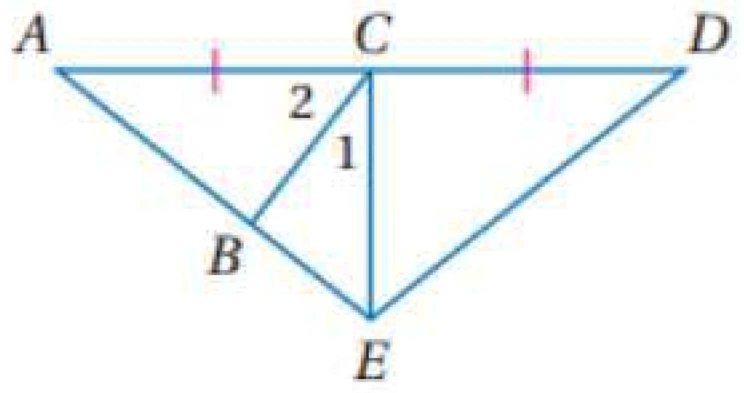
$$y = \frac{2}{3}y + 2$$

$$y - \frac{2}{3}y = 2$$

$$\frac{1}{3}y = 2$$

$$y = 6$$

17) جبر:



بما أن $\overline{AC} = \overline{CD}$ و $\overline{EC}$ ارتفاع ΔAED إذن $EC \perp AD$

$$\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$$

$$(2x + 7) + (3x + 13) = 90^\circ$$

$$5x + 20 = 90^\circ$$

$$5x = 90 - 20$$

$$5x = 70$$

$$x = 14$$

$$m\angle 1 = 2x + 7$$

$$m\angle 1 = 2 \times 14 + 7$$

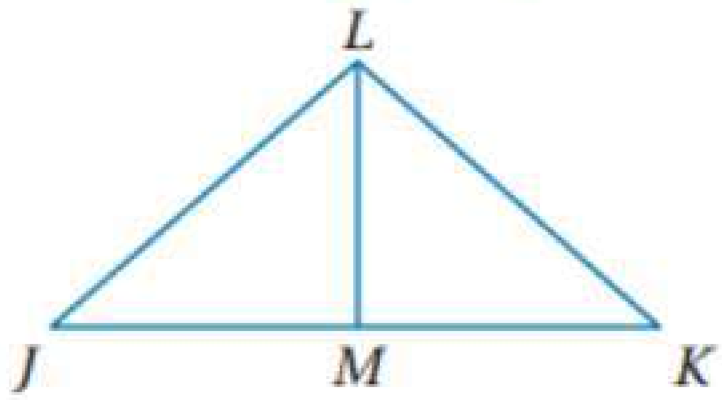
$$m\angle 1 = 35^\circ$$

$m\angle 2 = 3x + 13$

$m\angle 2 = 3\times 14 + 13$

$m\angle 2 = 55^\circ$

في الشكل المجاور حدد ما إذا كانت $\overline{LM}$ عمودا منصف أو قطعة متوسطة أو ارتفاع لـ ΔJKL في كل حالة مما يأتي:



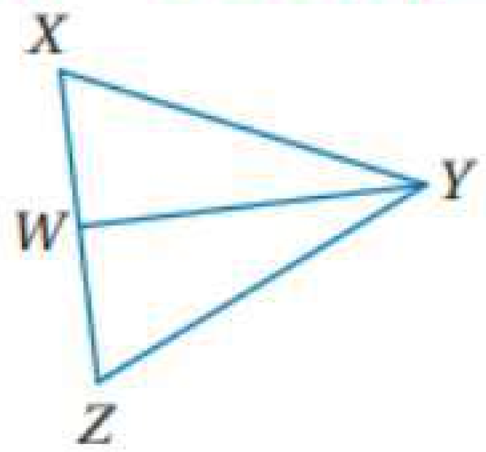
18) بما أن $\overline{JK} \perp \overline{LM}$ ولا ينصف $\overline{JK}$ إذن $\overline{LM}$ ارتفاع

19) بما أن $\Delta KLM \cong \Delta JLM$ إذن $\overline{MK} = \overline{JM}$ إذن $\overline{LM}$ قطعة متوسطة

20) بما أن $\overline{MK} = \overline{JM}$ إذن $\overline{LM}$ قطعة متوسطة

21) بما أن $\overline{JK} \perp \overline{LM}$ و $\overline{LK} \cong \overline{JL}$ إذن حسب عكس نظرية العمود المنصف $\overline{LM}$ ينصف $\overline{JK}$ إذن $\overline{LM}$ عمود منصف.

22) برهان: اكتب برهان حرا.



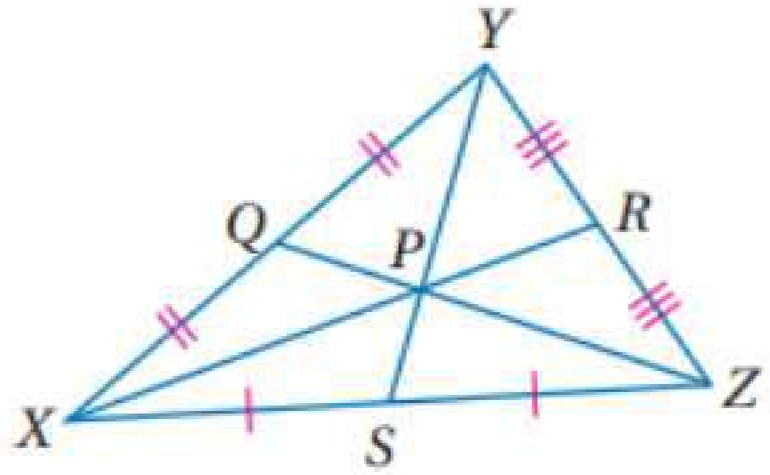
المعطيات: ΔXYZ متطابق الضلعين فيه $\overline{ZY} \cong \overline{XY}$، $\overline{WY}$ ينصف $\angle Y$.

المطلوب: $\overline{WY}$ قطعة متوسطة.

البرهان: بما أن ΔXYZ متطابق الضلعين فيه $\overline{ZY} \cong \overline{XY}$ ومن تعريف منصف الزاوية تعلم أن $\angle ZYW \cong \angle XYW$ كما أن $\overline{YW} = \overline{YW}$ حسب خاصية الانعكاس. لذلك وبحسب SAS يكون $\Delta ZYW \cong \Delta XYW$.

إذن $\overline{ZW} \cong \overline{XW}$ لأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين تكون متطابقة وحسب نقطة المنتصف تكون W نقطة منتصف $\overline{XZ}$ ومن تعريف القطعة المتوسطة تكون $\overline{WY}$ قطعة متوسطة.

23) اكتب برهانا جبريا:



المعطيات: $\overline{ZQ}$,$\overline{YS}$,$\overline{XR}$ قطع متوسطة لـ ΔXYZ

المطلوب: $2 = \frac{XP}{PR}$

البرهان:

العبارات (المبررات)

1) $\overline{ZQ}$,$\overline{YS}$,$\overline{XR}$ قطع متوسطة لـ ΔXYZ (معطيات)

2) $XP = \frac{2}{3}XR$ (نظرية مركز المثلث)

3) $XR = XP + PR$ (مسلمة جمع القطع المستقيمة)

4) $XP = \frac{2}{3}(XP + PR)$ (بالتعويض)

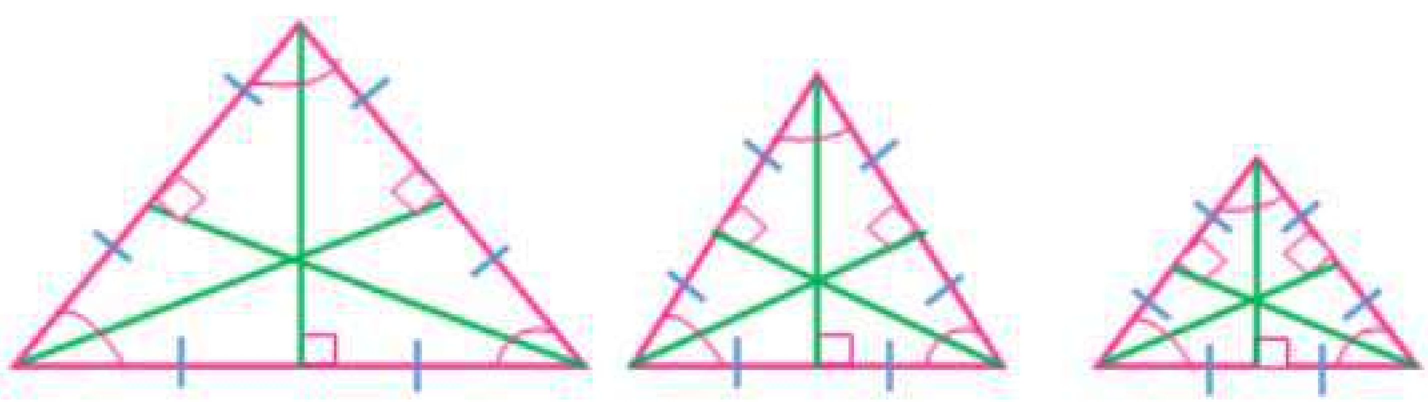
5) $XP = \frac{2}{3}XP + \frac{2}{3}PR$ (خاصية التوزيع)

6) $\frac{1}{3}XP = \frac{2}{3}PR$ (خاصية الطرح)

7) $XP = 2RP$ (خاصية الضرب)

8) $\frac{XP}{PR} = 2$ (خاصية القسمة)

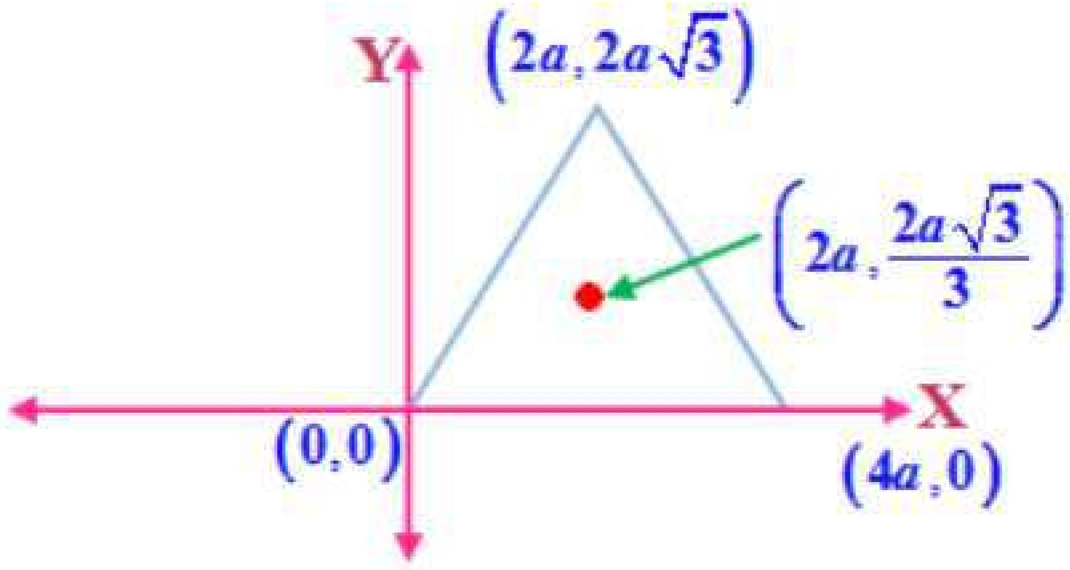
24a) تمثيلات متعددة:



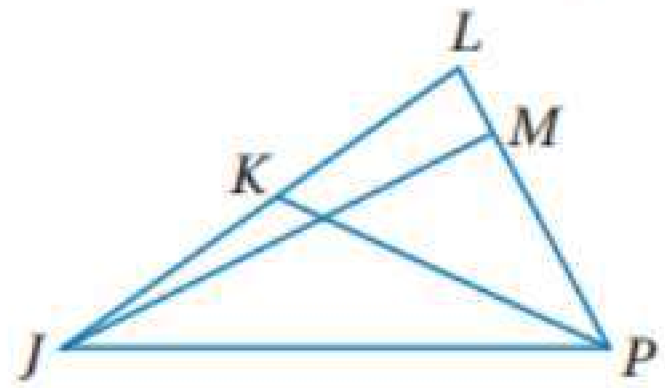
24b) لفظياً:

نقطة التلاقي الأربع للمثلث متطابق الأضلاع هي النقطة نفسها.

24c) بيانياً:



25) جبر:



بما أن $\overline{JM}$ ارتفاع ΔJLP إذن $\overline{LP} \perp \overline{JM}$ إذن $\angle JMP = 90^\circ$

$$3x - 6 = 90$$
$$3x = 96$$
$$x = 32$$

26)

بما أن $\overline{PK}$ قطعة متوسطة إذن $\overline{KL} = \overline{KJ}$

$$5y - 8 = 3y - 2$$
$$5y - 3y = -2 + 8$$
$$2y = 6$$
$$y = 3$$
$$LK = 5y - 8$$
$$LK = 5 \times 3 - 8$$
$$LK = 7$$

مسائل مهارات التفكير العليا

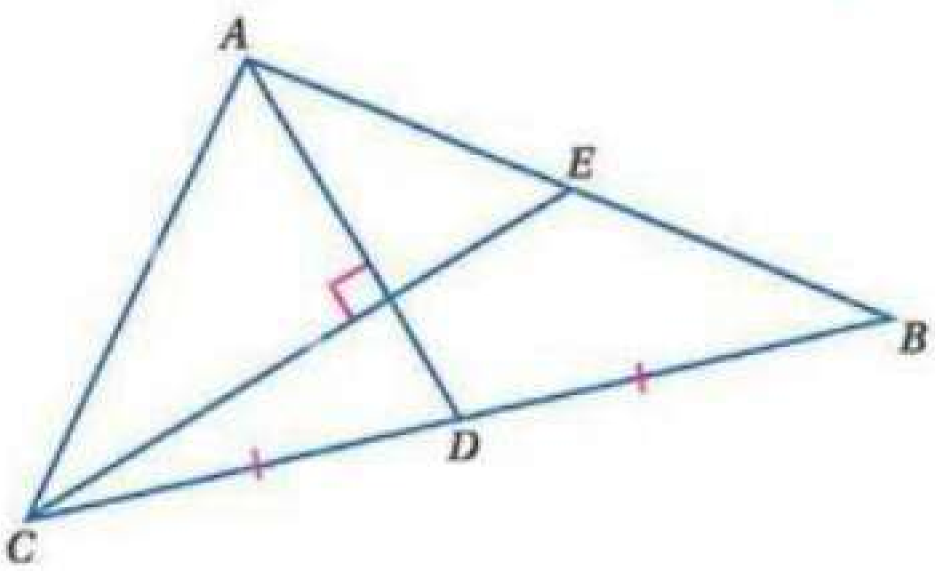
27) اكتشف الخطأ:

إجابة عبد الكريم هي الصحيحة فحسب نظرية مركز المثلث $AP = \frac{2}{3}AD$ وقد بدلت أطوال القطع المستقيمة.

28) تبرير:

صحيحة؛ في المثلث قائم الزاوية يكون الارتفاعان المرسومان من رأسي الزاويتين الحادتين هما ساقي المثلث الذين يتقاطعان عند رأس الزاوية القائمة. وبما أن الارتفاع إلى وتر المثلث يبدأ من الرأس فإن الارتفاعات الثلاثة تتقاطع عند رأس الزاوية القائمة. لذلك فرأس الزاوية القائمة هو دائما ملتقى الارتفاعات.

29) تحد:



بما أن $\overline{AD}, \overline{CE}$ قطعتين متوسطتين إذن يقعان داخل المثلث وتتلاقي القطع في نقطة واحدة P ولتكن تسمى مركز المثلث إذن حسب نظرية مركز المثلث:

$$\because \overline{AE} = \overline{EB}$$

$$\overline{AB} = 10$$

$$\therefore \overline{AE} = \overline{EB} = 5$$

$$CP = \frac{2}{3}CE$$

$$CP = \frac{2}{3} \times 9$$

$$CP = 6$$

$$EP = CE - CP$$

$$EP = 9 - 6 = 3$$

$$(AE)^2 = (PE)^2 + (AP)^2$$

$$(5)^2 = (3)^2 + (AP)^2$$

$$25 = 9 + (AP)^2$$

$$(AP)^2 = 25 - 9 = 16$$

$$AP = 4$$

$$(AC)^2 = (PC)^2 + (AP)^2$$

$$(AC)^2 = (6)^2 + (4)^2$$

$$AC = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

30) اكتب:

بما أن كل قطعة متوسطة تقسم المثلثين متساويين في المساحة فيمكن أن يتزن المثلث على أي قطعة متوسطة. ولموازنة مثلث على يجب أن أجد النقطة التي تتقاطع عندها خطوط الاتزان الثلاثة. ونقطة الاتزان لمستطيل هي نقطة تقاطع القطعتين المستقيمتين اللتين تصلان بين منتصفي ضلعين متقابلين فيه لأن كل قطعة واصلة بين منتصفي ضلعين متقابلين تقسم المستطيل إلى جزأين متساويين في المساحة.

تدريب على الاختبار المعياري

31) C: $\overline{FJ}$ قطعة متوسطة في ΔFGH

32) B: 2

$$4x - 6y = 12$$

$$\frac{4x}{2} - \frac{6y}{2} = \frac{12}{2}$$

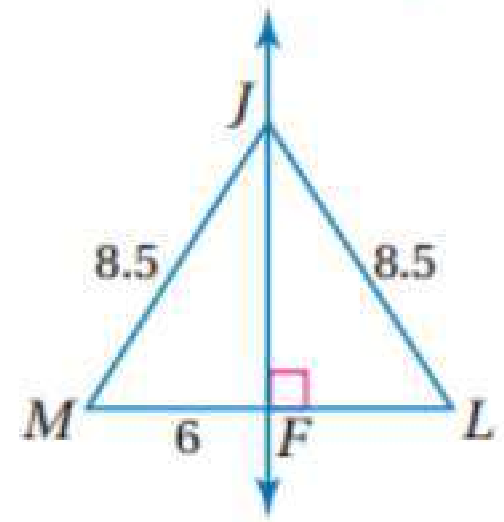
$$2x - 3y = 6$$

إذن المقطع x هو 2

مراجعة تراكمية

أوجد قياس كل مما يأتي:

33)



بما أن $JF \perp ML$ وبحسب فيثاغورث:

$$(JM)^2 = (JF)^2 + (FM)^2$$

$$(8.5)^2 = (JF)^2 + (6)^2$$

$$(JF)^2 = 72.25 - 36$$

$$(JF)^2 = 36.25$$

$$JF \approx 6$$

$$(JL)^2 = (LF)^2 + (6)^2$$

$$(LF)^2 = (8.5)^2 - (6)^2$$

$$(LF)^2 = 72.25 - 36$$

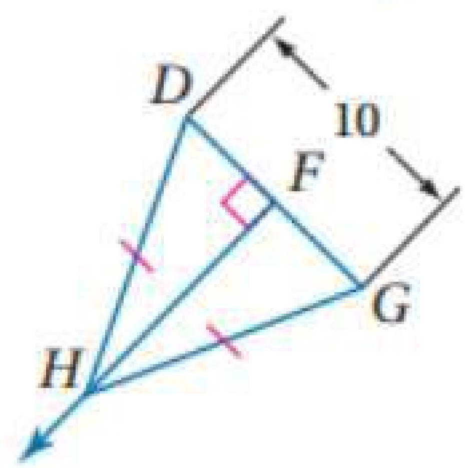
$$(LF)^2 = 36.25$$

$$LF \approx 6$$

$$ML = MF + FL$$

$$\therefore ML = 6 + 6 = 12$$

(34



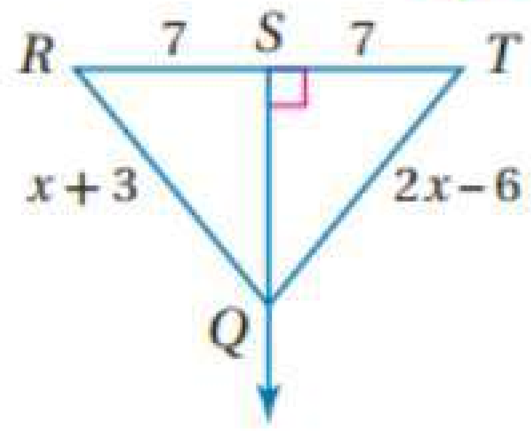
بما أن المثلث DHG متطابق الضلعين و $HF \perp DG$ إذن حسب عكس نظرية العمود المنصف:

$$DF = FG$$

$$DF = 10 \div 2$$

$$DF = 5$$

(35



بما أن $RS = ST$ و $QS \perp RT$ إذن حسب نظرية العمود المنصف

$$QT = QR$$

$$2x - 6 = x + 3$$

$$2x - x = 3 + 6$$

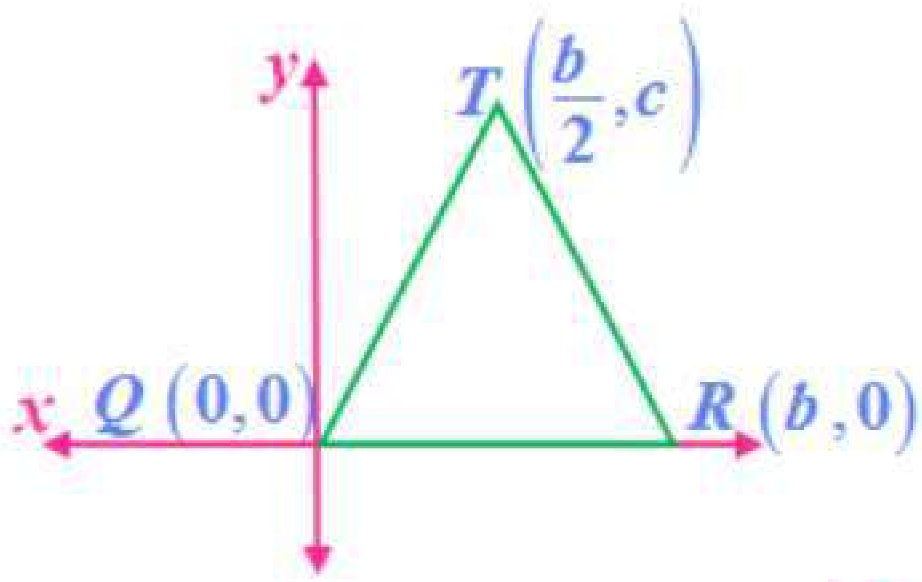
$$x = 9$$

$$TQ = 2x - 6$$

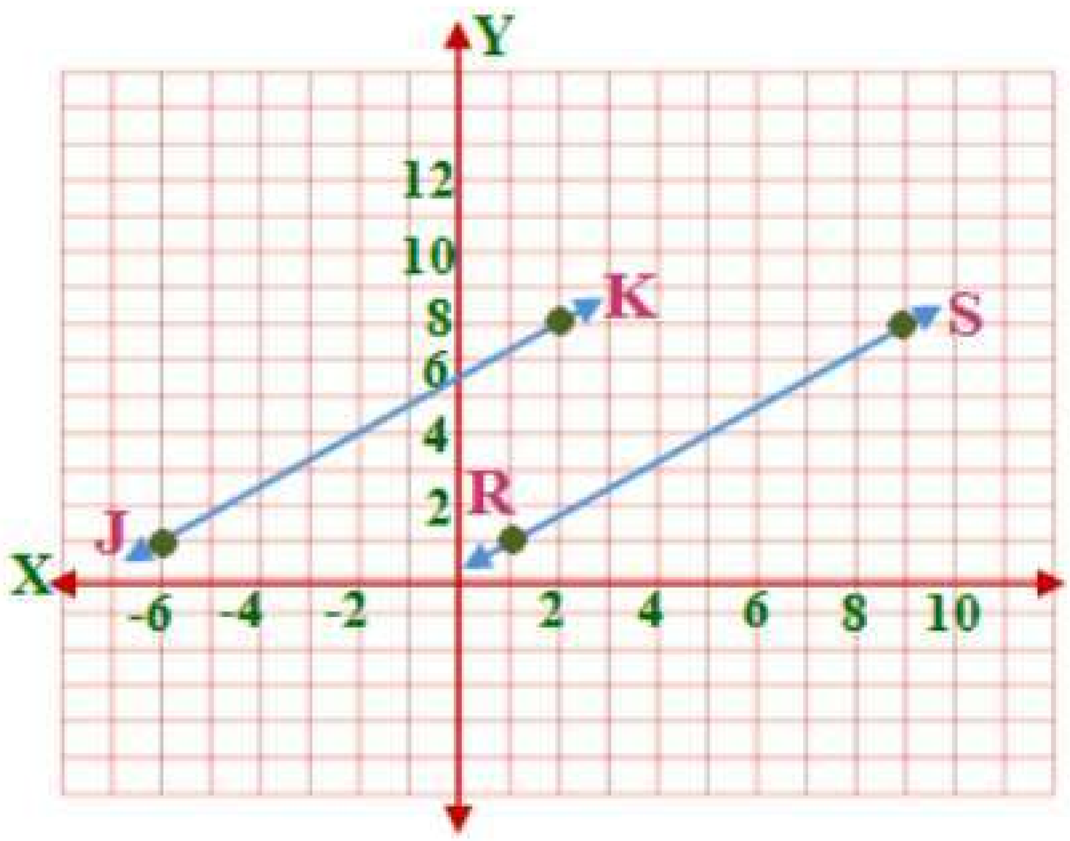
$$TQ = 2 \times 9 - 6$$

$$TQ = 12$$

(36



(37



$R(1,1), S(9,8), J(-6,1), K(2,8)$

أولا حساب ميل $\overleftrightarrow{JK}$:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8-1}{2+6} = \frac{7}{8}$$

ثانيا ميل $\overleftrightarrow{RS}$:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8-1}{9-1} = \frac{7}{8}$$

بما أن ميل كل من $\overleftrightarrow{JK}$ و $\overleftrightarrow{RS}$ متساوي إذن هما متوازيان.

استعد للدرس اللاحق

اكتب > أو < داخل ◯ لتحصل على عبارة صحيحة:

38) $-\frac{18}{25} < \frac{19}{27}$ لأن الطرف الأيمن موجب والطرف الثاني سالب

39)

أولاً توحيد المقامات

$\frac{6}{16} \square \frac{5}{16}$

$\frac{6}{16} > \frac{5}{16}$

$\therefore \frac{3}{8} > \frac{5}{16}$

40)

تحويل الكسر لرقم عشري ومقارنتة بالطرف الأخر

$2.7 \square \frac{3}{5}$

$2.7 \square 0.6$

$2.7 > 0.6$

$\therefore 2.7 > \frac{3}{5}$

41)

$-4.25 \square \frac{-19}{4}$

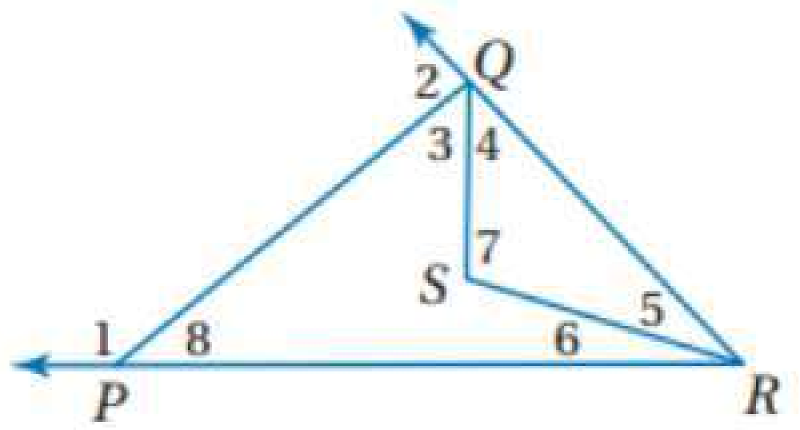
$-4.25 \square -4.75$

$\therefore -4.25 > -4.75$

$-4.25 > \frac{-19}{4}$

4-3 المتباينات في المثلث

تحقق صفحة 228



1A) قياساتها أقل من $m\angle 1$:

حسب نظرية متباينة الزاوية الخارجية:

$$\angle 1 > (\angle 5 + \angle 6)$$

$$\angle 1 > (\angle 3 + \angle 4)$$

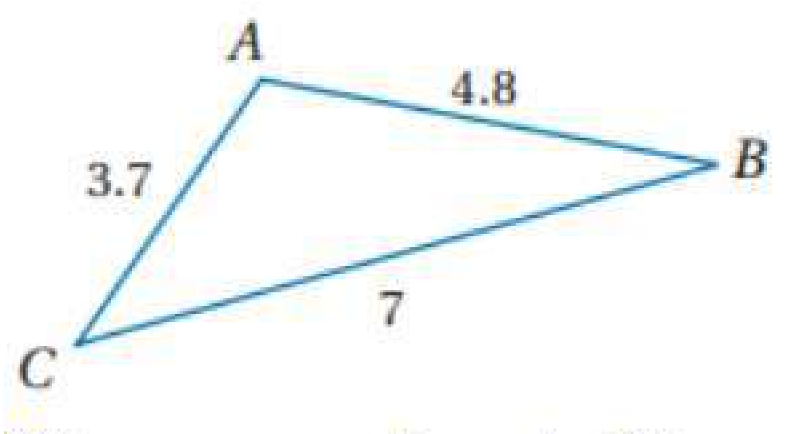
إذن $\angle 3, \angle 4, \angle 5, \angle 6$ قياساتها أقل من $m\angle 1$:

1B) قياساتها أكبرمن $m\angle 8$:

$\angle 2 = \angle 8 + (\angle 5 + \angle 6)$ نظرية الزاوية الخارجة

إذن حسب نظرية متباينة الزاوية الخارجية: $\angle 2 > \angle 8$

تحقق صفحة 229

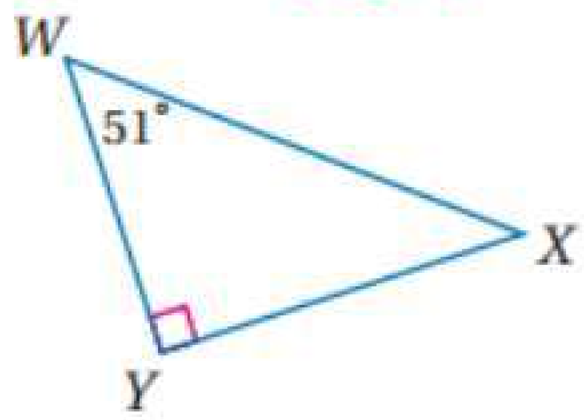


2) الأضلاع بالترتيب من الأقصر إلى الأطول هي : $\overline{AC}, \overline{AB}, \overline{CB}$

الزوايا بالتريب من الأصغر إلى الأكبرهي: $\angle B, \angle C, \angle A$

تحقق صفحة 230

اكتب زوايا المثلث وأضلاعه مرتبة من الأصغر إلى الأكبر:



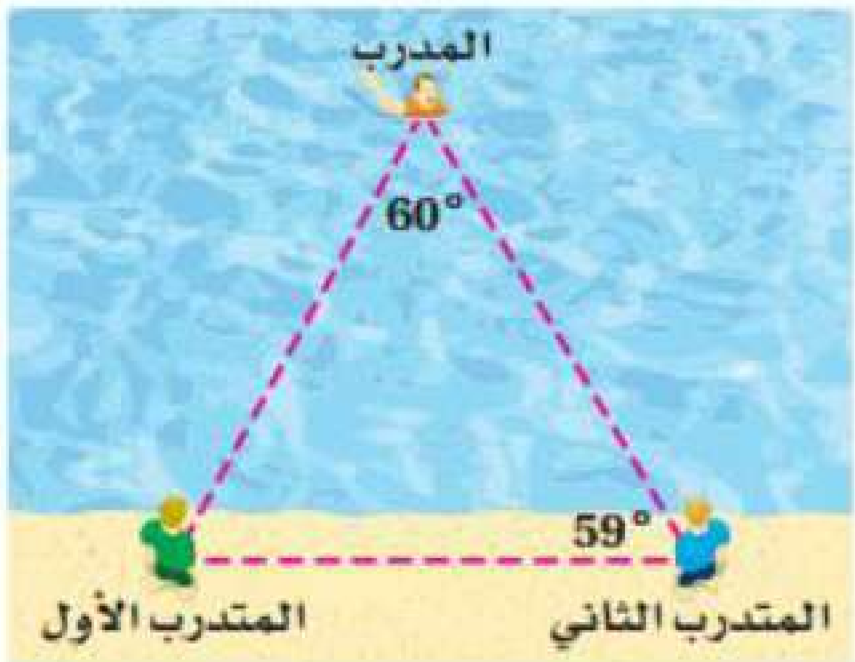
(3

$$\angle X = 180^\circ - \left(51^\circ + 90^\circ\right) = 39^\circ$$

إذن الزوايا هي: $\angle Y , \angle W , \angle X$

الأضلاع بالترتيب هي: $\overline{WX} , \overline{YX} , \overline{WY}$ حسب نظرية ٤,١٠

4) سباحو الإنقاذ:

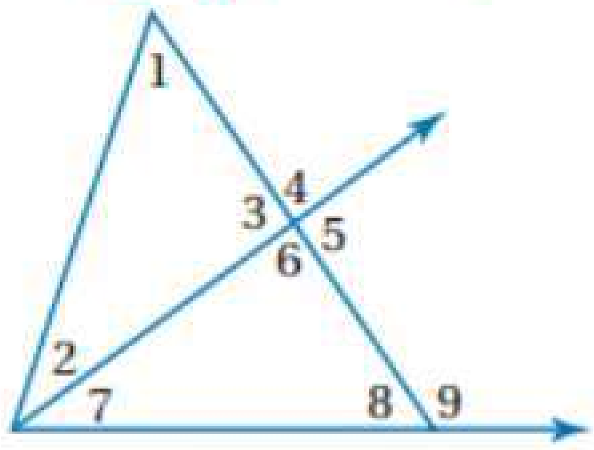


حسب نظرية ٤,١٠:

إذن الضلع المقابل للزاوية 59 أقصر من الضلع المقابل للزاوية ٦١

إذن المتدرب الأول هو الأقرب للمدرب.

استعمل نظرية متباينة الزاوية الخارجية لكتابة جميع الزوايا المرقمة التي تحقق الشرط المعطى في كل مما يأتي: المثال ١



(1

$\angle 2 + \angle 1 = \angle 4$ نظرية الزاوية الخارجة

إذن حسب نظرية متباينة الزاوية الخارجية:

$\angle 4 > \angle 1$

$\angle 4 > \angle 2$

إذن $m\angle 1, m\angle 2$ أقل من $m\angle 4$

(2

حسب نظرية متباينة الزاوية الخارجية:

$\angle 9 > \angle 7$

$\angle 5 > \angle 7$

$\angle 3 > \angle 7$

(3

حسب نظرية متباينة الزاوية الخارجية:

$\angle 9 > \angle 2$

$\angle 6 > \angle 2$

$\angle 4 > \angle 2$

(4

حسب نظرية متباينة الزاوية الخارجية:

$\angle 6 < \angle 7$

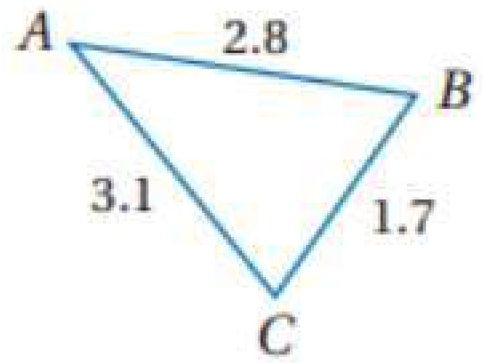
$\angle 7 < \angle 7$

$\angle 2 < \angle 7$

$\angle 1 < \angle 7$

5) اكتب زوايا كل مثلث وأضلاعه مرتبة من الأصغر إلى الأكبر في السؤالين الآتيين:

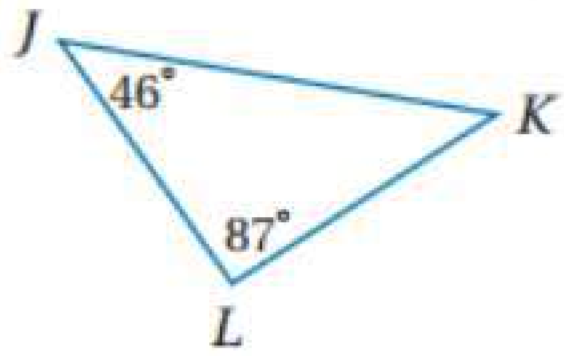
المثالان ٣,2



الأضلاع مرتبة من الأصغر إلى الأكبر: $\overline{BC}, \overline{AB}, \overline{AC}$

وحسب نظرية ٤,٩ الزوايا من الأصغر إلى الأكبر: $m\angle A, m\angle C, m\angle B$

(6



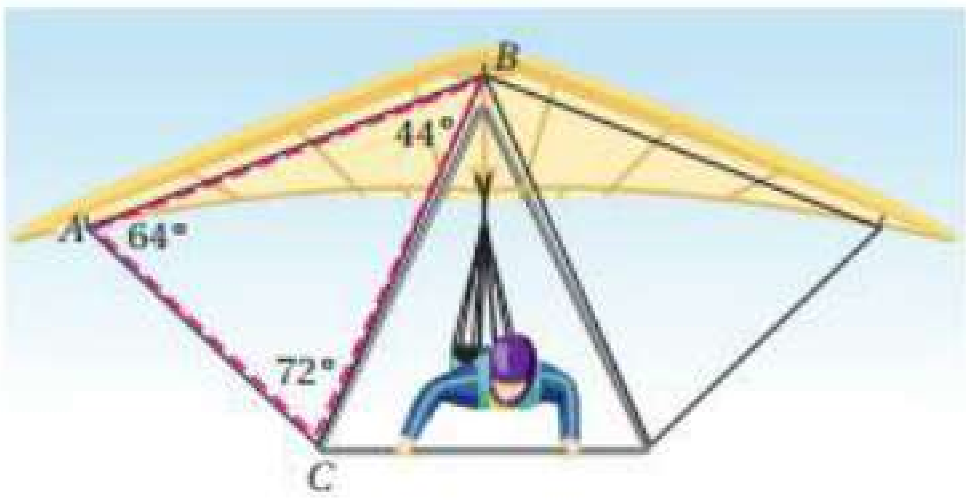
في ΔJLK:

$m\angle K = 180^\circ - (46^\circ + 87^\circ) = 47^\circ$ نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث

الزوايا مرتبة هي: $m\angle J, m\angle K, m\angle L$

حسب نظرية ٤,١٠ : الأضلاع مرتبة هي: $\overline{KL}, \overline{JL}, \overline{JK}$

7) طيران شراعي:



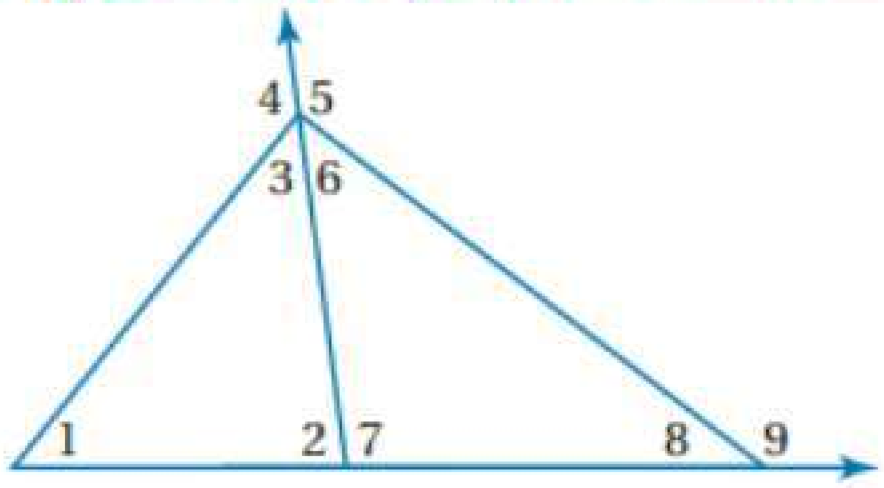
بما أن الزاوية المقابله للضلع $\overline{BC}$ أكبر من

الزاوية المقابله للضلع $\overline{AC}$

إذن حسب نظرية ٤,٩ : $\overline{BC}$ أطول من $\overline{AC}$

تدرب وحل المسائل

استعمل نظرية متباينة الزاوية الخارجية لكتابة جميع الزوايا المرقمة التي تحقق الشرط المعطى في كل مما يأتي: المثال ١



(8

$\angle 4 = \angle 2 + \angle 1$

حسب نظرية متباينة الزاوية الخارجية: $\angle 2 < \angle 4$

(9

حسب نظرية متباينة الزاوية الخارجية:

$\angle 2 < \angle 4$

$\angle 1 < \angle 4$

(10

حسب نظرية متباينة الزاوية الخارجية:

$\angle 1 < \angle 9$

$\angle 3 < \angle 9$

$\angle 6 < \angle 9$

$\angle 7 < \angle 9$

(11

حسب نظرية متباينة الزاوية الخارجية:

$\angle 2 > \angle 9$

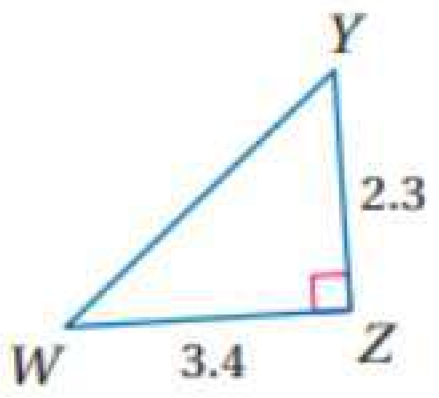
$\angle 4 > \angle 9$

$\angle 5 > \angle 9$

اكتب زوايا كل مثلث وأضلاعه مرتبة من الأصغر إلى الأكبر في السؤالين الآتيين:

المثالان2,٣

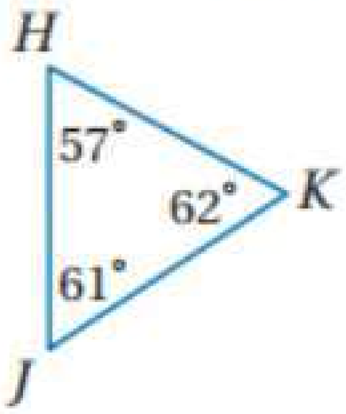
(12



الأضلاع مرتبة: $\overline{WY}$,$\overline{WZ}$,$\overline{YZ}$

وحسب نظرية ٤,٩ : الزوايا مرتبة: $\angle Z$, $\angle Y$, $\angle W$

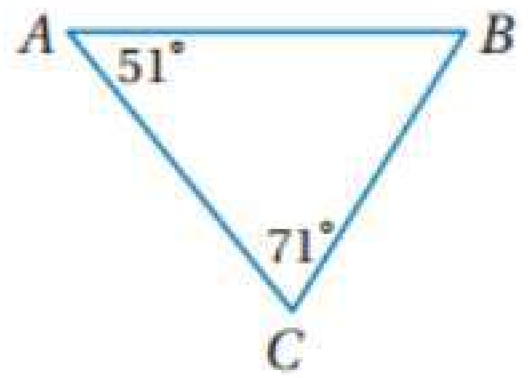
(13



الزوايا مرتبة: $\angle K$, $\angle J$, $\angle H$

وبحسب نظرية ٤,١٠ : الأضلاع مرتبة هي: $\overline{HJ}$,$\overline{HK}$,$\overline{JK}$

(14

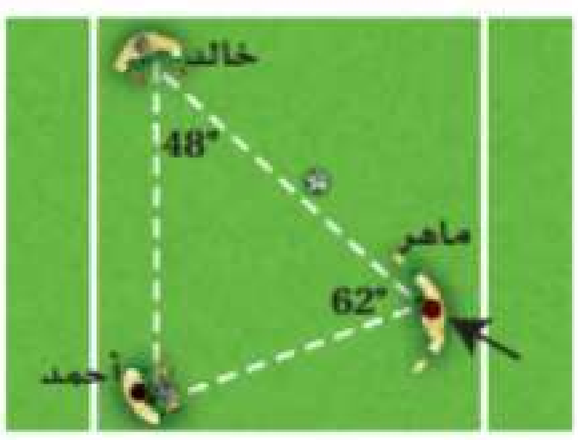


$\angle B = 180^\circ - \left(51^\circ + 71^\circ\right) = 58^\circ$ نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث

الزوايا مرتبة: $\angle C$, $\angle B$, $\angle A$

وبحسب نظرية ٤,١٠ : الأضلاع مرتبة هي: $\overline{AB}$,$\overline{AC}$,$\overline{BC}$

15) كرة قدم:

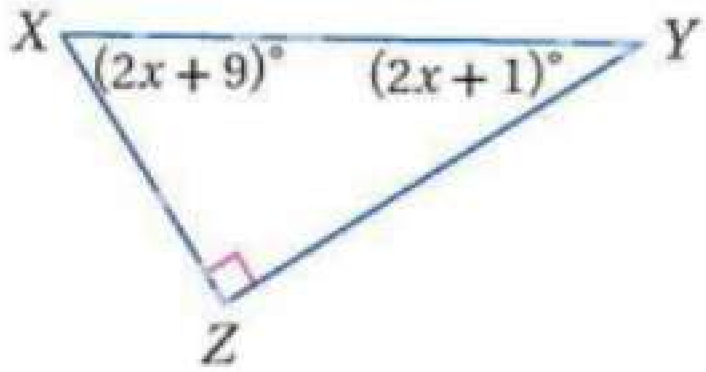


باستعمال نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث فإن قياس الزاوية المقابلة للقطعة المستقيمة من ماهر إلى خالد 70° وبما أن $70 > 48$ فإن المسافة من ماهر إلى أحمد ستكون هي الأقصر وهذا يعني أن ماهر سيختار أحمد ليمرر له الكره.

16) منحدرات:

بما أن $m\angle X = 90^\circ$ فإن $m\angle Y + m\angle Z = 90^\circ$ إذن $m\angle Y < 90^\circ$ بحسب تعريف المتباينة لذا فإن $m\angle X > m\angle Y$ أي أن الضلع الذي يقابل $\angle X$ أطول من الضلع الذي يقابل $\angle Y$. وبما أن $\overline{YZ}$ يقابل $\angle X$ و $\overline{XZ}$ يقابل $\angle Y$ فإن $\overline{YZ} > \overline{XZ}$ وهذا يعني أن السطح العلوي للمنحدر أطول من طول المنحدر.

(17



بما أن $m\angle Z = 90^\circ$ فإن $m\angle X + m\angle Y = 90^\circ$ إذن

$$(2x+1)+(2x+9)=90^\circ$$

$$4x+10=90$$

$$4x=80$$

$$x=20$$

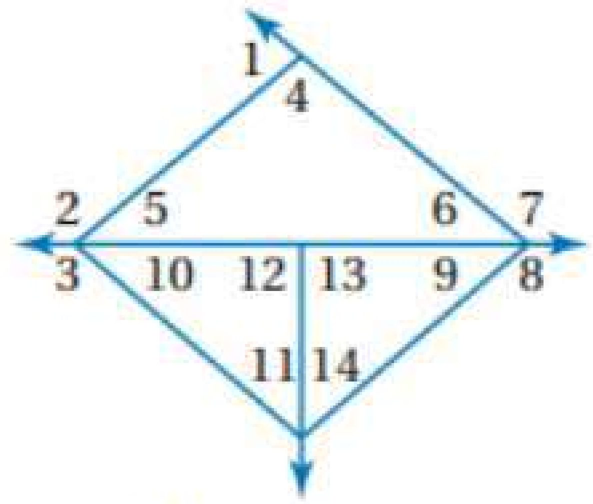
$$\angle Y = 2\times 20+1=41^\circ$$

$$\angle X = 2\times 20+9=49^\circ$$

إذن الزوايا مرتبة: $\angle Z, \angle X, \angle Y$

وبحسب نظرية ٤,١٠: الأضلاع مرتبة هي: $\overline{XY}, \overline{YZ}, \overline{XZ}$

استعمل الشكل المجاور لتحدد الزاوية ذات القياس الأكبر في كل مجموعة مما يأتي:



18) $\angle 1$ هي الأكبر حسب نظرية متباينة الزاوية الخارجية

19) $\angle 2$ هي الأكبر حسب نظرية متباينة الزاوية الخارجية

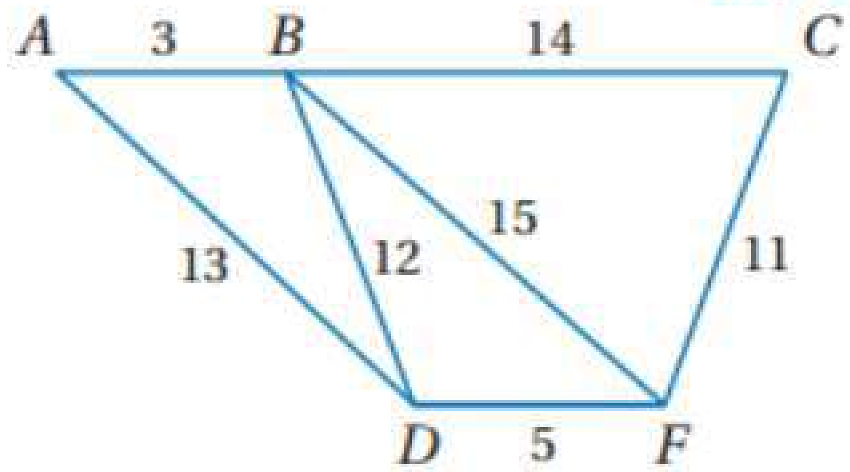
20) $\angle 7$ هي الأكبر حسب نظرية متباينة الزاوية الخارجية

21) $\angle 3$ هي الأكبر حسب نظرية متباينة الزاوية الخارجية

22) $\angle 3$ هي الأكبر حسب نظرية متباينة الزاوية الخارجية

23) $\angle 8$ هي الأكبر حسب نظرية متباينة الزاوية الخارجية

استعمل الشكل المجاور لتحدد العلاقة بين قياسات الزوايا المعطاة في كل من الأسئلة الأتية:



(24

بما أن الضلع المقابل لـ $\angle ABD$ أكبر من الضلع المقابل لـ $\angle BDA$

إذن حسب نظرية ٩، ٤: $m\angle ABD > m\angle BDA$

(25

بما أن الضلع المقابل لـ $m\angle BCF$ أكبر من الضلع المقابل لـ $\angle CFB$

إذن حسب نظرية ٩، ٤: $m\angle BCF > m\angle CFB$

(26

بما أن الضلع المقابل لـ $\angle BFD$ أصغر من الضلع المقابل لـ $\angle BDF$

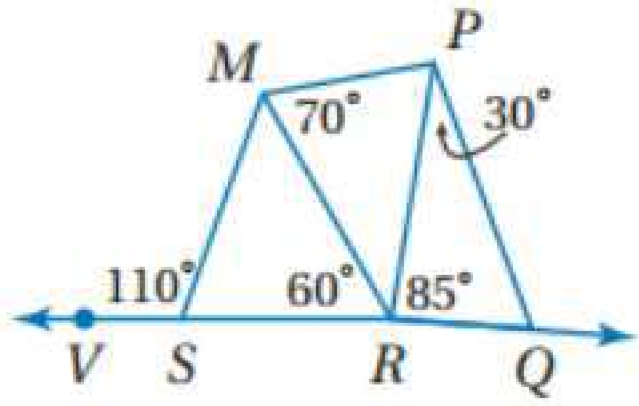
إذن حسب نظرية ٩، ٤: $m\angle BFD < m\angle BDF$

(27

بما أن الضلع المقابل لـ $\angle DBF$ أصغر من الضلع المقابل لـ $\angle BFD$

إذن حسب نظرية ٩، ٤: $m\angle DBF < m\angle BFD$

استعمل الشكل المجاور لتحدد العلاقة بين قياسات الأضلاع المعطاة في كل من الأسئلة الآتية:



(28

بما أن الزاوية المقابلة لـ $\overline{MR} = \left(180^\circ - 110^\circ = 80^\circ\right)$ وهي أكبر من الزاوية المقابلة المقابل لـ $\overline{SM}$ إذن حسب نظرية ١٠,٤: $\overline{MR} > \overline{SM}$

(29

بما أن الزاوية المقابلة لـ $\overline{RP}$ وهي أكبر من الزاوية المقابلة المقابل لـ $\overline{MP}$ التي تساوي ٣٥ حسب نظرية زوايا المتجاورة على مستقيم.

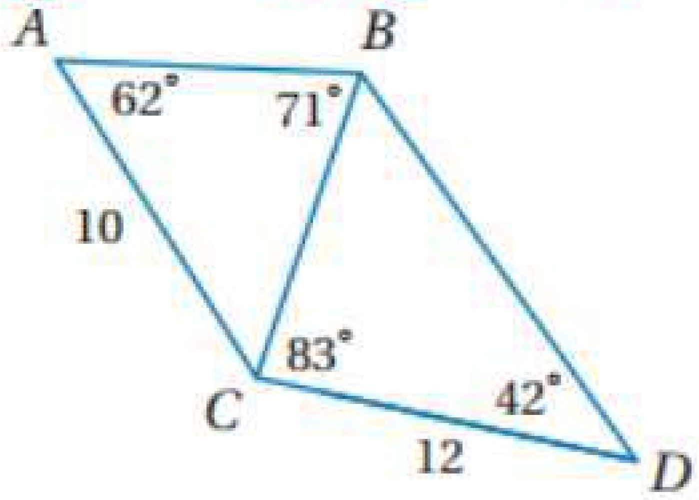
إذن حسب نظرية ١٠,٤: $\overline{RP} > \overline{MP}$

(30

بما أن الزاوية المقابلة لـ $\overline{RQ}$ أصغر من الزاوية المقابلة المقابل لـ $\overline{PQ}$

إذن حسب نظرية ١٠,٤: $\overline{RQ} < \overline{PQ}$

اكتب اضلاع كل مثلث في الشكل المجاور مرتبة من الأقصر إلى الأطول.



(31

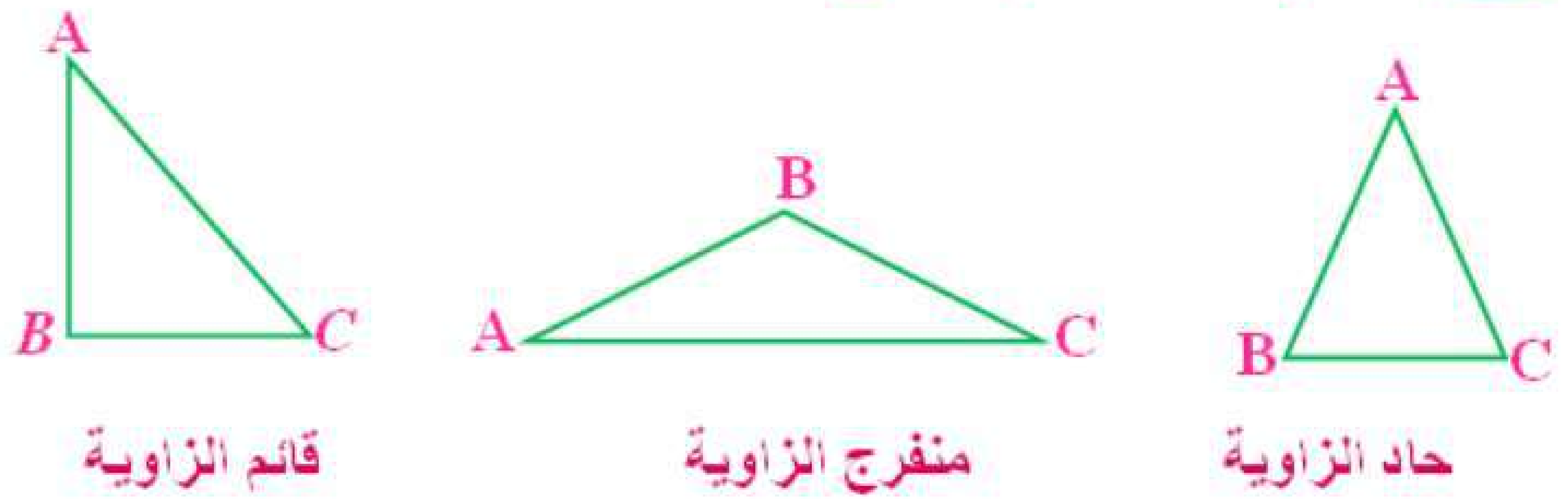
$\angle ACB = 180^\circ - (62 + 71) = 47^\circ$

$\angle CBD = 180^\circ - (83 + 42) = 55^\circ$

في ΔABC يكون $\overline{AB} < \overline{BC} < \overline{AC}$ حسب نظرية ١٠,٤

وفي ΔBCD يكون $\overline{BC} < \overline{CD} < \overline{BD}$ حسب نظرية ١٠,٤

32a) تمثيلات متعددة: هندسياً



32b) جدولياً:

المثلث	AB	BC	$AB+BC$	CA
الحاد	٢	٢,٤	٤,٤	٣,٢
المنفرج	٢,٦	٣,٤	٦,٠	٥,٠
القائم	٢,٧	٢,٨	٥,٥	٣,٩

32c) جدولياً:

المثلث	BC	CA	$BC+CA$	AB
الحاد	٢,٤	٣,٢	٥,٦	٢
المنفرج	٣,٤	٥,٠	٨,٤	٢,٦
القائم	٢,٨	٣,٩	٦,٦	٢,٧

المثلث	AB	CA	$AB+CA$	BC
الحاد	٢	٣,٢	٥,٢	٢,٤
المنفرج	٢,٦	٥,٠	٧,٦	٣,٤
القائم	٢,٧	٣,٩	٦,٥	٢,٨

32d) جبرياً:

$$AB + BC > CA,\ BC + CA > AB,\ AB + CA > BC$$

32e) لفظياً:

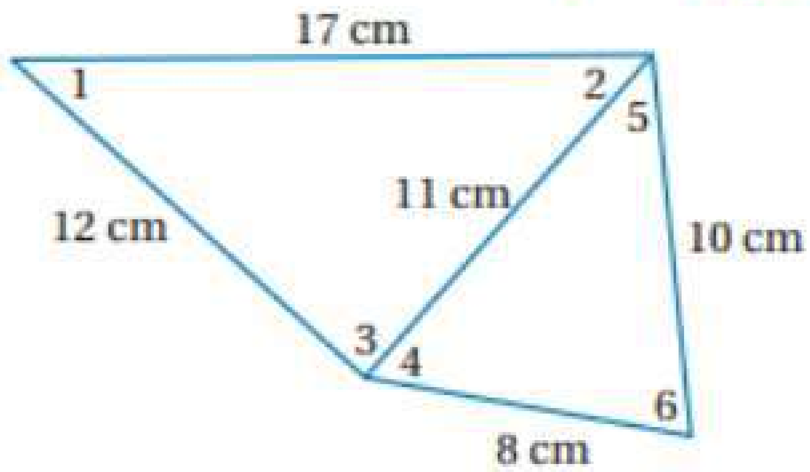
مجموع طولي أي ضلعين في أي مثلث أكبر من طول الضلع الثالث.

مسائل مهارات التفكير العليا

33) تبرير:

أحيانا؛ إذا كان قياسا زاويتي القاعدة أقل من $60°$ فإن القاعدة ستكون الضلع الأطول وإذا كان قياسا زاويتي القاعدة أكبر من $60°$ فإن القاعدة ستكون الضلع الأقصر.

34) تحد:



$m\angle 4, m\angle 6, m\angle 3, m\angle 1\ ; m\angle 2 = m\angle 5$

بما أن الضلع المقابل لـ $\angle 5$ هو أقصر ضلع في المثلث الذي يحتويها

و $m\angle 2 = m\angle 5$ فإن كلا من $m\angle 6, m\angle 4, m\angle 1, m\angle 3$ أكبرمن

$m\angle 5, m\angle 2$

وبما أن الضلع المقابل لـ $\angle 4$ أقصر من الضلع المقابل لـ $\angle 1, \angle 6$

وبما أن الضلع المقابل لـ $\angle 1, \angle 6$ أقصر من الضلع المقابل لـ $\angle 3$ إذن:

$$m\angle 5, m\angle 2 < m\angle 4 < m\angle 1, m\angle 6 < m\angle 3$$

35) اكتب:

بما أن الوتر في المثلث قائم الزاوية يقابل الزاوية القائمة وكلا من الزاويتين الأخريين حادتان دائما فإن الوتر يقابل دائما الزاوية الكبرى في المثلث ولذلك فإنه الضلع الأطول دائما.

تدريب على الاختبار المعياري

36) A منفرج الزاوية ومختلف الأضلاع

بما أن يوجد زاويتين بالمثلث إحداهما ٤٥ والاخرى ٩٢ إذن قياس الزاوية الثالثة:

$$180^\circ - (45+92) = 43^\circ$$

وبما أن المثلث يحتوي على زاوية أكبر من ٩٠ وهي ٩٢ إذن المثلث منفرج الزاوية ومختلف الأضلاع لأن جميع زواياه مختلفة

37) $B : |15|$

مراجعة تراكمية

38)

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-4}{3+2} = \frac{1}{5}$$

ميل المستقيم المعطى $= \frac{1}{5}$

$$-5 \times \left(\frac{1}{5}\right) = -1$$

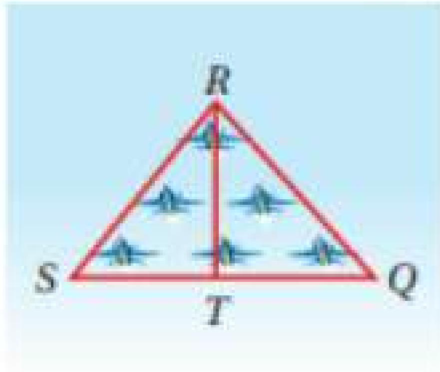
.:ميل المستقيم العمودي $= -5$

نقطة المنتصف: $(0.5, 4.5) = \left(\frac{3+(-2)}{2}, \frac{5+4}{2}\right)$

بكتابة معادلة المستقيم المار بالنقطة $(0.5, 4.5)$ و ميلها -5

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 4.5 = -5(x - 0.5)$$
$$y - 4.5 = -5x + 2.5$$
$$y = -5x + 2.5 + 4.5$$
$$y = -5x + 7$$

39) طائرات:



المعطيات: T نقطة منتصف $\overline{SQ}$.

$\overline{SR} \cong \overline{QR}$

المطلوب: $\Delta SRT \cong \Delta QRT$

البرهان: العبارات (المبررات)

1) T نقطة منتصف $\overline{SQ}$ (معطى).

2) $\overline{ST} \cong \overline{TQ}$ (تعريف نقطة المنتصف)

3) $\overline{SR} \cong \overline{QR}$ (معطى)

4) $\overline{RT} \cong \overline{RT}$ (خاصية الانعكاس)

5) $\Delta SRT \cong \Delta QRT$ (SSS)

استعد للدرس اللاحق

(40

$$z(x - y) = 3(8 - 2) = 3 \times 6 = 18$$

$z(x - y) = 13$ عبارة خاطئة

(41

$$2x = 3yz$$

$$2 \times 8 = 3 \times 2 \times 3$$

$$16 = 18 \; ✗$$

إذن $2x = 3yz$ عبارة خاطئة

(42

$$x + y > z + y$$

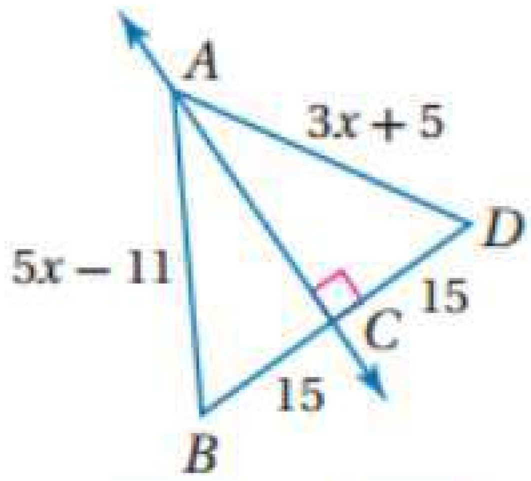
$$8 + 2 > 3 + 2 \rightarrow 10 > 5$$

إذن $x + y > z + y$ عبارة صحيحة

اختبار منتصف الفصل الرابع

أوجد كل من القياسين الآتيين:

AB (1



بما أن $\overline{BD} \perp \overline{AC}$ و C نقطة منتصف

إذن حسب نظرية العمود المنصف:

$$\overline{AD} = \overline{AB}$$

$$3x + 5 = 5x - 11$$

$$5x - 3x = 5 + 11$$

$$2x = 16$$

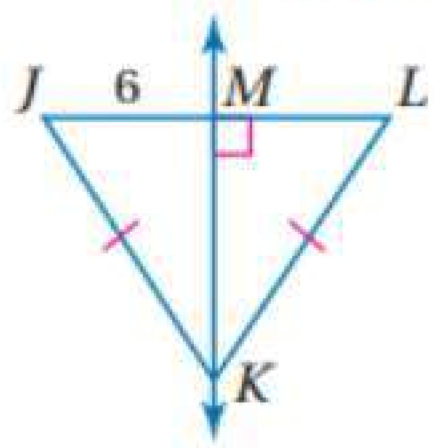
$$x = 8$$

$$AB = 5x - 11$$

$$AB = 5 \times 8 - 11$$

$$AB = 29$$

JL (2



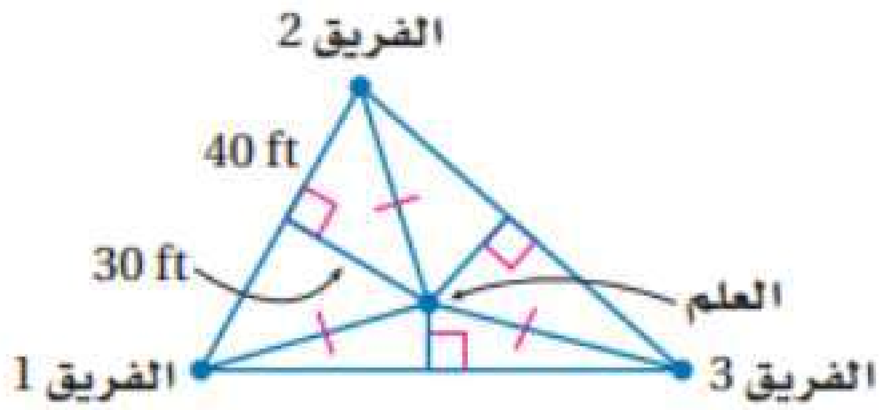
بما أن $\overline{JL} \perp \overline{KM}$ و $KL = KJ$

إذن حسب عكس نظرية العمود المنصف: $ML = MJ = 6$

$$JL = ML + MJ$$

$$JL = 6 + 6 = 12$$

3) مخيم:



باستعمال نظرية فيثاغورث:

$$(40)^2 + (30)^2 = (D)^2$$

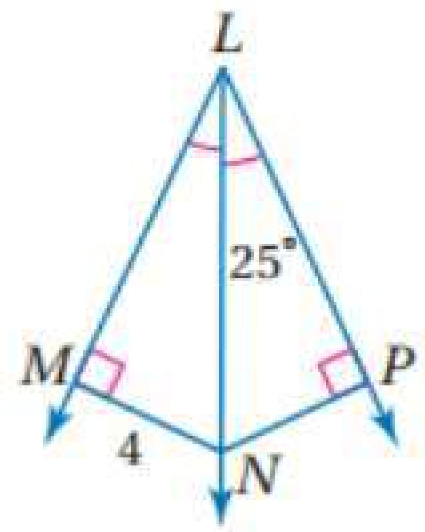
$$1600 + 900 = (D)^2$$

$$D = \sqrt{2500} = 50$$

إذن المسافة بين العلم وكل فريق = $50ft$

أوجد كل من القياسين الآتيين:

(4



$$\angle LNP = 180^\circ - (25 + 90) = 65^\circ$$

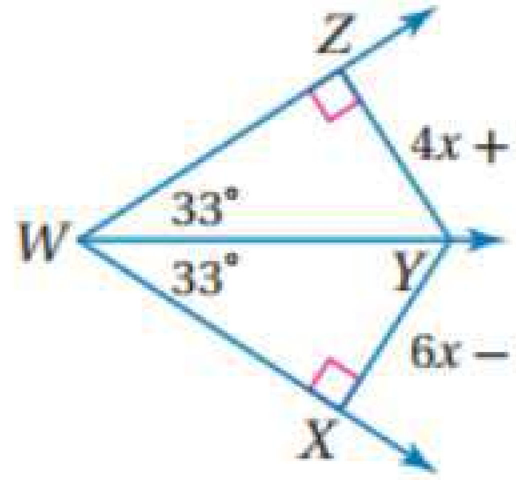
$$\because \angle PLN = \angle MLN$$

$$\therefore \angle MNL = 180^\circ - (25 + 90) = 65^\circ$$

$$\therefore \angle MNP = 65 + 65$$

$$\therefore \angle MNP = 130^\circ$$

5)



بما أن $\overline{WX} \perp \overline{YX}, \overline{WZ} \perp \overline{YZ}$ و $\overrightarrow{WY}$ ينصف $\angle ZWX$

إذن حسب نظرية منصف الزاوية:

$$\overline{YZ} = \overline{YX}$$

$$4x + 5 = 6x - 3$$

$$6x - 4x = 5 + 3$$

$$2x = 8$$

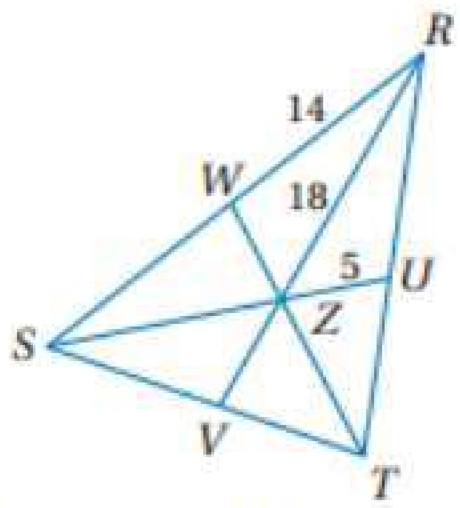
$$x = 4$$

$$\overline{XY} = 6x - 3$$

$$\overline{XY} = 6 \times 4 - 3$$

$$\overline{XY} = 21$$

أوجد كل من الأطوال الآتية:



6) بما أن Z مركز ΔRST إذن:

$$RZ = \frac{2}{3} RV$$

$$18 = \frac{2}{3} RV$$

$$RV = 27$$

$$ZV = RV - RZ$$
$$ZV = 27 - 18$$
$$ZV = 9$$

(7

$$SZ = \frac{2}{3}SU$$
$$SZ = \frac{2}{3}(SZ + ZU)$$
$$SZ = \frac{2}{3}SZ + \frac{2}{3}ZU$$
$$SZ - \frac{2}{3}SZ = \frac{2}{3} \times 5$$
$$\frac{1}{3}SZ = \frac{10}{3}$$
$$SZ = 10$$

(8

حسب نظرية مركز المثلث:

$$WR = WS = 14$$
$$SR = WR + WS$$
$$SR = 14 + 14 = 28$$

9) هندسة إحداثية:

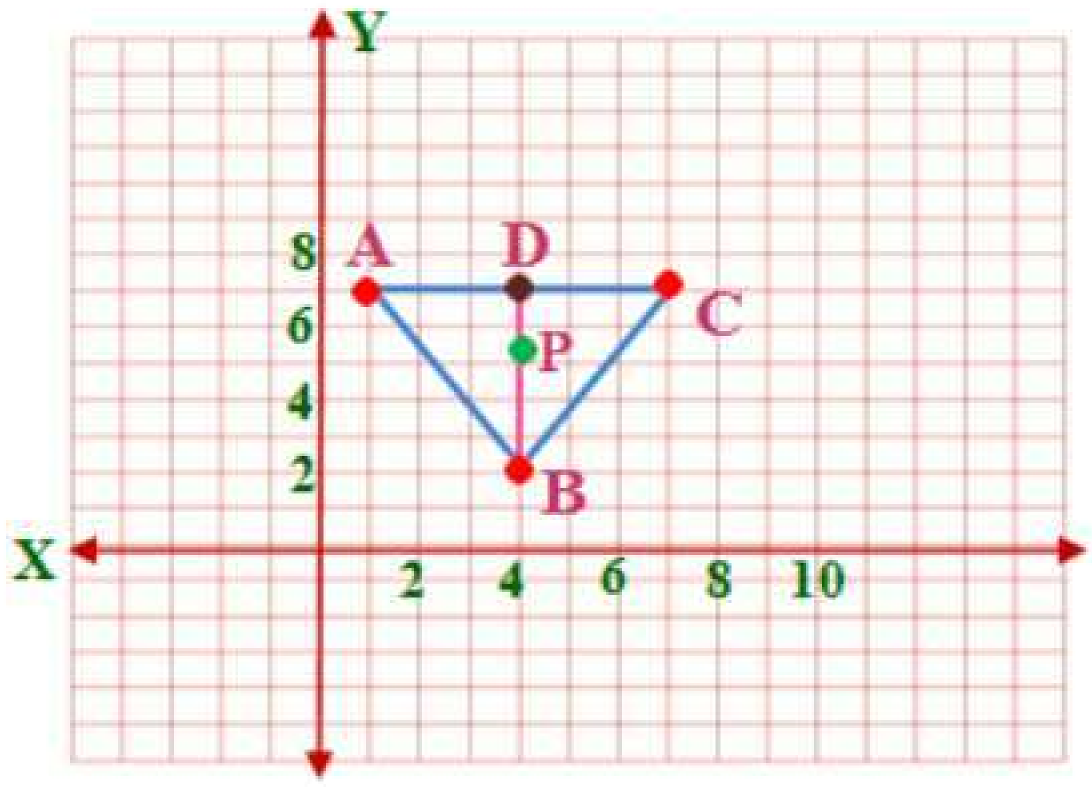
ايجاد نقطة المنتصف للنقطة D للضلع $\overline{AC}$

$$A(1,7), C(7,7)$$
$$D\left(\frac{7+1}{2}, \frac{7+7}{2}\right) = D(4,7)$$

المسافة من $D(4,7)$ إلى $B(4,2)$ تساوي $7-2$ أي 5 وحدات.

واذا كانت P هي مركز ΔABC فإن $BP = \frac{2}{3}BD$ ولذلك يقع المركز على بعد

$-5 \times \frac{2}{3}$ أو $\frac{-10}{3}$ وحدة وتكون احداثيات مركز المثلث P هي $\left(4, 2+\frac{10}{3}\right)$ أو $\left(4, \frac{16}{3}\right)$



(10

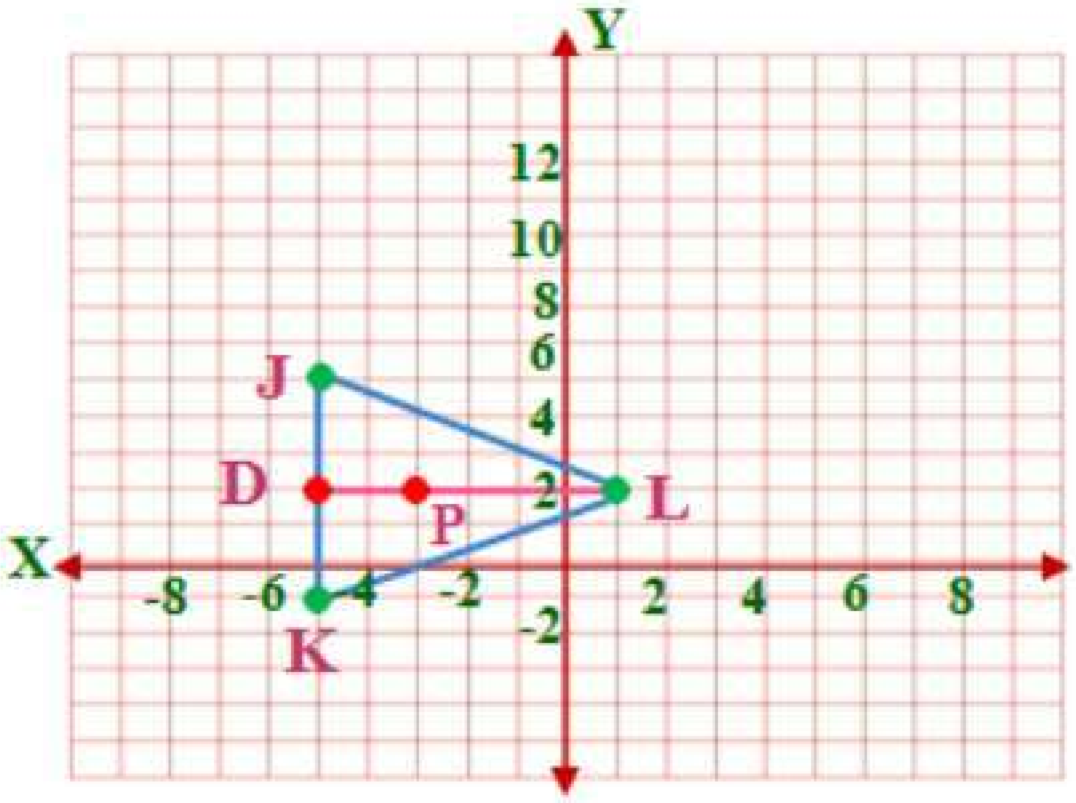
ايجاد نقطة المنتصف للنقطة D للضلع $\overline{JK}$

$J(-5,5), K(-5,-1)$

$D\left(\frac{-5-5}{2}, \frac{5-1}{2}\right) = D(-5,2)$

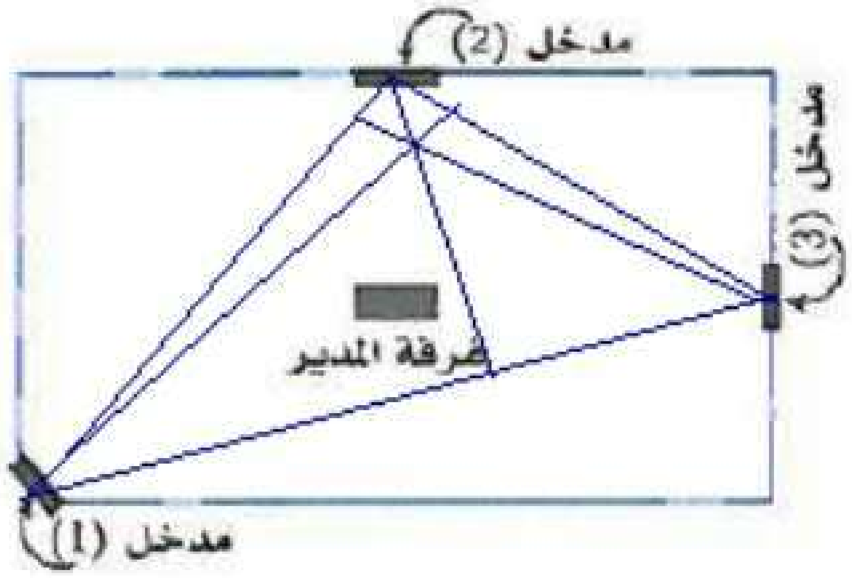
المسافة من $D(-5,2)$ إلى $L(1,2)$ تساوي $1-(-5)$ أي ٦ وحدات.

واذا كانت P هي مركز ΔJKL فإن $LP = \frac{2}{3}LD$ ولذلك يقع المركز على بعد $6 \times \frac{2}{3}$ أو ٤ وحدة إلى اليمين من L وتكون احداثيات مركز المثلث P هي $(1-4, 2)$ أو $(-3, 2)$



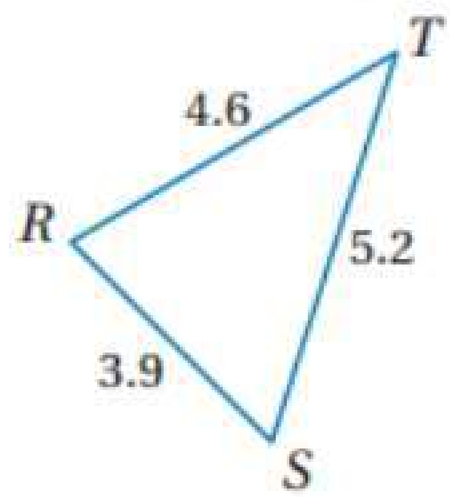
١١) تصميم هندسي:

الثلاث مداخل يكونون مثلث ارتفاعات المثلث تتلاقى في نقطة واحدة نقطة التقاطع لا تنصف الارتفاعات اذن غرفة المدير لا تقع على نقطة التقاء ارتفاعات المثلث



اكتب زوايا كل مثلث وأضلاعه مرتبة من الأصغر إلى الأكبرفي السؤالين الآتيين:

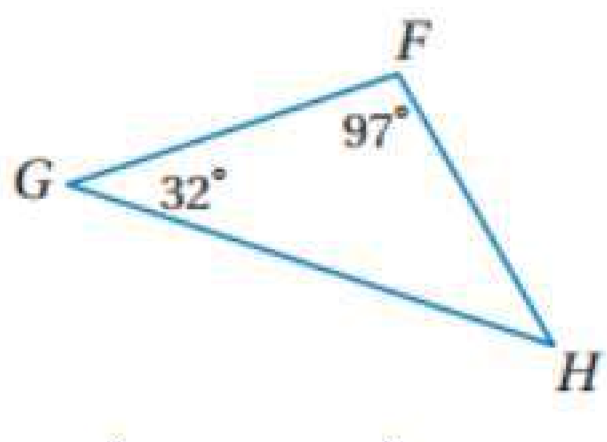
(12



الأضلاع المرتبة: $\overline{RS}, \overline{RT}, \overline{ST}$

وحسب نظرية ٤,٩ إذن الزوايا المرتبة هي $\angle T, \angle S, \angle R$

(13



$\angle H = 180^\circ - (32 + 97) = 51^\circ$ نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث

الزوايا مرتبة: $\angle G, \angle H, \angle F$

وحسب نظرية ٤,١٠ إذن الأضلاع مرتبة: $\overline{FH}, \overline{GF}, \overline{GH}$

14a) مسافات:

$$\angle C + \angle A + \angle B = 180$$

$$70 + \frac{2}{3}\angle B + \angle B = 180$$

$$70 + \frac{5}{3}\angle B = 180$$

$$\frac{5}{3}\angle B = 180 - 70$$

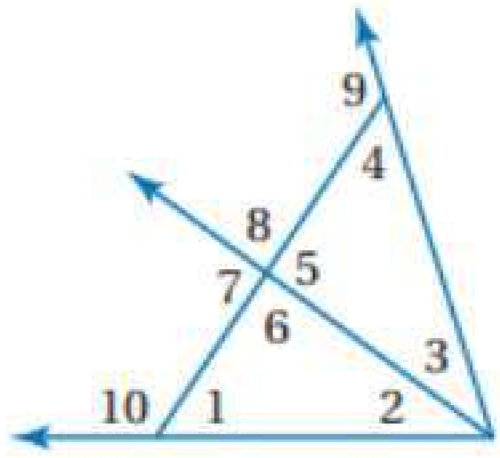
$$\frac{5}{3}\angle B = 110$$

$$\angle B = 66^\circ$$

$$\angle A = 180 - (70 + 66)$$

$$\angle A = 44^\circ$$

14b) بحسب نظرية ٤,١٠ إذن ترتيب الأضلاع: $\overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AB}$



(15

$$\angle 8 = \angle 4 + \angle 3$$

حسب نظرية متباينة الزاوية الخارجية: $\angle 3, \angle 4$ أقل من $\angle 8$

(16

حسب نظرية متباينة الزاوية الخارجية: $\angle 8, \angle 6, \angle 9$ أكبر من $\angle 3$

(17

حسب نظرية متباينة الزاوية الخارجية: $\angle 2, \angle 6, \angle 3, \angle 4$ أقل من $\angle 10$

٤-٤ البرهان غير المباشر

تحقق صفحة 235

1A) الإفتراض هو: $x \leq 5$

1B) الإفتراض هو: النقاط L, K, J لا تقع على استقامة واحدة

1C) الإفتراض هو: ΔXYZ ليس متطابق الأضلاع

تحقق صفحة 236

اكتب برهانا غير مباشر لكل من العبارتين الآتيتين:

2A)

المعطيات: $7x > 56$

المطلوب: $x > 8$

برهان غير مباشر:

الخطوة ١: افرض أن $x < 8$ أو $x = 8$

الخطوة ٢:

x	٤	٥	٦	٧	٨
$7x$	٢٨	٣٥	٤٢	٤٩	٥٦

عندما تكون $x < 8$ فإن $7x < 56$ وعندما تكون $x = 8$ فإن $7x = 56$

الخطوة : يؤدي الفرض في الحالتين إلى تناقض مع المعلومة المعطاة $7x > 56$. لذلك فالفرض بأن $x \leq 8$ خطأ والنتيجة الأصلية بأن $x > 8$ صحيحة بالتأكيد.

(2B

المعطيات: $-c > 0$

المطلوب: إثبات أن $c < 0$

برهان غير مباشر:

الخطوة ١: افرض أن $c > 0$ أو $c = 0$

الخطوة ٢:

c	٠	١	٢	٣	٤
$-c$	٠	-1	-2	-3	-4

إذا كانت $c > 0$ فإن $-c < 0$ وإذا كانت $c = 0$ فإن $-c = 0$

الخطوة ٣: يؤدي الفرض في الحالتين إلى تناقض مع المعلومة المعطاه $-c > 0$ لذلك فالفرض بأن $c \geq 0$ خطأ والنتيجة الأصلية بأن $c < 0$ صحيحة وبما أن $c < 0$ صحيحة فإن c عدد سالب بالتأكيد.

3) رحلة:

افرض أن x هي المسافة المقطوعة في المرحلة الأولى من رحلته، y هي المسافة المقطوعة في المرحلة الثانية، z هي المسافة المقطوعة في المرحلة الثالثة.

المعطيات: $x + y + z > 360$

المطلوب: $x > 120$ أو $y > 120$ أو $z > 120$.

برهان غير مباشر:

الخطوة١: افرض أن $x \leq 120, y \leq 120, z \leq 120$.

الخطوة٢: إذا كانت $x \leq 120, y \leq 120, z \leq 120$ فإن

$x + y + z \leq 120 + 120 + 120$ أو $x + y + z \leq 360$

الخطوة ٣: وهذا يناقض العبارة المعطاة لذلك فالفرض خطأ والنتيجة الأصلية أن $x > 120$ أو $y > 120$ أو $z > 120$. أي أنه قطع أكثر من $120km$ في مرحلة واحدة على الأقل من رحلته.

تحقق صفحة 237

(4

المعطيات: x^2 عدد صحيح فردي.

المطلوب: x عدد فردي.

برهان غير مباشر:

الخطوة ١: افرض أن x عدد زوجي. وهذا يعني أن $x = 2k$ حيث k عدد صحيح.

الخطوة٢: $x^2 = (2k)^2$ بتعويض الفرض

$= 4k^2$ بالتبسيط

$= (2 \times 2)k^2$ بالتحليل

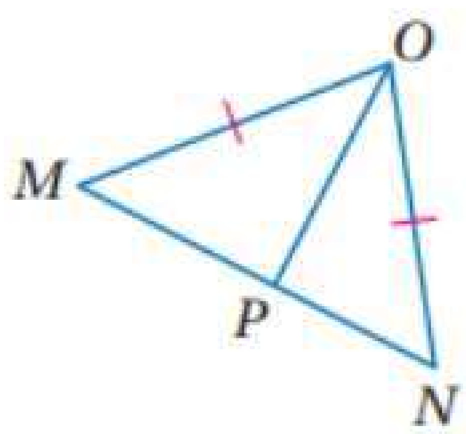
$= 2(2k^2)$ خاصية التجميع للضرب

وبما أن k عدد صحيح فإن $2k^2$ عدد صحيح أيضا. وليكن m يمثل العدد الصحيح $2k^2$ فإنه يمكن تمثيل x^2 بالعدد $2m$ حيث m عدد صحيح وهذا يعني أن x^2 عدد زوجي ولكن هذا يناقض العبارة المعطاة بأن x^2 عدد فردي.

الخطوة ٣: بما أن الفرض: x عدد زوجي أدى إلى تناقض مع المعطيات فإن النتيجة الأصلية بأن x عدد فردي صحيحة بالتأكيد.

تحقق صفحة 238

(5



المعطيات: $\overline{MO} \cong \overline{ON}, \overline{MP} \ncong \overline{NP}$

المطلوب: $\angle MOP \ncong \angle NOP$

برهان غير مباشر:

الخطوة 1: نفرض أن $\angle MOP \cong \angle NOP$

الخطوة 2: تعلم أن $\overline{MO} \cong \overline{ON}$ وأن $\overline{OP} \cong \overline{OP}$ حسب خاصية الانعكاس.

وإذا كانت $\angle MOP \cong \angle NOP$

فإن $\Delta MOP \cong \Delta NOP$ حسب SAS.

ويكون $\overline{MP} \cong \overline{NP}$ لأن العناصر المتطابقة في المثلثين المتطابقين تكون متطابقة.

الخطوة 3: $\overline{MP} \cong \overline{NP}$ تناقض المعلومة المعطاه.لذلك فالفرض خطأ إذن

$\angle MOP \ncong \angle NOP$

اكتب الأفتراض الذي تبدأ به برهانا غير مباشر لكل عبارة مما يأتي: المثال١

1) $\overline{AB} \ncong \overline{CD}$

2) ΔXYZ متطابق الضلعين أو متطابق الأضلاع.

3) إذا كان $4x < 24$، فإن $x \geq 6$

4) $\angle A$ زاوية قائمة

اكتب برهان غير مباشر لكل من العبارتين الآتيتين: المثال٢

5) إذا كان $2x + 3 < 7$، فإن $x < 2$

المعطيات: $2x + 3 < 7$

المطلوب: $x < 2$

البرهان غير المباشر:

الخطوة ١: افرض أن $x > 2$ أو $x = 2$ صحيحة.

الخطوة ٢:

x	٢	٣	٤	٥	٦
$2x+3$	٧	٩	١١	١٣	١٥

عندما تكون $x > 2$ فإن $2x + 3 > 7$ وعندما تكون $x = 2$ فإن $2x + 3 = 7$.

الخطوة ٣: يؤدي الفرض في الحالتين إلى تناقض مع المعلومة المعطاة بأن

$2x + 3 < 7$ لذلك فالفرض بأن $x \geq 2$ خطأ. والنتيجة الأصلية بأن $x < 2$ صحيحة بالتأكيد.

6) إذا كان $3x - 4 > 8$ ، فإن $x > 4$

المعطيات: $3x - 4 > 8$

المطلوب: $x > 4$

برهان غير مباشر:

الخطوة١: افرض أن $x < 4$ أو $x = 4$ صحيحة.

الخطوة٢:

x	٠	١	٢	٣	٤
$3x - 4$	-4	-1	٢	٥	٨

عندما $x < 4$ فإن $3x - 4 < 8$ وعندما $x = 4$ فإن $3x - 4 = 8$.

الخطوة٣: يؤدي الفرض في الحالتين إلى تناقض مع المعلومة المعطاة بأن $3x - 4 > 8$ لذلك فالفرض بأن $x \leq 4$ خطأ. والنتيجة الأصلية بأن $x > 4$ صحيحة بالتأكيد.

7) كرة قدم: المثال٣

أفرض أن المتوسط يساوي a هدفا

برهان غير مباشر:

الخطوة ١: افرض أن متوسط عدد الأهداف التي سجلها فهد في كل مباراة كان أكبر من أو يساوي ٣، أي $a \geq 3$.

الخطوة٢: الحالة ١ الحالة ٢

الحالة ١	الحالة ٢
$a = 3$	$a > 3$
$\frac{13}{6} \stackrel{?}{=} 3$	$\frac{13}{6} > ?3$
$2.2 \neq 3$	$2.2 \not> 3$

الخطوة ٣: النتائج ليست صحيحة لذلك فالفرض خطأ. إذن فمتوسط عدد الأهداف التي سجلها فهد في كل مباراة أقل من ٣ أهداف.

(8

المعطيات: $5x-2$ عدد فردي.

المطلوب: x عدد فردي.

برهان غير مباشر:

الخطوة ١: افرض أن x عددا ليس فرديا. أي أفرض أ ن x عدد زوجي.

الخطوة ٢: ليكن $x=2k$ حيث k عدد صحيح.

$5x-2=5(2k)-2$ بتعويض الفرض.

$=10k-2$ خاصية الضرب.

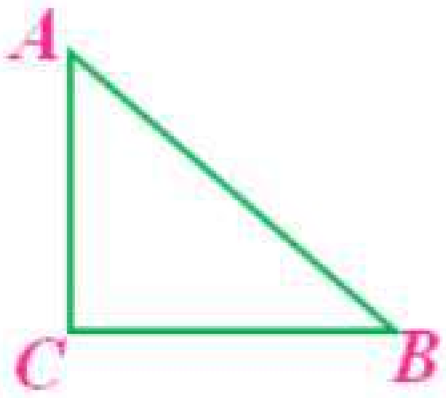
$=2(5k-1)$ خاصية التوزيع.

وبما أن k عدد صحيح فإن $5k-1=$ عدد صحيح أيضا. افرض أن p يمثل العدد $5k-1$ فيمكن تمثيل $5x-2$ بـ $2p$، حيث p عدد صحيح وهذا يعني أن $5x-2$ عدد صحيح زوجي ولكن هذا يناقض المعطيات بأن $5x-2$ عدد فردي.

الخطوة٣: بما أن الفرض بأن x عدد زوجي أدى إلى تناقض مع المعطيات فإن النتيجة الأصلية بأن x عدد فردي نتيجة صحيحة.

اكتب برهانا غير مباشر لكل عبارة من العبارات الآتية:

(9



المعطيات: ABC مثلث قائم الزاوية؛ $\angle C$ زاوية قائمة.

المطلوب: $AB>AC$ و $AB>BC$

برهان غير مباشر:

الخطوة ١: أفرض أن وتر المثلث القائم الزاوية ليس الضلع الأطول أي أن $AB<AC$ و $AB<BC$

الخطوة ٢: إذا كان $AB<BC$ فإن $m\angle C<m\angle A$. وبما أن $m\angle C=90$، فإن $m\angle A>90$ إذن $m\angle C+m\angle A>180$ وبالتبرير نفسه $m\angle C+m\angle B>180$

الخطوة ٣: كلا العلاقتين تناقضان الحقيقة بأن مجموع قياسات زوايا المثلث يساوي $180°$. لذلك فالوتر هو أطول أضلاع المثلث قائم الزاوية.

(10

المعطيات: $\angle A$, $\angle B$ متكاملتان

المطلوب: $\angle A$, $\angle B$ لا يمكن أن تكونا منفرجتين معا.

برهان غير مباشر:

الخطوة١: أفرض أن $\angle A$, $\angle B$ كلاهما زاوية منفرجة.

الخطوة 2: من تعريف الزاوية المنفرجة $m\angle A > 90$ و $m\angle B > 90$ لذلك

$$m\angle A + m\angle B > 180^\circ$$

الخطوة ٣: وهذا يناقض المعلومة المعطاة بأن $m\angle A + m\angle B = 180^\circ$ لذلك

فالنتيجة الأصلية بأن $\angle A$, $\angle B$ لا يمكن أن يكونا منفرجتين معا صحيحة بالتأكيد.

تدرب وحل المسائل

اكتب الافتراض الذي تبدأ به برهاناً غير مباشر لكل عبارة مما يأتي: المثال١

11) اذا كان $2x > 16$، فإن $x \le 8$

12) $\angle 1, \angle 2$ زاويتان متكاملتان

13) إذا كان ميلا مستقيمان متساويين فإنهما غير متوازيين.

14) العدد الفردي يقبل القسمة على 2.

اكتب برهانا غير مباشر لكل مما يأتي: المثال٢

(15

المعطيات: $-3x + 4 < 7$

المطلوب: $x > -1$

برهان غير مباشر: الخطوة ١: افرض أن $x \le -1$ صحيحة.

الخطوة ٢:

x	-5	-4	-3	-2	-1
$-3x + 4$	١٩	١٦	١٣	١٠	٧

عندما تكون $x < -1$ فإن $-3x + 4 > 7$ عندما تكون $x = -1$ فإن $-3x + 4 = 7$

الخطوة ٣: يؤدي الفرض في الحالتين إلى تناقض مع المعلومة المعطاة بأن

$-3x + 4 < 7$ لذلك فالفرض بأن $x \le -1$ خطأ والنتيجة الأصلية بأن $x > -1$

صحيحة بالتأكيد.

16)

المعطيات: $-2x-6>12$

المطلوب: $x<-9$

برهان غير مباشر:

الخطوة ١: أفرض أن $x \geq -9$ صحيحة.

خطوة ٢:

x	-9	-8	-7	-6	-5
$-2x-6$	١٢	١٠	٨	٦	٤

عندما تكون $x>-9$ فإن $-2x-6<12$ وعندما تكون $x=-9$ فإن $-2x-6=12$

الخطوة ٣: يؤدي الفرض في الحالتين إلى تناقض مع المعلومة المعطاة بأن $-2x-6>12$ لذلك فالفرض بأن $x \geq -9$ خطأ والنتيجة الأصلية بأن $x<-9$ صحيحة بالتأكيد.

17) العاب حاسوب: المثال٣

أفرض أن ثمن إحدى الألعاب x والأخرى y.

الخطوة 1: المعطيات: $x+y>400$

المطلوب: $x>200$ أو $y>200$

برهان غير مباشر:

افرض أن $x \leq 200$ و $y \leq 200$

الخطوة 2: إذا كانت $x \leq 200$ و $y \leq 200$ فإن:

$x+y \leq 200+200$ أو $x+y \leq 400$ وهذا يناقض الفرض $x+y>400$.

الخطوة 3: بما أن الفرض $x \leq 200$ و $x \leq 200$ أدى إلى تناقض مع حقيقة معلومة فإن هذا الفرض خطأ لذلك فالنتيجة بأن $x>200$ أو $y>200$ ستكون صحيحة أي أن ثمن لعبة واحدة من اللعبتين على الأقل أكبر من 200 ريال.

18) جمع التبرعات:

الخطوة 1: أفرض أنه بيع أقل من 150 تذكرة للكبار.

الخطوة ٢: إذا بيع ١٤٩ تذكرة للكبار فسيكون:

عدد تذاكر الأطفال التي بيعت = ٣٧٥ ـ ١٤٩ = ٢٢٦ تذكرة والثمن الكلي لبيع ١٤٩ تذكرة للكبار و٢٢٦ تذكرة للأطفال = ١٢,٥ × ٢٢٦ + ٣٠ × ١٤٩ = ٧٢٩٥

الخطوة ٣: بما أن النتيجة خطأ فإن الفرض خطأ إذاً عدد تذاكر الكبار التي بيعت ≥ ١٥٠ تذكرة.

اكتب برهاناً غير مباشر لكل مما يأتي: المثالان٤,٣

١٩)

المعطيات: xy عدد صحيح فردي.

المطلوب: كلا من x و y عدد صحيح فردي.

برهان غير مباشر:

الخطوة١: أفرض أن x و y عددان ليسا فرديين معا. أي افرض أن x أو y عدد زوجي.

الخطوة٢: تحتاج فقط إلى بيان أن الفرض: x عدد زوجي يؤدي إلى تناقض لأن البرهان عند افتراض أن y عدد زوجي يتبع التبرير نفسه. لذلك افرض أن x عدد زوجي وأن y عدد فردي هذا يعني أن $x = 2k$ و $y = 2m + 1$ حيث k و m عددان صحيحان.

$xy = (2k)(2m+1)$ بتعويض الفرض

$= 4km + 2k$ خاصية التوزيع

$= 2(2km + k)$ خاصية التوزيع

بما أن k و m عددان صحيحان فإن $2km + k$ عدد صحيح أيضا ليكن p يمثل العدد $2km + k$. لذا فيمكن أن يمثل العدد xy بـ $2p$ حيث p عدد صحيح. وهذا يعني أن xy عدد زوجي ولكن هذا يناقض المعطيات بأن xy عدد فردي.

بما أن الفرض: x عدد زوجي و y عدد فردي يؤدي إلى تناقض مع المعطيات فإن النتيجة الأصلية بأن كلا من x و y عدد صحيح فردي نتيجة صحيحة بالتأكيد.

٢٠)

المعطيات: n^2 عدد زوجي.

المطلوب: n عدد زوجي

برهان غير مباشر:

المعطيات: n^2عدد زوجي

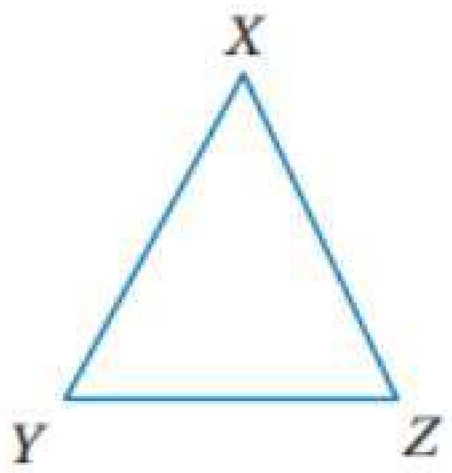
المطلوب: n عدد زوجي أي n^2 يقبل القسمة على ٤

البرهان:

- بفرض أن n^2 لا يقبل القسمة على ٤، أي ان ٤ ليس عامل من عوامل n^2.
- إذا كان مربع عدد هو عدد زوجي ، إذن العدد هو أيضا عدد زوجي لذا اذا كان n^2 عدد زوجي ، nيجب أن تكون عدد زوجي.
- نفرض أن $n = 2a$
- $n^2 = (2a)^2$
- $n^2 = 4a^2$
- 4 عامل من عوامل n^2 و هذا يتعارض مع الفرض

إذن nعدد زوجي

٢١)



المعطيات: $XZ > YZ$

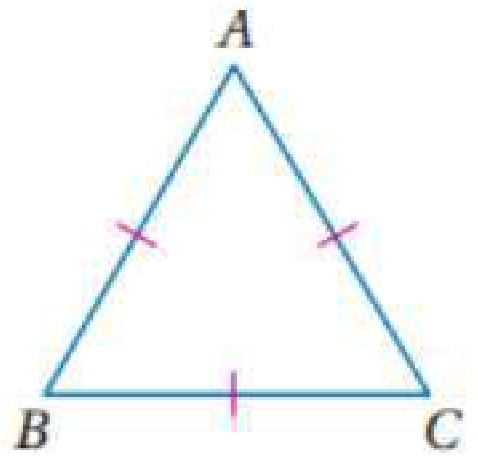
المطلوب: $\angle X \ncong \angle Y$

برهان غير مباشر:

الخطوة١: أفرض أن $\angle X \cong \angle Y$.

الخطوة٢: $\overline{XZ} \cong \overline{YZ}$ حسب عكس نظرية المثلث متطابق الضلعين.

الخطوة ٣: وهذا يناقض المعلومة المعطاة بأن $XZ > YZ$ لذلك فالفرض بأن $\angle X \cong \angle Y$ خطأ لذا فإن النتيجة الأصلية بأن $\angle X \ncong \angle Y$ نتيجة صحيحة بالتأكيد.



٢٢)

المعطيات: ΔABC متطابق الأضلاع.

المطلوب: ΔABC متطابق الزاويا.

برهان غير مباشر:

الخطوة ١: أفرض أن ΔABC ليس متطابق الزاويا.

الخطوة ٢: $m\angle B > m\angle C$ فإن $\overline{AC} > \overline{AB}$ حسب متباينة زاوية ضلع في مثلث.

الخطوة ٣: يناقض هذا المعلومة المعطاة بأن ΔABC متطابق الأضلاع. لذا فإن الفرض بأن ΔABC ليس متطابق الزاويا خطأ والنتيجة الأصلية بأن ΔABC متطابق الزوايا نتيجة صحيحة بالتأكيد.

٢٣)

المعطيات: ΔABC

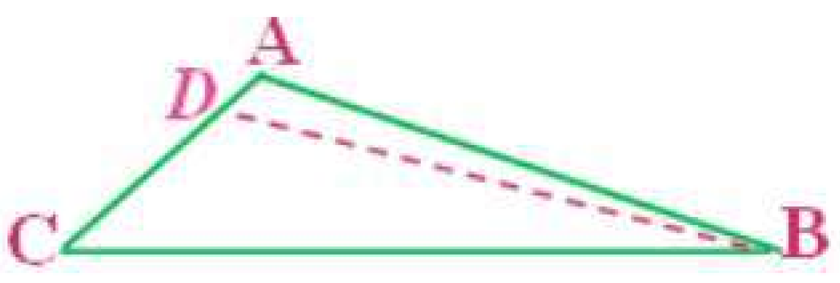
المطلوب: ΔABC لا يمكن أن يكون له أكثر من زاوية قائمة واحدة.

برهان غير مباشر:

الخطوة ١: أفرض أن للمثلث ABC أكثر من زاوية قائمة.

الخطوة ٢: إذا كانت $\angle B$ و $\angle C$ زاويتين قائمتين فإن $m\angle B + m\angle C = 180^\circ$. لكن $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^\circ$ لأن مجموع قياسات زوايا المثلث 180°. وبالتعويض $m\angle A + 180^\circ = 180^\circ$ إذن $m\angle A = 0^\circ$

الخطوة ٣: يناقض هذا المعلومة المعطاة بأن ΔABC مثلث لذلك فالفرض بأن للمثلث ΔABC أكثر من زاوية قائمة خطأ والنتيجة الأصلية بأنه لايمكن أن يكون للمثلث ΔABC أكثر من زاوية قائمة نتيجة صحيحة.



٢٤)

المعطيات: $m\angle A > m\angle ABC$

المطلوب: $BC > AC$

برهان:

أفرض أن $BC < AC$. فحسب خاصية المقارنة يكون $BC = AC$ أو $BC < AC$.

الحالة ١: إذا كان $BC = AC$ فإن $\angle ABC \cong \angle A$ حسب نظرية المثلث متطابق الضلعين (إذا كان ضلعان لمثلث متطابقين فإن الزاويتين المقابلتين لهما متطابقتان).

لكن $\angle ABC \cong \angle A$ تناقض العبارة المعطاة بإن $m\angle A > m\angle ABC$. إذن

$.BC \neq AC$

الحالة ٢:

إذا كان $BC < AC$ فإنه يوجد نقطة D بين A و c بحيث يكون $\overline{DC} \cong \overline{BC}$

ارسم القطعة المستقيمة المساعدة $\overline{BD}$ بما أن $DC = BC$ فإن

$\angle BDC \cong \angle DBC$ حسب نظرية المثلث متطابق الضلعين ولأن $\angle BDC$ زاوية خارجية لـ BAD وحسب نظرية الزاوية الخارجية (قياس الزاوية الخارجية لمثلث أكبر من قياس كل من الزاويتين الداخليتين البعيدتين عنها) يكون

$m\angle BDC > m\angle A$ وحسب مسلمة جمع الزوايا يكون:

$m\angle ABC = m\angle ABD + m\angle DBC$. إذن وحسب تعريف المتباينة يكون

$m\angle ABC > m\angle DBC$. وبالتعويض وخاصية التعدي للمتباينة يكون

$m\angle ABC > m\angle A$ ولكن هذا يناقض العبارة المعطاة بأن

$m\angle A > m\angle ABC$. وفي الحالتين وصلنا إلى تناقض فالفرض خطأ لذلك

$.BC > AC$

٢٥) اكتب برهان غير مباشر:

المعطيات: $\frac{1}{b} < 0$

المطلوب: b عدد سالب.

برهان غير مباشر:

الخطوة ١: افرض أن $b > 0$ وأن $b \neq 0$ لأن ذلك سيجعل $\frac{1}{b}$ غير معرف.

الخطوة ٢: $b > 0$ فإن $\frac{1}{b} > 0$ لأن ناتج قسمة عدد موجب على عدد موجب يكون موجبا.

الخطوة ٣: لكن $\frac{1}{b} > 0$ يناقض المعطيات لذلك فالفرض خطأ إذن b عدد سالب بالتأكيد.

٢٦) كرة سلة:

نعلم أن الفريق الآخر سجل ٣ نقاط ويعتقد أخو عدنان بأنهم ثلاث نقاط من رمية واحدة ونعلم أيضا أنه يمكن للاعب أن يسجل ٣ نقاط بتسجيل نقطتين والحصول على رمية حرة نتيجة خطأ الفريق المنافس.

الخطوة ١: افرض أن لاعبا من الفريق المنافس سجل نقطتين من رمية وحصل على رمية حرة.

الخطوة٢: بما أن عدد نقاط الفريق المنافس كان قبل أن يخرج عدنان من الملعب ٢٦ نقطة فإن عدد نقاطهم بعد تسجيل نقطتين وحصولهم على رمية حرة سيكون ٢٦ + ٣ أو ٢٩.

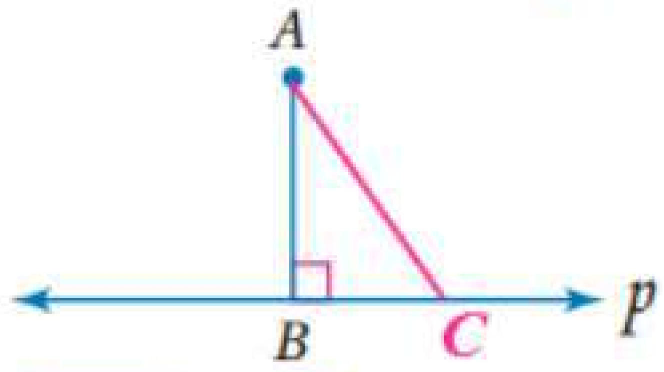
الخطوة٣: بما أن عدد النقاط صحيح عندما افترضنا أن الفريق المنافس سجل نقطتين من رمية وحصل على رمية حرة فإن افتراض أخو عدنان قد يكون غير صحيح.

فالفريق المنافس يمكن أن يكون قد حصل على ثلاث نقاط من رمية واحدة من خارج منطقة الهدف أو على نقطتين ورمية حرة.

٢٧) ألعاب الكترونية:

الباب الأيمن، فإذا كان الإعلان على الباب الأيسر صحيحا فإن الإعلانين سيكونان صحيحين. إلا أن أحد الإعلانين خطأ لذا يجب أن يكون الإعلان المكتوب على الباب الأيسر خطأ.

٢٨)



المعطيات: $\overline{AB} \perp \overleftrightarrow{P}$

المطلوب: $\overline{AB}$ أقصر قطعة مستقيمة من A إلى P.

برهان غير مباشر:

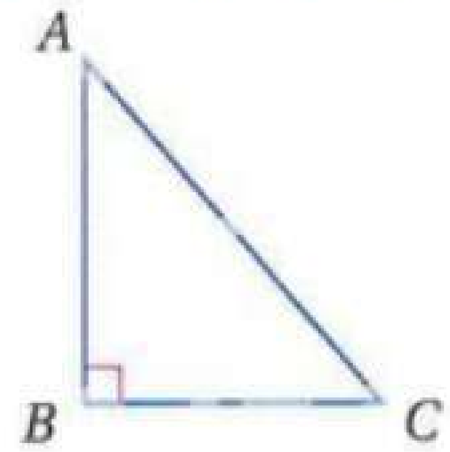
الخطوة ١: أفرض أن $\overline{AB}$ ليست أقصر قطعة مستقيمة من A إلى P.

الخطوة ٢: بما أن أن $\overline{AB}$ ليست أقصر قطعة مستقيمة من A إلى P فإنه توجد نقطة C على P بحيث تكون $\overline{AC}$ أقصر قطعة مستقيمة. وبما أن ΔABC قائم الزاوية

وتره $\overline{AC}$ فإن ΔABC أطول ضلع ΔABC لأنه يقابل أكبر زاوية في ΔABC حسب متباينة زاوية – ضلع في المثلث.

الخطوة ٣: يناقض هذا الفرض بأن $\overline{AC}$ أقصر ضلع ولذلك فالفرض خطأ والصحيح هو أن $\overline{AB}$ أقصر بالتأكيد.

٢٩) برهان مباشر:



المعطيات: ΔABC قائم الزاوية

المطلوب: $\overline{AC}$ أطول ضلع في المثلث

برهان مباشر:

المثلث قائم الزاوية في B إذن مجموع الزاويتين الاخرتين = ٩٠

أي كل منهما أقل من ٩٠ وهذا يعني أن B هي أكبر زوايا المثلث

وبالتالي يكون الوتر $\overline{AC}$ هو أطول ضلع في المثلث

٣٠) نظرية الأعداد:

30a) n^3+3

30b)

n^3+3	n
١١	٢
٣٠	٣
١٠٠٣	١٠
١٣٣٤	١١
١٣٨٢٧	٢٤
١٥٦٢٨	٢٥
١٠٠٠٠٠٣	١٠٠

١٠١	١٠٣٠٣٠٤
٥٢٦	١٤٥٥٣١٥٧٩
٥٢٧	١٤٦٣٦٣١٨٦

30c) يكون n عدد ا فرديا عندما يكون $n^{3}+3$ عددا زوجيا.

30d) برهان غيرمباشر:

الخطوة ١ : افرض أن n عدد زوجي وليكن $n=2k$ حيث kعدد صحيح.

الخطوة ٢ : $n^{3}+3=(2k)^{3}+3$ بتعويض الفرض

$=8k^{3}+3$ بالتبسيط

$=(8k^{3}+2)+1$ بكتابة ٣ على صورة$2+1$ وتجمع أول حدين.

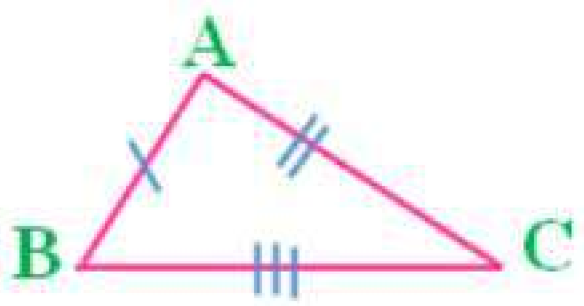
$=2(4k^{3}+1)+1$ خاصية التوزيع

وبما أن k عدد صحيح فإن $k^{3}+14$ عدد صحيح أيضا لذا فإن $n^{3}+3$ عدد فردي.

الخطوة ٣: وهذا يناقض الفرض بأن $n^{3}+3$ عدد زوجي لذا فإن الفرض خطأ والنتيجة بأن n عدد فردي نتيجة صحيحة.

مسائل مهارات التفكير العليا

٣١)



العبارة هي: ΔABCمختلف الأضلاع.

المعطيات: ΔABC فيه $AB \neq BC$؛

$AB \neq AC$، $BC \neq AC$

المطلوب: ΔABC مختلف الأضلاع.

برهان غير مباشر:

الخطوة ١: أفرض أن ΔABC ليس مختلف الأضلاع.

الحالة ١: ΔABC متطابق الضلعين.

الخطوة ٢: إذا كان ΔABC متطابق الضلعين فإن $AB=BC$ أو$BC=AC$ أو $AB=AC$.

الخطوة ٣: يناقض هذا المعطيات إذن ΔABC ليس متطابق الضلعين.

الحالة ٢: ΔABC متطابق الأضلاع.

ولكي يكون المثلث متطابق الأضلاع يجب أن يكون متطابق الضلعين أيضا وفي الحالة الأولى أثبت أن ΔABC ليس متطابق الضلعين إذن فالمثلث ΔABC ليس متطابق الأضلاع لذلك ΔABC مختلف الأضلاع.

٣٢) تحد:

المعطيات: x عدد نسبي لا يساوي الصفر و y عدد غير نسبي.

المطلوب: xy عدد غير نسبي.

برهان غير مباشر:

الخطوة ١: بما أن x عدد نسبي لا يساوي الصفر فإن $x = \frac{a}{b}$ حيث a و b عددان صحيحان ، حيث $b \neq 0$ وبالتعويض، $xy = \frac{a}{b} \times y = \frac{ay}{b}$

أفرض أن xy عدد نسبي فيكون $xy = \frac{c}{d}$ حيث c و d عددان صحيحان ، $d \neq 0$

الخطوة ٢: $xy = \frac{ay}{b}$ $\quad$ x عدد نسبي

$\frac{c}{d} = \frac{ay}{b}$ بتعويض الفرض

$cb = ayd$ بضرب كلا الطرفين في db

$\frac{cb}{ad} = y$ بقسمة كلا الطرفين على ad.

حيث $a \neq 0$ لأن $x = \frac{a}{b \neq 0}$.

بما أن a, b, c, d أعداد صحيحة و $d \neq 0$، و $a \neq 0$ فإن $\frac{cb}{ad}$ هو ناتج قسمة عددين صحيحين. أي أن y عدد نسبي.

الخطوة ٣: بما أن الفرض: xy عدد نسبي أدى إلى تناقض مع المعطيات فإن النتيجة الأصلية بأن xy عدد غير نسبي نتيجة صحيحة.

٣٣) اكتشف الخطأ:

كلاهما على خطأ بما أن الفرض صحيح عندما تكون النتيجة خطأ فإن العبارة خطأ.

٣٤) اكتب:

إذا لم يكن x عدد فرديا فإن $5x-2$ ليس عددا فرديا فإذا لم يكن x عدد فرديا فإنه زوجي وإذا كان x عددا زوجيا فإن $5x$ عدد زوجي لأن حاصل ضرب أي عدد في عدد زوجي يكون زوجيا. $5x-2$ يكون عدد زوجي أيضا لأن ناتج طرح ٢ من أي عدد زوجي يكون زوجيا أيضا. لذلك فالعبارة " إذا لم يكن x عددا فرديا فإن $5x-2$ ليس عددا فرديا" صحيحة البرهان المباشر للمعاكس الإيجابي للعبارة والبرهان غير المباشر للعبارة نفسها يبدآن بالفرضيات نفسها ويتوصلان إلى النتائج نفسها.

تدريب على الاختبار المعياري

٣٥) $D: 38$

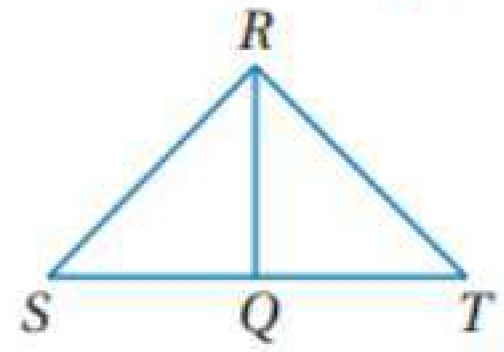
مجموع اي ضلعين في مثلث اكبر من الضلع الثالث لذا ٣٨ لا يكون المحيط المثلث

لان $38-(12+7)=19$

٣٦) $A: -a>-b$

مراجعة تراكمية

٣٧) اكتب برهانا ذا عمودين:



المعطيات: $\overline{RQ}$ تنصف $\angle SRT$

المطلوب: إثبات أن $m\angle SQR > m\angle SRQ$

البرهان: العبارات (المبررات)

1) $\overline{RQ}$ تنصف $\angle SRT$ (معطى)

2) $\angle SRQ \cong \angle QRT$ (تعريف المنصف)

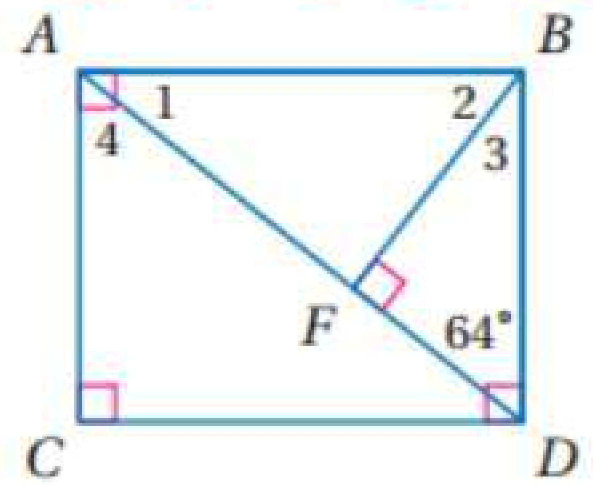
3) $m\angle SRQ = m\angle QRT$ (تعريف الزوايا المتطابقة)

4) $m\angle SQR = m\angle T + m\angle QRT$ (نظرية الزاوية الخارجية)

5) $m\angle SQR > m\angle QRT$ (تعريف المتباينة).

6) $m\angle SQR > m\angle SRQ$ (بالتعويض).

أوجد كل من القياسين الآتيين:



٣٨)

بما أن $\angle BFD = 90^\circ$ إذن:

$$\angle 3 = 180^\circ - (90^\circ + 64^\circ)$$

$$\angle 3 = 26^\circ$$

$$\angle 2 = 90^\circ - 26^\circ = 64^\circ$$

$$\angle 1 = 180^\circ - (90^\circ + 64^\circ)$$

$$\angle 1 = 26^\circ$$

39)

$$\angle 4 = 90^\circ - \angle 1$$

$$\angle 4 = 90^\circ - 26^\circ$$

$$\angle 4 = 64^\circ$$

٤٠) هندسة إحداثية:

بما أن المستقيمين متوازيين إذن ميل كل منهما متساويين = ٢

ارسم المستقيم p على أن يمر بنقطة مقطع المحور y للمستقيم $y = 2x + 2$

وهي $(0,2)$ ويكون عمودياً على كلا المستقيمين.

ميل المستقيم $p = \frac{-1}{2}$ والمستقيم p يمر بالنقطة $(0,2)$

إذن بصيغة الميل ونقطة معادلة المستقيم p هي:

$$(y - y_1) = m(x - x_1)$$

$$y - 2 = \frac{-1}{2}(x - 0)$$

$$y - 2 = \frac{-1}{2}x$$

$$y = \frac{-1}{2}x + 2$$

تحديد نقطة تقاطع المستقيمين $y = 2x - 3$ والمستقيم p

$$2x - 3 = \frac{-1}{2}x + 2$$

$$2x + \frac{1}{2}x = 2 + 3$$

$$\frac{5}{2}x = 5$$

$$x = 2$$

$$y = 2x - 3$$

$$y = 2 \times 2 - 3$$

$$y = 1$$

نقطة التقاطع هي $(2,1)$

المسافة بين $(2,1),(0,2)$:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d = \sqrt{(0-2)^2 + (2-1)^2}$$

$$d = \sqrt{4+1}$$

$$d = \sqrt{5}$$

استعد للدرس اللاحق

(41

$$4x + 7 < 180$$
$$4x < 180 - 7$$
$$4x < 173$$
$$\frac{4x}{4} < \frac{173}{4}$$
$$x < 43.25$$

(42

$$8x - 14 < 3x + 19$$
$$8x < 3x + 19 + 14$$
$$8x < 3x + 33$$
$$8x - 3x < -3x + 3x + 33$$
$$5x < 33$$
$$\frac{5x}{5} < \frac{33}{5}$$
$$x < 6.6$$

(43

$$3x + 54 < 90$$
$$3x < 90 - 54$$
$$3x < 36$$
$$\frac{3x}{3} < \frac{36}{3}$$
$$x < 12$$

٤-٥ متباينة المثلث

: تحليل النتائج:

(1

$$BC + CA > AB \quad AB + CA > BC \quad AB + BC > CA$$

٢) مجموع طولي ضلعين في مثلث أكبر من طول الضلع الثالث.

٣)

$$|BC - CA| < AB \quad |AB - CA| < BC \quad |AB - BC| < CA$$

٤)

سيكون الضلع الثالث أقل من مجموع طولي الضلعين الآخرين وأكبر من القيمة المطلقة للفرق بين طوليهما.

تحقق

(1A

$$15 + 16 \overset{?}{>} 30 \qquad 30 + 16 \overset{?}{>} 15 \qquad 30 + 15 \overset{?}{>} 16$$

$$31 > 30 \checkmark \qquad 46 > 15 \checkmark \qquad 45 > 16 \checkmark$$

بما أن طولي كل قطعتين أكبر من طول القطعة الثالثة، فإن القطع المستقيمة التي أطوالها $15, 16, 30$ يمكن تكون مثلث.

(1B

$$2 + 8 \overset{?}{>} 11$$

$$10 \ngtr 11 \ \text{✗}$$

بما أن طولي كل قطعتين ليس أكبر من طول القطعة الثالثة، فإن القطع المستقيمة التي أطوالها $2, 8, 11$ لا يمكن تكون مثلث.

تحقق

2) $22 : D$

$13 + 9 \overset{?}{>} n$

$22 > n$ أو $22 < n$

$13 + n \overset{?}{>} 9$

$n > -4$

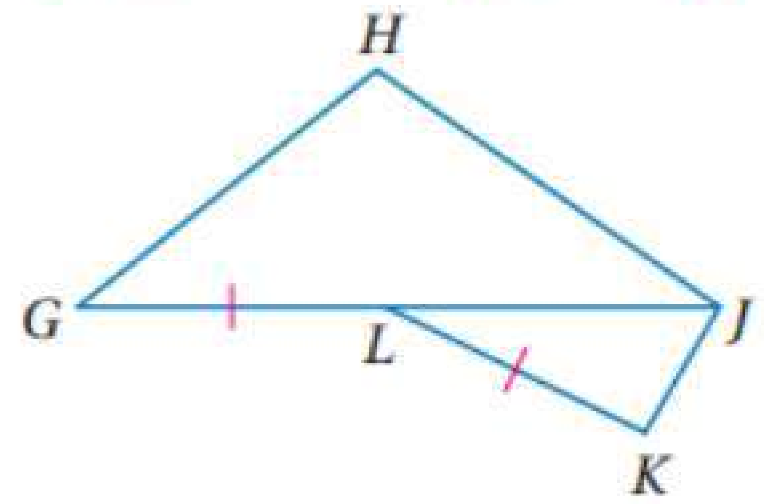
$9 + n \overset{?}{>} 13$

$n > 4$

$4 < n < 22$

تحقق

٣) اكتب برهانا ذا عمودين:



البرهان: العبارات (المبررات)

١) $GL = LK$ (معطى)

٢) $JH + GH > GJ$ (نظرية متباينة المثلث)

٣) $GJ = GL + LJ$ (مسلمة جمع القطع المستقيمة)

٤) $JH + GH > GL + LJ$ (بالتعويض)

٥) $JH + GH > LK + LJ$ (بالتعويض)

٦) $LK + LJ > JK$ (نظرية متباينة المثلث)

٧) $JH + GH > JK$ (خاصية التعدي)

حدد ما إذا كانت القياسات المعطاة يمكن أن تمثل أطوال أضلاع مثلث في كل مما يأتي ، وإذا لم يكن ذلك ممكنا فوضح السبب. المثال ١

١)

$5+7 \overset{?}{>} 10$ $\qquad$ $5+10 \overset{?}{>} 7$ $\qquad$ $10+7 \overset{?}{>} 5$

$12 > 10$ ✓ $\qquad$ $15 > 7$ ✓ $\qquad$ $17 > 5$ ✓

بما أن طولي كل قطعتين أكبر من طول القطعة الثالثة، فإن القطع المستقيمة التي أطوالها $5,7,10$ يمكن تكون مثلث.

٢)

$3+4 \overset{?}{>} 8$

$7 \ngtr 8$ ✗

بما أن طولي كل قطعتين ليس أكبر من طول القطعة الثالثة، فإن القطع المستقيمة التي أطوالها $3,4,8$ لا يمكن تكون مثلث.

٣)

$6+14 \overset{?}{>} 10$ $\qquad$ $14+10 \overset{?}{>} 6$ $\qquad$ $6+10 \overset{?}{>} 14$

$20 > 10$ ✓ $\qquad$ $24 > 6$ ✓ $\qquad$ $16 > 14$ ✓

بما أن طولي كل قطعتين أكبر من طول القطعة الثالثة، فإن القطع المستقيمة التي أطوالها $6,14,10$ يمكن تكون مثلث.

اختيار من متعدد:

4) $A : 5$

بفرض أن طول الضلع الثالث x

$5+9 \overset{?}{>} x$

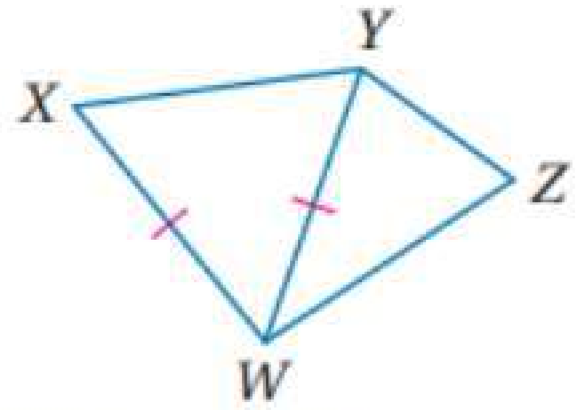
$14 > x$ أو $14 < x$

$9+x \overset{?}{>} 5$ $\qquad$ $5+x \overset{?}{>} 9$

$x > -4$ $\qquad$ $x > 4$

$4 < x < 14$

٥) برهان: اكتب برهانا ذا عمودين:



المعطيات: $\overline{XW} \cong \overline{YW}$

المطلوب: $YZ + ZW > XW$

البرهان: العبارات والمبررات

١) $\overline{XW} \cong \overline{YW}$ (معطى)

٢) $XW = YW$ (تعريف القطع المستقيمة المتطابقة)

٣) $YZ + ZW > YW$ (نظرية متباينة المثلث)

٤) $YZ + ZW > XW$ (بالتعويض)

تدرب وحل المسائل

حدد ما إذا كانت القياسات المعطاة يمكن أن تمثل أطوال أضلاع مثلث في كل مما يأتي ، وإذا لم يكن ذلك ممكنا فوضح السبب. المثال١

٦)

$9 + 4 \overset{?}{>} 15$

$13 \ngtr 15$ ✗

بما أن طولي كل قطعتين ليس أكبر من طول القطعة الثالثة، فإن القطع المستقيمة التي أطوالها $4,9,15$ لا يمكن تكون مثلث.

٧)

$11 + 21 \overset{?}{>} 16$ $\quad 16 + 11 \overset{?}{>} 21$ $\quad 16 + 21 \overset{?}{>} 11$

$32 > 16$ ✓ $\quad 27 > 21$ ✓ $\quad 37 > 11$ ✓

بما أن طولي كل قطعتين أكبر من طول القطعة الثالثة، فإن القطع المستقيمة التي أطوالها $11,21,16$ يمكن تكون مثلث.

٨)

$$8.2+1.1\overset{?}{>}9.9$$

$$✗\ 9.3 \not> 9.9$$

بما أن طولي كل قطعتين ليس أكبر من طول القطعة الثالثة، فإن القطع المستقيمة التي أطوالها 9.9,1.1,8.2 لا يمكن تكون مثلث.

٩)

$$2\frac{1}{2}+1\frac{3}{4}\overset{?}{>}5\frac{1}{8}$$

$$✗\ 4\frac{1}{4} \not> 5\frac{1}{8}$$

بما أن طولي كل قطعتين ليس أكبر من طول القطعة الثالثة، فإن القطع المستقيمة التي أطوالها $2\frac{1}{2},1\frac{3}{4},5\frac{1}{8}$ لا يمكن تكون مثلث.

اكتب متباينة تمثل مدى طول الضلع الثالث في مثلث علم طولا ضلعين من أضلاعه في كل مما يأتي: المثال٢

١٠)

بفرض أن طول الضلع الثالث x

$$4+8\overset{?}{>}x$$

$12>x$ أو $12<x$

$$8+x\overset{?}{>}4 \qquad 4+x\overset{?}{>}8$$

$$x>-4 \qquad x>4$$

$$4ft<x<12ft$$

١١)

بفرض أن طول الضلع الثالث x

$$11+5\overset{?}{>}x$$

$16>x$ أو $16<x$

$$11+x\overset{?}{>}5 \qquad 5+x\overset{?}{>}11$$

$$x>-6 \qquad x>6$$

$$6m<x<16m$$

١٢)

بفرض أن طول الضلع الثالث x

$$2.7+4.2\overset{?}{>}x$$

$$6.9>x \quad \text{أو} \quad 6.9<x$$

$$2.7+x\overset{?}{>}4.2 \qquad 4.2+x\overset{?}{>}2.7$$

$$x>-1.5 \qquad x>1.5$$

$$1.5cm<x<6.9cm$$

١٣)

بفرض أن طول الضلع الثالث x

$$\frac{1}{2}+3\frac{1}{4}\overset{?}{>}x$$

$$3\frac{3}{4}>x \quad \text{أو} \quad 3\frac{3}{4}<x$$

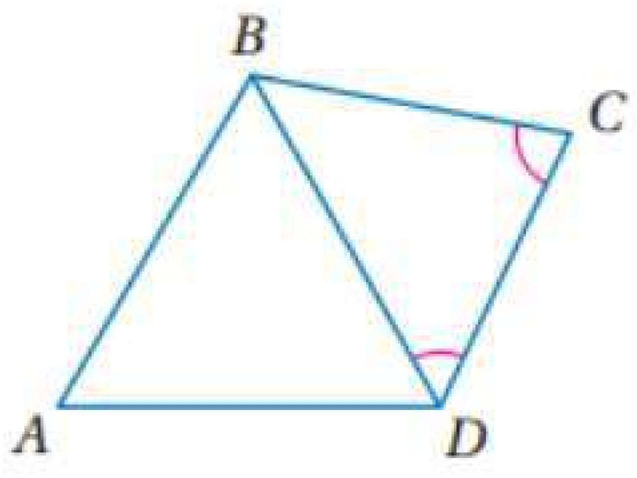
$$3\frac{1}{4}+x\overset{?}{>}\frac{1}{2} \qquad \frac{1}{2}+x\overset{?}{>}3\frac{1}{4}$$

$$x>-2\frac{3}{4} \qquad x>2\frac{3}{4}$$

$$2\frac{3}{4}km<x<3\frac{3}{4}km$$

برهان: اكتب برهانا ذا عمودين: مثال٣

١٤)



البرهان: العبارات (المبررات)

١) $\angle BCD \cong \angle CDB$ (معطى)

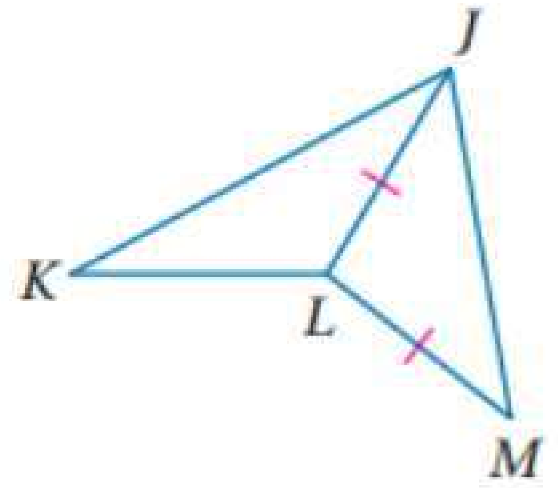
٢) $\overline{BC} \cong \overline{BD}$ (عكس نظرية المثلث متطابق الضلعين)

٣) $BC = BD$ (تعريف القطع المستقيمة)

٤) $AB + AD > BD$ (نظرية متباينة المثلث)

٥) $AB + AD > BC$

١٥)



البرهان: العبارات (المبررات)

١) $\overline{JL} \cong \overline{LM}$ (معطى)

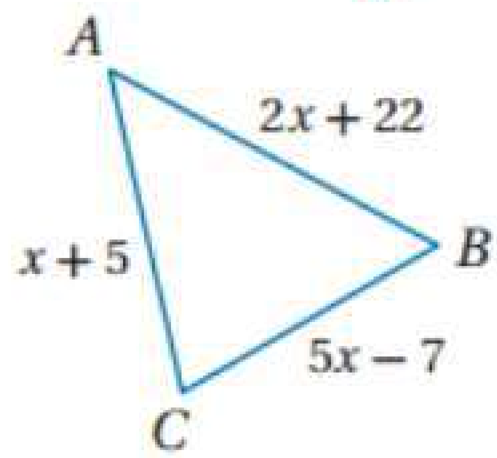
٢) $\overline{JL} = \overline{LM}$ (تعريف القطع المستقيمة المتطابقة)

٣) $JK + KL > JL$ (نظرية متباينة المثلث)

٤) $JK + KL > LM$ (بالتعويض)

جبر: حدد القيم الممكنة لـ x في كل من السؤالين الآتيين:

١٦)



$$x + 5 + 5x - 7 \overset{?}{>} 2x + 22$$

$$6x - 2 \overset{?}{>} 2x + 22$$

$$4x > 24$$

$$x > \frac{24}{4}$$

$$x > 6$$

$$2x + 22 + x + 5 \overset{?}{>} 5x - 7$$

$$3x > -27 + 5x - 7$$

$$3x - 5x > -27 - 7$$

$$-2x > -34$$

$$x > \frac{34}{2}$$

$$x > 17$$

$$2x+22+5x-7\overset{?}{>}x+5$$

$$7x+15>x+5$$

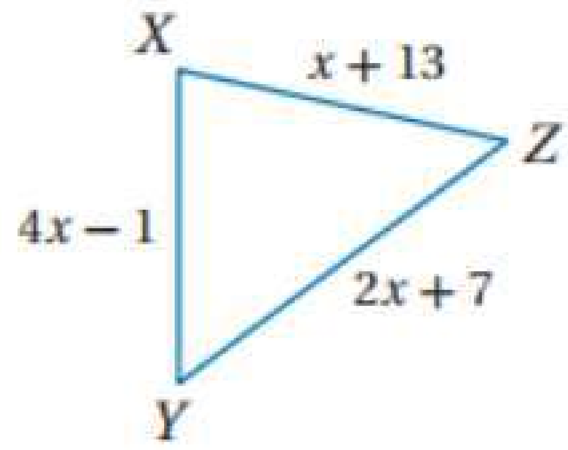
$$7x-x>5-15$$

$$6x>-10$$

$$x>\frac{-10}{6}$$

إذن القيم الممكنة لـ x هي: $6<x<17$

(١٧



$$x+13+4x-1\overset{?}{>}2x+7$$

$$5x-12\overset{?}{>}2x+7$$

$$5x-2x\overset{?}{>}7+12$$

$$3x>19$$

$$x>\frac{19}{3}$$

$$4x-1+2x+7\overset{?}{>}x+13$$

$$6x+6>x+13$$

$$6x-x>13-6$$

$$5x>7$$

$$x>\frac{7}{5}$$

$$x + 13 + 2x + 7 \overset{?}{>} 4x - 1$$
$$3x + 20 > 4x - 1$$
$$3x - 4x > -1 - 20$$
$$x > 21$$

إذن القيم الممكنة لـ x هي: $\frac{7}{5} < x < 21$

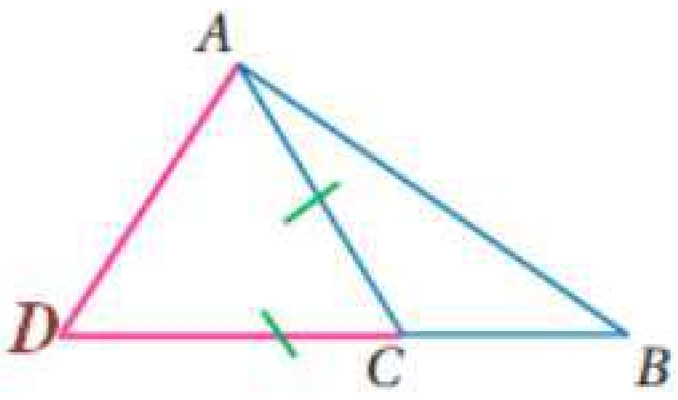
18a) قيادة سيارة:

18a) الطريق ١؛ في أي مثلث مجموع طولي أي ضلعين أكبر من طول الضلع الثالث لذلك فمجموع المسافتين على الطريق ٢ والطريق ٣ أكبر من المسافة على الطريق ١.

18b)

الطريق ٢ ثم الطريق٣؛ بما أنه يمكن لتوفيق أن يقود سيارته بسرعة $60\ km/h$ في الساعة على الطريق ١ الذي طوله $60\ km$ فإنه يستغرق ساعة تقريبا للوصول إلى المجمع. أو أن يقود سيارته بسرعة $100\ km/h$ على الطريق ٢ ثم الطريق ٣ اللذين مجموع طوليهما $85km$ لذلك يستغرق ٠,٨٥ من الساعة أو ٥١ دقيقة تقريبا للوصول إلى المجمع. إذن استعمال الطريق ٢ ثم الطريق ٣ يستغرق وقتا أقل من الطريق ١.

١٩) برهان:



البرهان: العبارات (المبررات)

١) ارسم $\overline{CD}$ بحيث تقع C بين B و D و $\overline{CD} \cong \overline{AC}$ (استعمل المسطره).

٢) $CD = AC$ (تعريف تطابق القطع المستقيمة)

٣) $\angle CAD \cong \angle ADC$ (نظرية المثلث متطابق الضلعين)

٤) $m\angle CAD = m\angle ADC$ (تعريف الزاويتين المتطابقتين)

٥) $m\angle BAC + m\angle CAD = m\angle BAD$ (مسلمة جمع الزاويا)

٦) $m\angle BAC + m\angle ADC = m\angle BAD$ (بالتعويض)

٧) $AB < BD$ (علاقة الزوايا والأضلاع في المثلث)

٨) $BD = BC + CD$ (مسلمة جمع القطع المستقيمة)

٩) $AB < BC + CD$ (بالتعويض)

١٠) $AB < BC + AC$ (بالتعويض)

اكتب متباينة تمثل مدى القيم الممكنة لـ x في كل من الأسئلة الآتية:

٢٠)

$4+6 \overset{?}{>} x$

$10 > x$ أو $10 < x$

$6+x \overset{?}{>} 4$ $4+x \overset{?}{>} 6$

$x > -2$ $x > 2$

$2 < x < 10$

٢١)

$12+8 \overset{?}{>} x$

$20 > x$ أو $20 < x$

$12+x \overset{?}{>} 8$ $8+x \overset{?}{>} 12$

$x > -4$ $x > 4$

$4 < x < 20$

٢٢)

$5+7 \overset{?}{>} x+1$

$12-1 > x$

$11 > x$ أو $11 < x$

$7+x+1 \overset{?}{>} 5$ $5+x+1 \overset{?}{>} 7$

$x+8 > 5$ $x+6 > 7$

$x > -3$ $x > 1$

$1 < x < 11$

٢٣)

$x+2+x+4 \overset{?}{>} x+6$

$2x+6>x+6$

$2x>x$

$2x-x>0$

$x>0$

$x+2+x+6 \overset{?}{>} x+4$

$2x+8>x+4$

$2x>x-4$

$x>-4$

$x+4+x+6 \overset{?}{>} x+2$

$2x+10>x+2$

$2x-x>2-10$

$x>-8$

$x<0$

٢٤) مسرح:

نعم؛ القياسات الظاهرة على الرسم لا تشكل مثلثا. فحسب نظرية متباينة المثلث، مجموع طولي أي ضلعين لمثلث أكبر من طول الضلع الثالث. والأطوال في الرسم هي $6\frac{3}{4}ft$ ، $3\frac{7}{8}ft$ ، $1ft$. وبما أن $1+3\frac{7}{8} \not> 6\frac{3}{4}$ فإن هذه الأطوال لا تمثل أضلاع مثلث. وعليهما أن يعيدا حساب القياسات في قص الخشب.

حدد ما إذا كانت القياسات المعطاة يمكن أن تمثل أطوال أضلاع مثلث في كل مما يأتي ، واذا لم يكن ذلك ممكنا فوضح السبب.

٢٥)

لا؛ لأن $\sqrt{8}+\sqrt{2} \not> \sqrt{35}$

بما أن طولي كل قطعتين ليس أكبر من طول القطعة الثالثة، فإن القطع المستقيمة التي أطوالها $\sqrt{35}, \sqrt{8}, \sqrt{2}$ لا يمكن تكون مثلث.

٢٦)

$\sqrt{99} \approx 9.9$

$\sqrt{48} \approx 6.9$

$\sqrt{65} \approx 8.1$

$9.9+6.9 \overset{?}{>} 8.1$ $6.9+8.1 \overset{?}{>} 9.9$ $9.9+8.1 \overset{?}{>} 6.9$

$\checkmark\ 16.8 > 8.1$ $\checkmark\ 15 > 9.9$ $\checkmark\ 18 > 6.9$

بما أن طولي كل قطعتين أكبر من طول القطعة الثالثة، فإن القطع المستقيمة التي أطوالها $\sqrt{65}, \sqrt{48}, \sqrt{99}$ يمكن تكون مثلث.

٢٧) حدد ما إذا كانت النقاط $X\ (1,-3), Y\ (6,1), Z\ (2,2)$ تمثل رؤوس مثلث. وضح إجابتك.

$$d_{(X,Y)} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$
$$d = \sqrt{(6-1)^2+(1+3)^2}$$
$$d = \sqrt{25+16}$$
$$d = \sqrt{41} \approx 6.4$$
$$d_{(Y,Z)} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$
$$d = \sqrt{(2-6)^2+(2-1)^2}$$
$$d = \sqrt{16+1}$$
$$d = \sqrt{17} \approx 4.1$$
$$d_{(X,Z)} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$
$$d = \sqrt{(2-1)^2+(2+3)^2}$$
$$d = \sqrt{1+25}$$
$$d = \sqrt{26} \approx 5.1$$

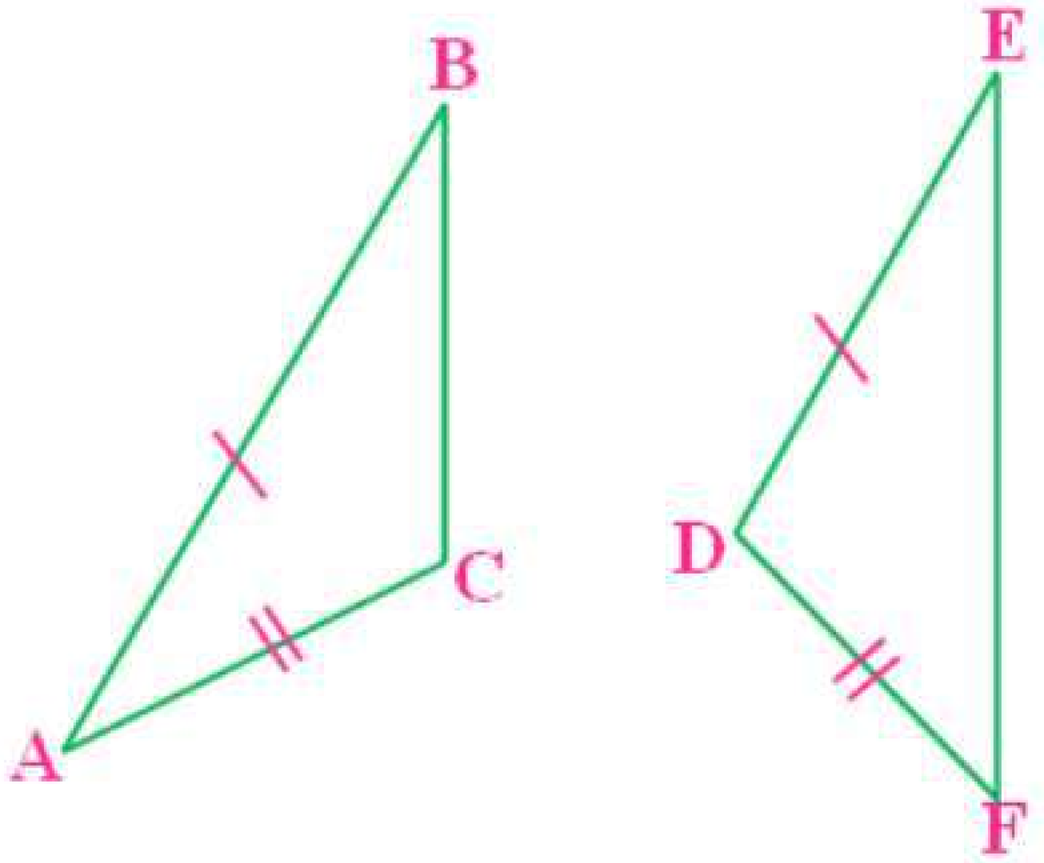
$6.4+4.1 \overset{?}{>} 5.1$ $6.4+5.1 \overset{?}{>} 4.1$ $4.1+5.1 \overset{?}{>} 6.4$

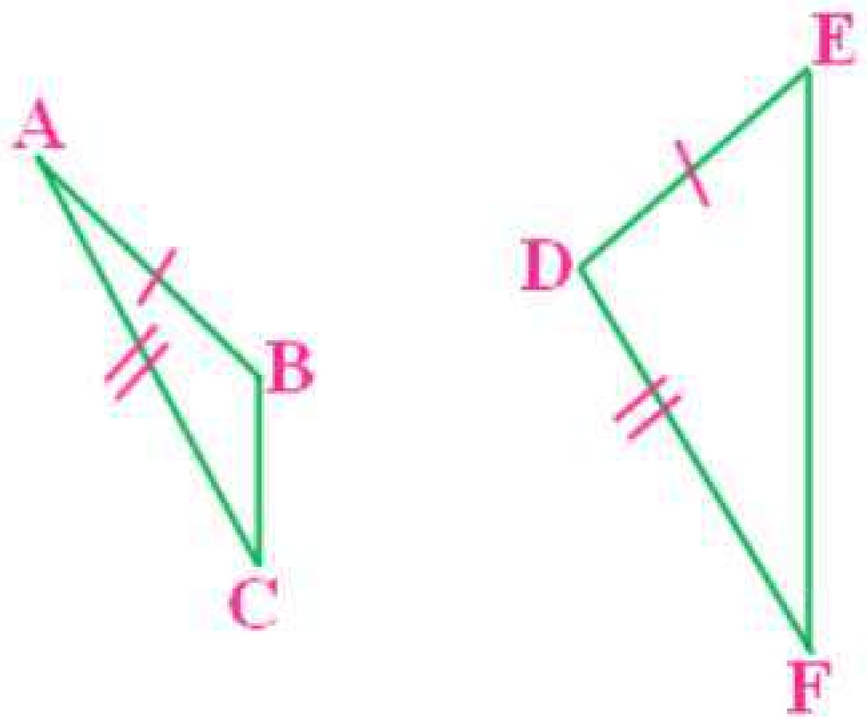
$\checkmark\ 10.5 > 5.1$ $\checkmark\ 11.5 > 4.1$ $\checkmark\ 9.2 > 6.4$

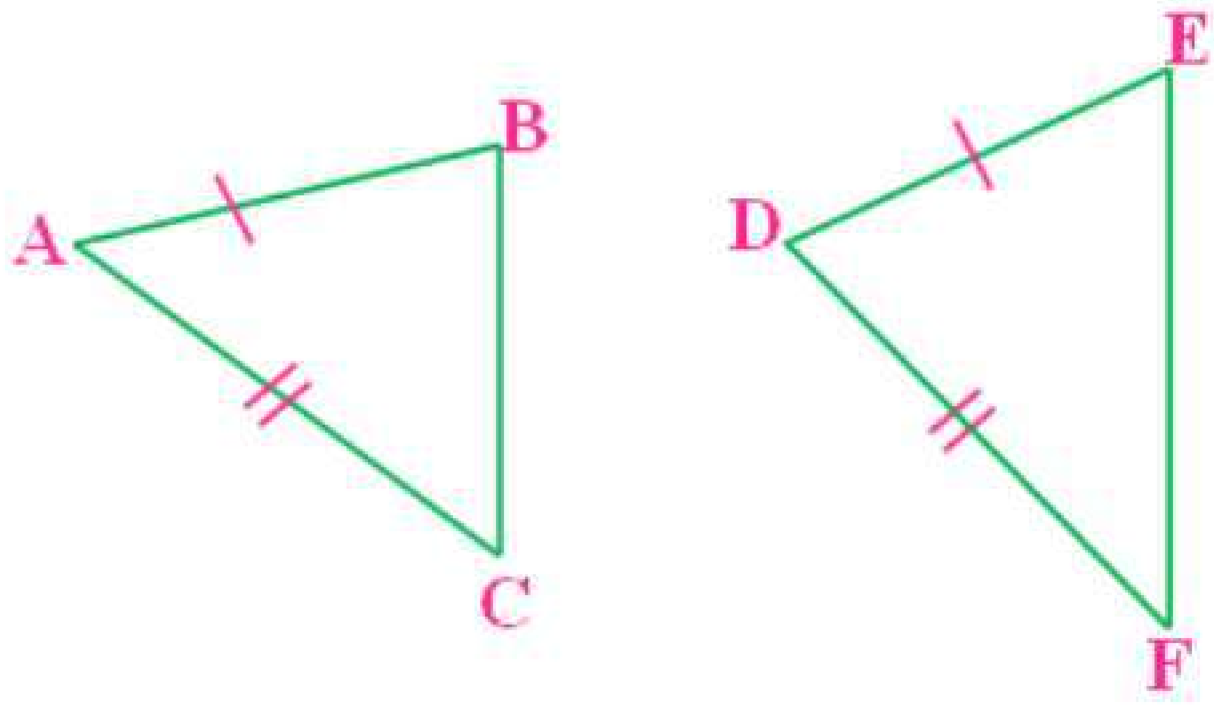
بما أن طولي كل قطعتين أكبر من طول القطعة الثالثة، فإن النقط المعطاة يمكن تكون مثلث.

28a) تمثيلات متعددة:

a) هندسياً:







28b) جدولياً:

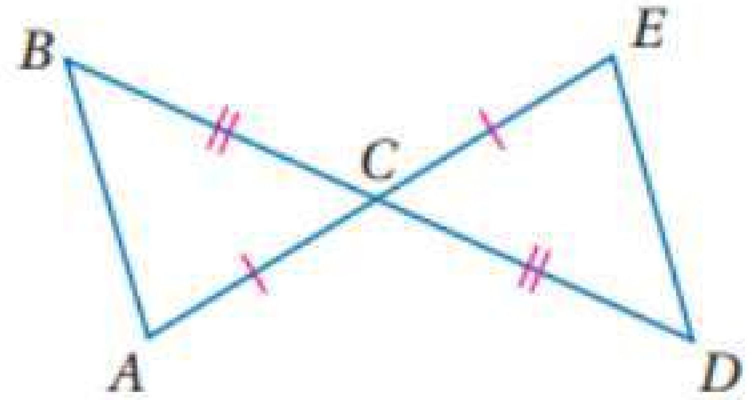
أزواج المثلثات	BC	$m\angle A$	EF	$m\angle D$
١	٠,٧٥	٢٦	٢	١٠٥
٢	٠,٣	١٥	١	٩٧
٣	٠,٨	٤٤	١,٤	١٠١

28c) لفظياً:

قياس الزاوية التي تقابل الضلع الأطول من الضلعين غير المتطابقين أكبر من قياس الزاوية التي تقابل الضلع الأقصر منهما.

مسائل مهارات التفكير العليا

٢٩) تحدٍ:



بفرض أن الضلع الثالث x

بما أن $AC = 7, DC = 9$

$$7+9 \overset{?}{>} x$$

$16 > x$ أو $16 < x$

$$7+x \overset{?}{>} 9 \qquad 9+x \overset{?}{>} 7$$

$$x > 2 \qquad x > -2$$

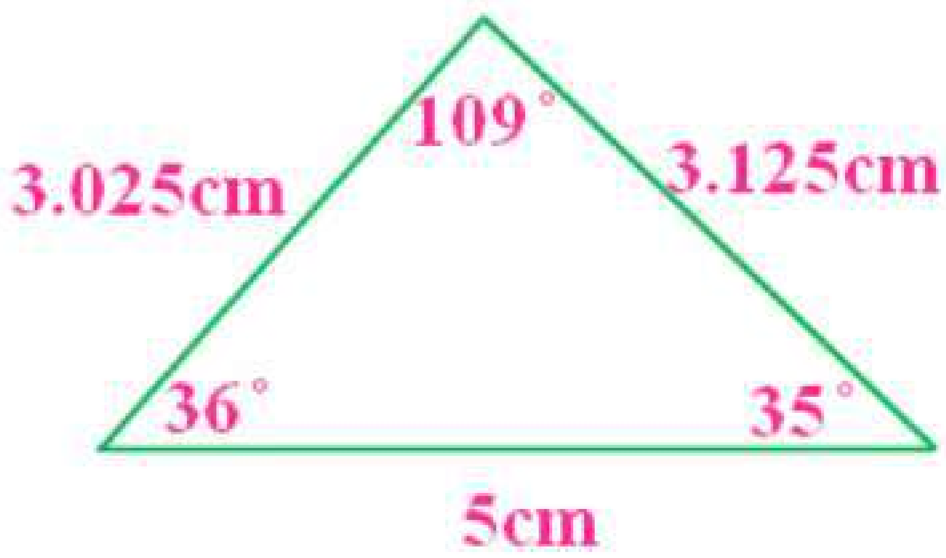
المحيط أكبر من ٣٦ وأقل من ٦٤ نعلم من الشكل أن:

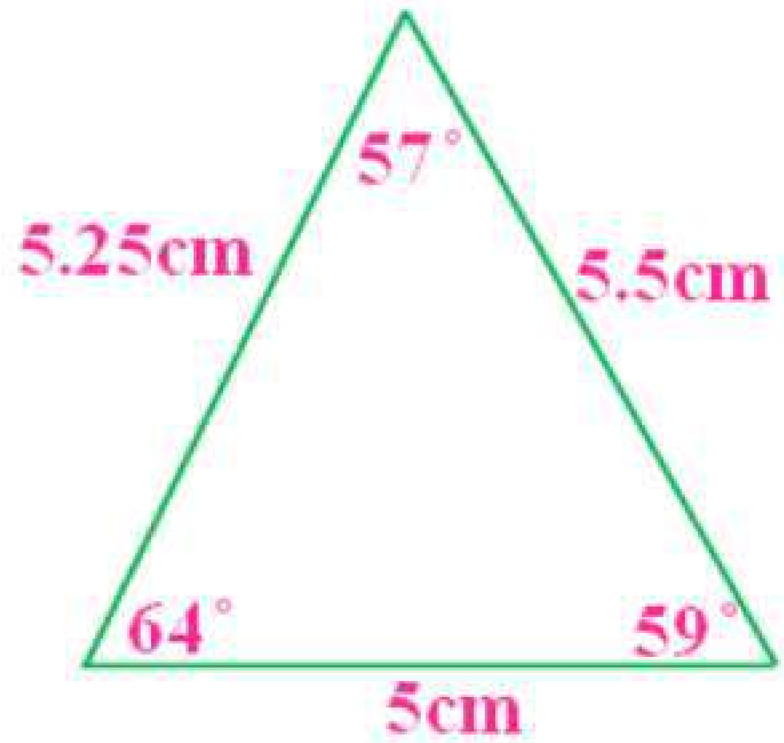
$\overline{EC} \cong \overline{AC}$ و $\overline{BC} \cong \overline{DC}$ و $\angle ECD \cong \angle ACB$ لأن الزاويا المتقابلة بالرأس متطابقة إذن $\Delta ECD \cong \Delta ACB$ وباستعمال نظرية متباينة المثلث تكون قيمة كل من ED, AB محصورة بين العددين 2, 16 لذلك أصغر قيمة للمحيط أكبر من $2(2+7+9)$ أو ٣٦؛ وأكبر قيمة للمحيط أصغر من $2(16+7+9)$ أو ٦٤.

٣٠) تبرير:

يجب أن يكون طول كل من الضلعين المتطابقين أكبر من $3cm$ وعند استعمالها لإيجاد أكبر قيمة لطول الساق فإن المتباينة ستكون ٦ > ٠ وهي صحيحة دائما لذلك لا توجد قيمة عظمة للطول.

٣١) مسألة مفتوحة:





٣٢) اكتب:

تنص نظرية متباينة المثلث على أن مجموع طولي أي ضلعين للمثلث يكون دائما أكبر من طول الضلع الثالث للمثلث لذا يمكن كتابة ثلاث متباينات فمثلا للمثلث الذي أطوال أضلاعه a, b, c يمكن كتابة:

$$a+b>c, a+c>b, b+c>a$$

وعادة ما ينتج من إحدى المتباينات عدد سالب ولا يلزم استعمالها عند إيجاد القيمة الصغرى والقيمة العظمى للضلع غير المعروف والمتباينتان الباقيتان تعطيان القيمة التي سيكون طول الضلع أكبر منها والقيمة التي سيكون طول الضلع أصغر منها.

تدريب على الاختبار المعياري

٣٣) B: $m\angle ADC = m\angle BCD$

٣٤) D: $z = 14w - 7$

مراجعة تراكمية

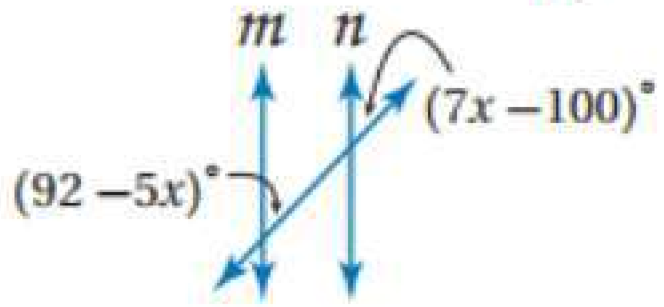
اكتب الافتراض الضروري التي تبدأبه برهاناً غير مباشر لكل مما يأتي:

٣٥) $Y > 6$ أو $Y < 6$

٣٦) إذا قطع مستقيم مستقيمين آخرين، وكانت الزاويتان المتبادلتان داخلياً متطابقتان، فإن المستقيمين غير متوازيين.

أوجد قيمة x على أن يكون $m \parallel n$ في كل مما يأتي، واذكر المسلمة أوالنظرية:

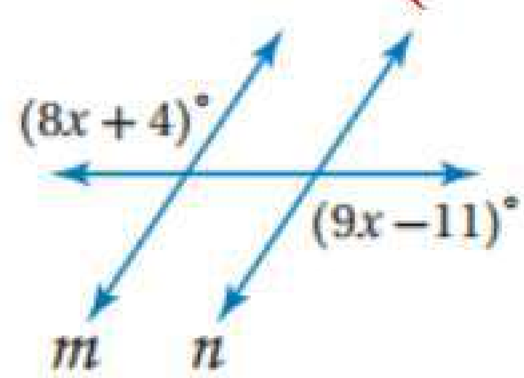
٣٧)



$$7x - 100 = 92 - 5x$$
$$7x + 5x = 92 + 100$$
$$12x = 192$$
$$x = 16$$

مسلمة الزاويتين المتناظرتين.

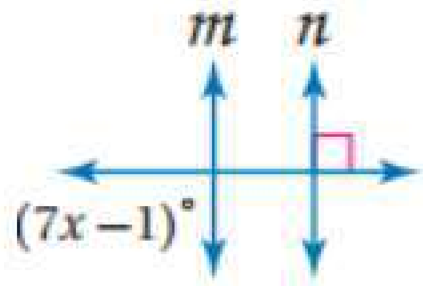
٣٨)



$$8x + 4 = 9x - 11$$
$$8x - 9x = -11 - 4$$
$$-x = -15$$
$$x = 15$$

نظرية الزاويتين المتبادلتين خارجيا.

٣٩)



$$7x - 1 = 90$$

$$7x = 91$$

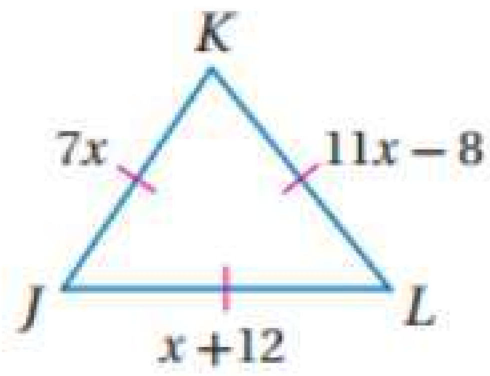
$$x = 13$$

نظرية الزاويتين المتبادلتين خارجيا.

استعد للدرس اللاحق

أوجد قيمة x وأطوال الأضلاع المجهولة في كل مثلث مما يأتي:

٤٠)



$$11x - 8 = 7x$$

$$11x - 7x = 8$$

$$4x = 8$$

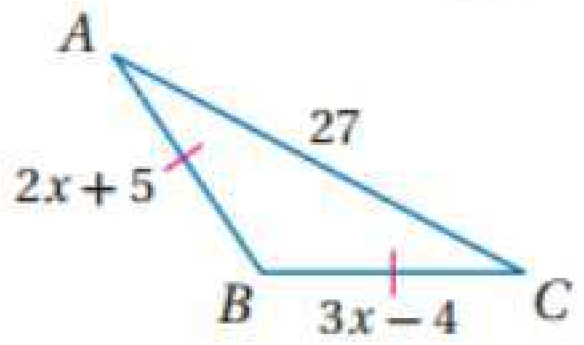
$$x = 2$$

$$KL = 11x - 8 = 11 \times 2 - 8 = 14$$

$$KJ = 7x = 7 \times 2 = 14$$

$$JL = x + 12 = 2 + 12 = 14$$

٤١)



$2x + 5 = 3x - 4$

$2x - 3x = -4 - 5$

$-x = -9$

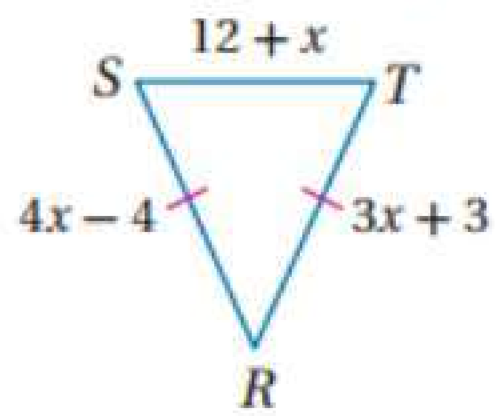
$x = 9$

$BC = 3x - 4$

$= 3 \times 9 - 4 = 23$

$AB = BC = 23$

٤٢)



$4x - 4 = 3x + 3$

$x = 3 + 4$

$x = 7$

$RT = 3 \times 7 + 3 = 24$

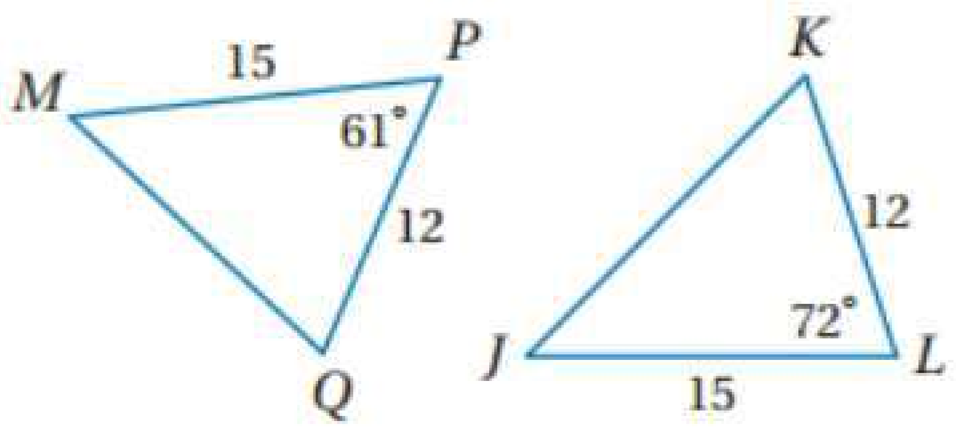
$SR = RT = 24$

$ST = 12 + 7 = 19$

٤-٦ المتباينات في مثلثين

تحقق

(1A

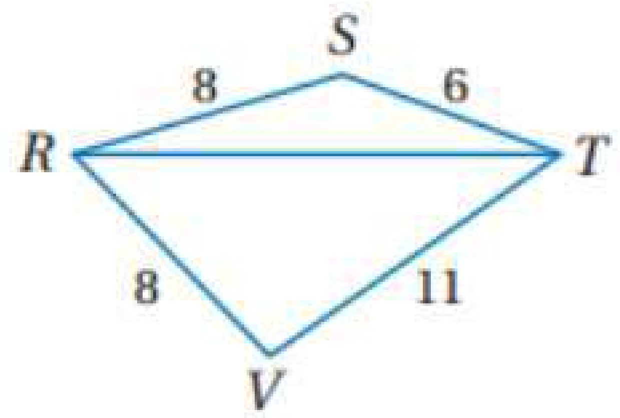


بما أن $PQ \cong LK$ و $JL \cong MP$ و

$\angle MPQ < \angle KLJ$

إذن حسب متباينة SAS: $MQ < JK$

(1B



بما أن $RV \cong RS$ و $RT \cong RT$ حسب خاصية الانعكاس و $ST < VT$

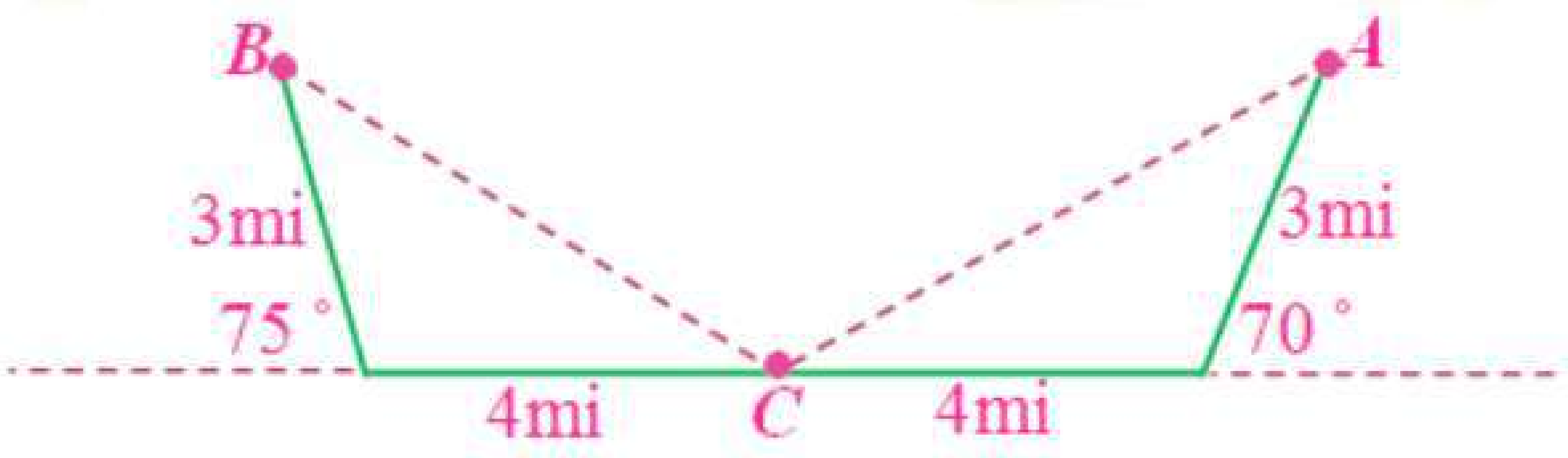
إذن عكس حسب متباينة SAS: $\angle SRT < \angle TRV$

تحقق

2A) التزلج على الجليد:

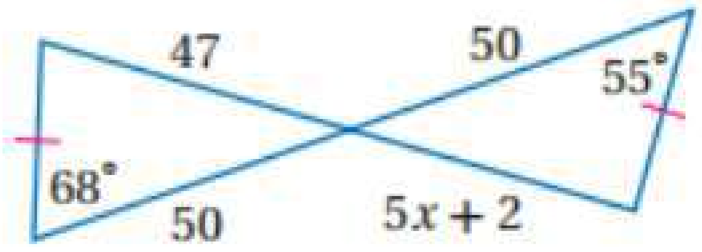
المجموعة A ؛ قياس الزاوية المحصورة للمسار الذي سلكته المجموعة A يساوي $70° - 180°$ أو $105°$.

وبما أن $105° < 110°$، فحسب متباينة SAS يكون $BC < AC$ أي أن المجموعة A أبعد من المجموعة B من مكان الانطلاق.



تحقق

٣)



في هذا الشكل يوجد ضلعان في كل مثلث يطابقان ضلعان في المثلث الأخر

و $\angle 68^\circ > \angle 55^\circ$ إذن حسب متباينة SAS:

$$47 > 5x + 2$$

$$47 - 2 > 5x$$

$$45 > 5x$$

$$9 > x$$

وحسب نظرية متباينة المثلث وبفرض أن الضلع الثالث x :

$$5x + 2 > 0$$

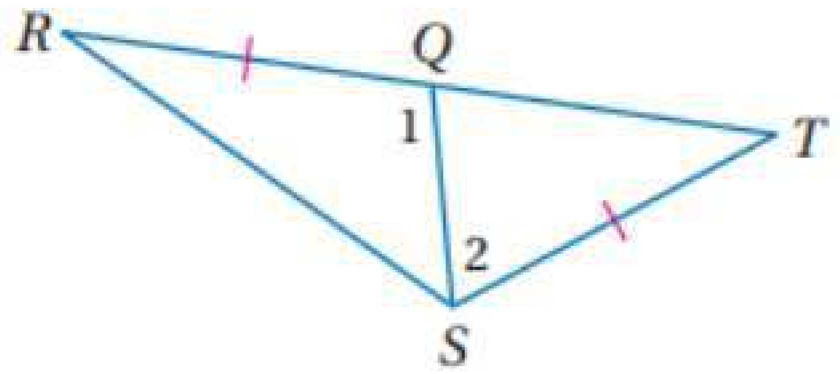
$$5x > -2$$

$$x > \frac{-2}{5}$$

$$x > -0.4$$

$$-0.4 < x < 9$$

٤) اكتب برهانا ذا عمودين:



المعطيات: $\overline{RQ} \cong \overline{ST}$

المطلوب: $RS > TQ$

البرهان: العبارات (المبررات)

1) $\overline{RQ} \cong \overline{ST}$ (معطى)

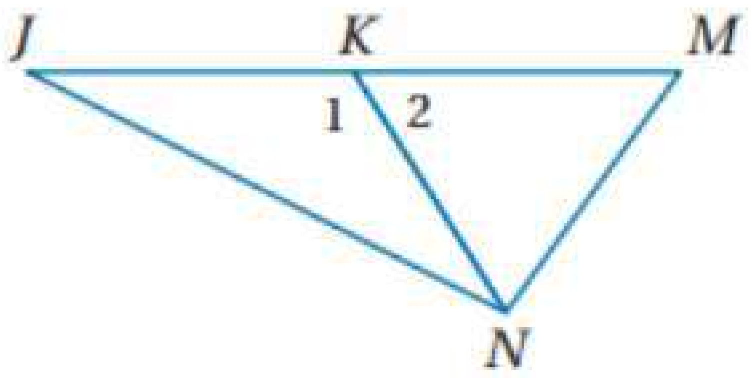
2) $\overline{QS} \cong \overline{QS}$ (خاصية الانعكاس)

3) $\angle 1$ (زاوية خارجية بالنسبة للمثلث QST تعريف الزاوية الخارجية)

4) $m\angle 2 > m\angle 1$ (قياس الزاوية الخارجية أكبرمن قياس أي من الزاويتين الداخلتين البعيدتين)

5) $RS > TQ$ (حسب متباينة SAS)

٥) اكتب برهاناً ذا عمودين:



المعطيات: $\overline{NK}$ قطعة متوسطة في ΔJMN.

$JN > NM$

المطلوب: $m\angle 1 > m\angle 2$

البرهان: العبارات (المبررات)

1) $\overline{NK}$ قطعة متوسطة في ΔJMN (معطى)

2) K نقطة منتصف $\overline{JM}$ (تعريف القطعة المتوسطة)

3) $\overline{JK} \cong \overline{KM}$ (نظرية نقطة منتصف)

4) $\overline{KN} \cong \overline{KN}$ (خاصية الانعكاس)

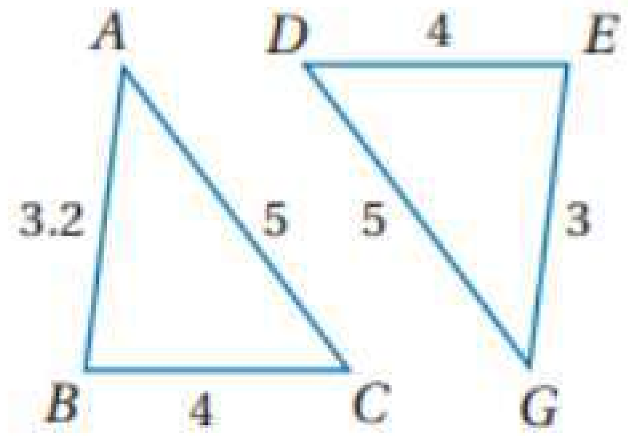
5) $JN > NM$ (معطى)

6) $m\angle 1 > m\angle 2$ (عكس متباينة SAS)

تأكد

قارن بين القياسين المحددين في كل من السؤالين الآتيين: المثال ١

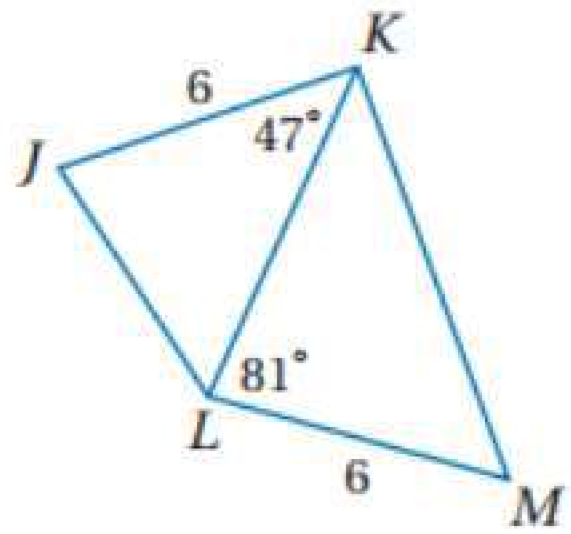
١)



بما أن $AC \cong DG$ و $BC \cong DE$ و $AB > EG$

إذن حسب عكس متباينة SAS: $m\angle ACB > m\angle EDG$

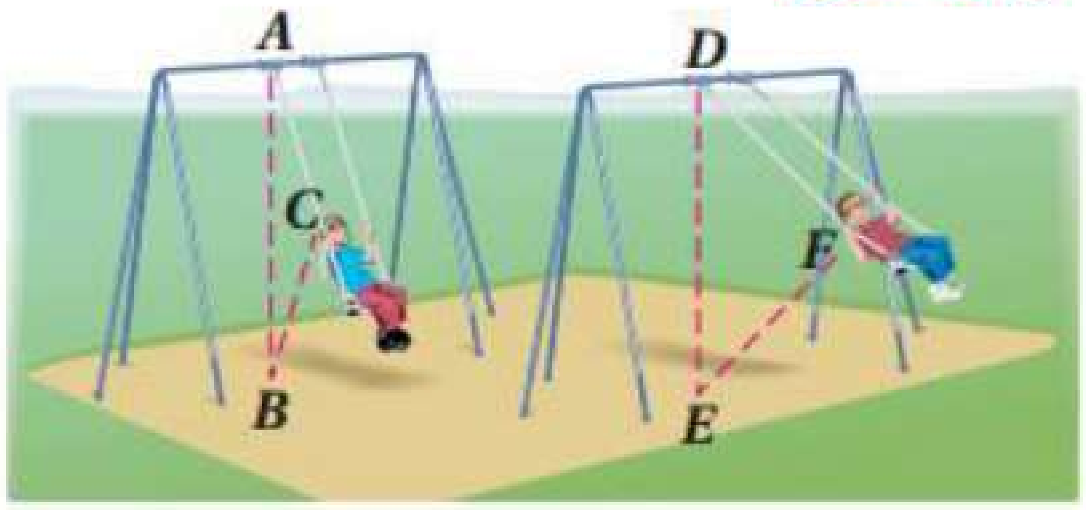
٢)



بما أن $JK \cong LM$ و $LK \cong LK$ حسب خاصية الانعكاس و $MLK > LKJ$

إذن حسب متباينة SAS: $KM > JL$

٣) أراجيح:

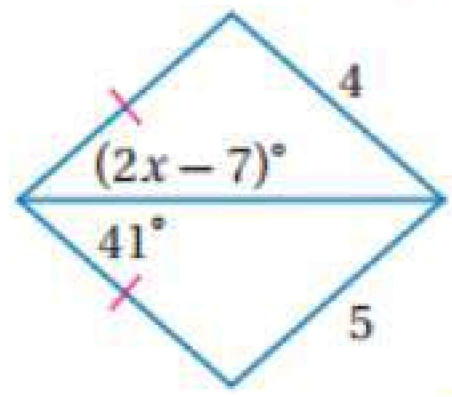


(3a $\overline{AB} \cong \overline{DE}, \overline{AC} \cong \overline{DF}$

(3b $\angle D$ ؛ بما أن $EF > BC$ فإن $m\angle D > m\angle A$ حسب نظرية المفصلة.

اكتب متباينة تمثل مدى القيم الممكنة لـ x في كل مما يأتي:

٤)



في الشكل المقابل: يوجد في كل مثلث ضلع يطابق ضلع في المثلث الأخر ويوجد ضلع مشترك بينهما متطابقا بحسب خاصية الانعكاس ويوجد طول ضلع في إحدى المثلثين أكبر من الضلع المقابل له في المثلث الأخر إذن بحسب عكس متباينة SAS زاوية $\angle 41^\circ$ أكبر من $\angle 2x-7$

$$41 > 2x - 7$$

$$41 + 7 > 2x$$

$$48 > 2x$$

$$24 > x$$

وبما أن أي زاوية في المثلث أقل من ١٨٠ إذن:

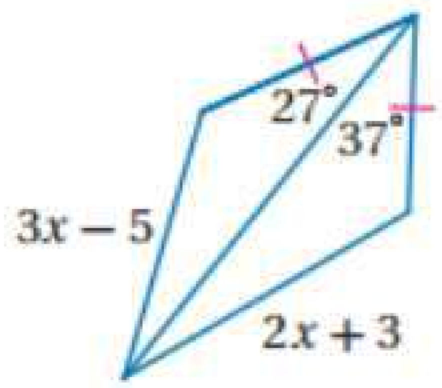
$$2x - 7 > 0$$

$$2x > 7$$

$$x > \frac{7}{2}$$

$$\frac{7}{2} < x < 24$$

٥)



في الشكل المقابل: يوجد في كل مثلث ضلع يطابق ضلع في المثلث الأخر ويوجد ضلع مشترك بينهما متطابقا بحسب خاصية الانعكاس ويوجد زاوية في إحدى المثلثين $\angle 37^\circ$ أكبر من $\angle 27^\circ$ إذن حسب متباينة SAS

$\because 2x+3>3x-5$

$2x+3-2x>3x-5-2x$

$3>x-5$

$\therefore 8>x$

$\because 2x+3>0$ $\quad$ $3x-5>0$

$2x>-3$ $\quad$ $3x>5$

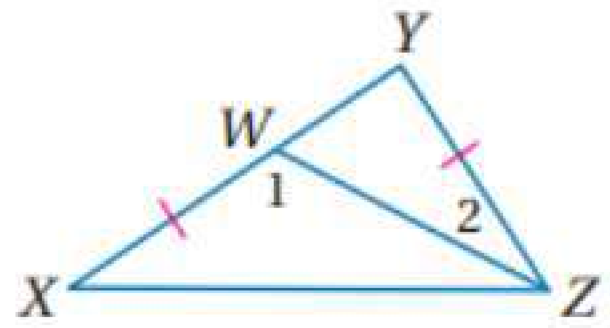
$x>-\frac{3}{2}$ $\quad$ $x>\frac{5}{3}$

$\therefore x>\frac{5}{3}$

$\frac{5}{3}<x<8$

برهان: اكتب برهانا ذا عمودين في كل من السؤالين ٦ , ٧: المثالان ٥, ٤

٦)



المعطيات: ΔYZX ، $\overline{YZ}\cong\overline{XW}$

المطلوب: $ZX>YW$

البرهان: العبارات (المبررات)

1) ΔYZX ، $\overline{YZ}\cong\overline{XW}$ (معطى)

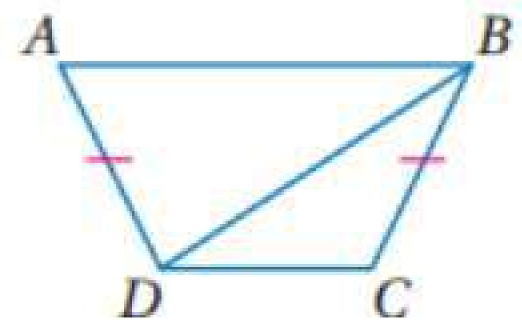
2) $\overline{ZW}\cong\overline{ZW}$ (خاصية الانعكاس)

3) $\angle 1$ زاوية خارجية لـ ΔYZW (تعريف الزاوية الخارجية)

4) $m\angle 1>m\angle 2$ (قياس الزاوية الخارجية لمثلث أكبر من قياس أي من الزاويتين الداخلتين البعيدتين)

5) $ZX>YW$ (المتابينة SAS)

٧)



المعطيات: $\overline{AD} \cong \overline{CB}, DC < AB$

المطلوب: $m\angle CBD < m\angle ADB$

البرهان: العبارات (المبررات)

١) $\overline{AD} \cong \overline{CB}$ (معطى)

٢) $\overline{DB} \cong \overline{DB}$ (خاصية الانعكاس)

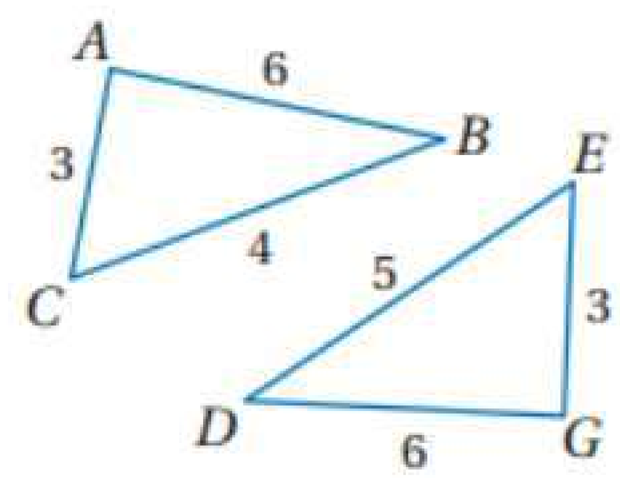
٣) $DC < AB$ (معطى)

٤) $m\angle CBD < m\angle ADB$ (المتباينة SSS)

تدرب وحل المسائل

قارن بين القياسين المحددين في كل من الأسئلة الآتية: المثال ١

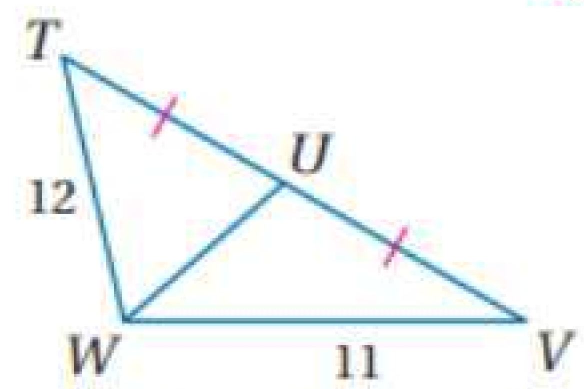
٨)



بما أن $AC \cong EG$ و $AB \cong DG$ و $DE > CB$

إذن حسب عكس متباينة SAS: $m\angle DGE > m\angle BAC$

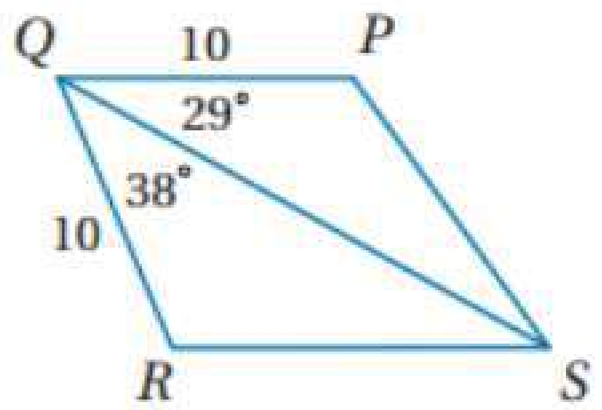
٩)



بما أن $TU \cong UV$ و $WU \cong WU$ حسب خاصية الانعكاس و $TW > WV$

إذن حسب عكس متباينة SAS: $TUW > WUV$

(١٠



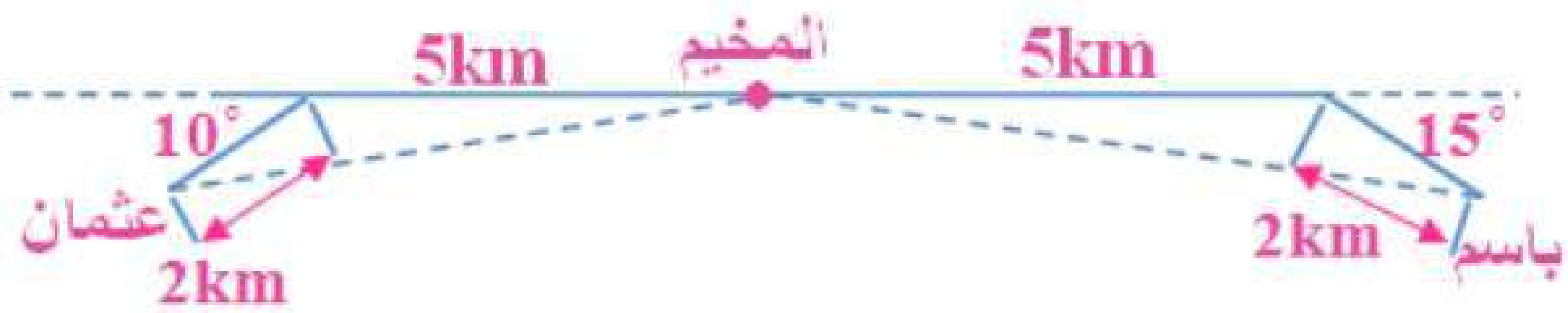
بما أن $QR \cong QP$ و $QS \cong QS$ حسب خاصية الانعكاس و $PQS > SQR$

إذن حسب متباينة SAS: $PS > RS$

١١) رحلة صيد: المثال٢

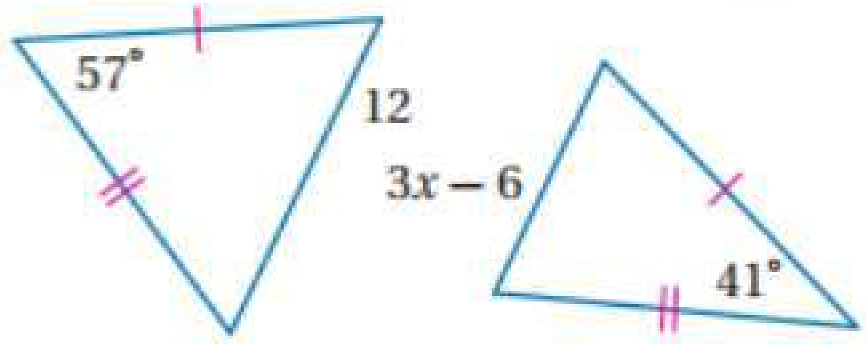
11a) عثمان؛ انعطف باسم °15 جنوبا، لذلك فقياس الزاوية المقابلة للضلع الذي يمثل بعده عن المخيم يساوي $180° - 15°$ أو °165. أما عثمان فقد انعطف °35 شمالا لذلك فقياس الزاوية المقابلة للضلع الذي يمثل بعده عن المخيم يساوي $180° - 35°$ أو °145. وحسب متباينة SAS: بما أن $165° > 145°$ فإن عثمان يكون أقرب عن المخيم.

11b) عثمان؛ انعطف باسم °15 جنوبا، لذلك فقياس الزاوية المقابلة للضلع الذي يمثل بعده عن المخيم يساوي $180° - 15°$ أو °165. أما عثمان فقد انعطف °10 لذلك فقياس الزاوية المقابلة للضلع الذي يمثل بعده عن المخيم يساوي °10 - °180 أو °170. وحسب متباينة SAS: بما أن $165° > 170°$ فإن عثمان يكون أبعد عن المخيم.



اكتب متباينة تمثل مدى القيم الممكنة لـ x في كل مما يأتي:

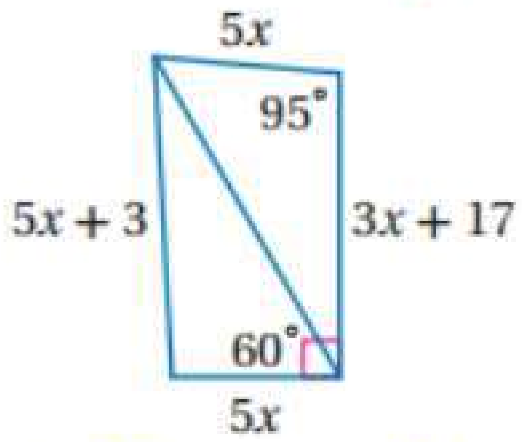
(١٢



بما أن يوجد ضلعان في المثلث الاول يطابقهما ضلعان في المثلث الأخرويوجد زاوية بين إحدى الضلعين أكبر من الزاوية الاخرى إذن حسب متباينة SAS:

$$12 > 3x - 6$$
$$18 > 3x$$
$$6 > x$$
$$3x - 6 > 0$$
$$3x > 6$$
$$x > 2$$
$$2 < x < 6$$

(١٣



بما أنه يوجد ضلعان متطابقان اللذي طولهما $5x, 5x$ ويوجد ضلع مشترك حسب خاصية الانعكاس و $60^\circ > \left(180^\circ - \left(95^\circ + 30^\circ\right)\right)$ أو $60^\circ > 55^\circ$

إذن حسب متباينة SAS:

$$5x + 3 > 3x + 17$$
$$5x - 3x > 17 - 3$$
$$2x > 14$$
$$x > 7$$

$3x + 17 > 0$

$3x > -17$

✗ $x > \frac{-17}{3}$

$\because 5x + 3 > 0$

$5x > -3$

✗ $x > -\frac{3}{5}$

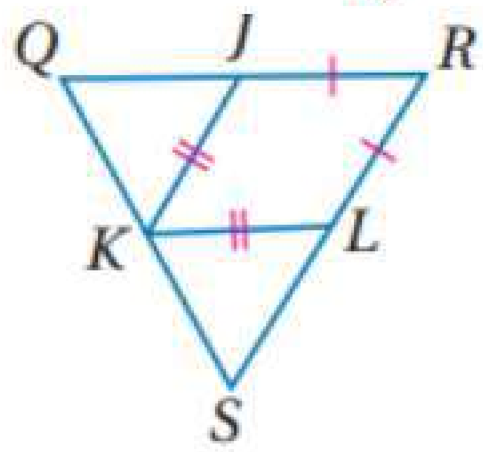
إذن المتباينة هي $x > 7$

١٤) خزائن:

خزانة سليم، بما أن عرضي البابين متساويين وفتحتا الخزانتين متساويتان أيضا وبما أن $17in > 12in$؛ إذن قياس الزاوية التي يكونها باب سليم أكبر من قياس الزاوية التي يكونها باب ماجد بحسب متباينة SAS.

برهان: اكتب برهان ذا عمودين: المثالان ٤،٥

١٥)



البرهان: العبارات (المبررات)

١) $\overline{LK} \cong \overline{JK}$، K نقطة منتصف $\overline{QS}$، $m\angle SKL > m\angle QKJ$ (معطيات)

٢) $SK = QK$ (تعريف نقطة المنتصف)

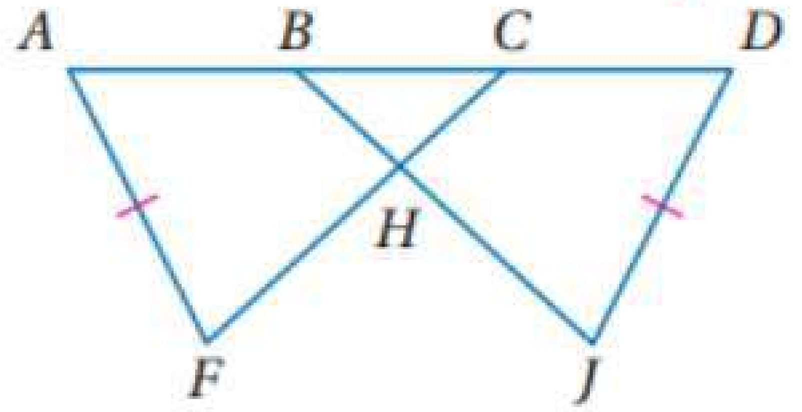
٣) $SL > QJ$ (متباينة SAS)

٤) $\overline{RL} \cong \overline{RJ}$ (معطى)

٥) $RL = RJ$ (تعريف القطع المستقيمة المتطابقة)

٦) $SR > QR$

١٦)



البرهان: العبارات (المبررات)

١) $\overline{AF} \cong \overline{DJ}, \overline{FC} \cong \overline{JB}, AB > DC$

٢) $\overline{BC} \cong \overline{BC}$ (خاصية الانعكاس)

٣) $\overline{BC} = \overline{BC}$ (تعريف القطع المستقيمة المتطابقة)

٤) $AB + BC = AC, DC + CB = DB$ (مسلمة جمع القطع المستقيمة)

٥) $AB + BC > DC + CB$ (خاصية الاضافة)

٦) إذن حسب متباينة SAS: $\angle AFC > \angle BJD$

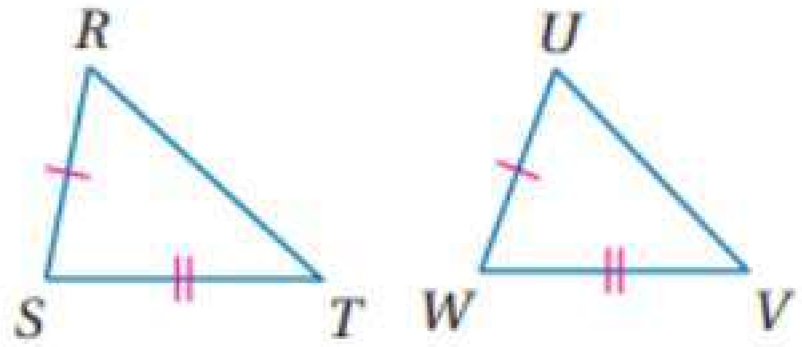
17a) تمرين:

الوضع 1؛ إذا قست المسافة من المرفق إلى الكف في كلا الوضعين باستعمال المسطرة ستجدها أطول في الوضع ١.

17b)

الوضع ١ ؛ باستعمال نتيجة الفرع a ومتباينة SAS، تعلم أن قياس الزاوية المقابلة للضلع الأطول هي الأكبر لذلك فالزاوية عند المرفق في الوضع ١ هي الأكبر.

١٨) برهان غير مباشر:



الخطوة ١: أفترض أن $m\angle S \leq m\angle W$

الخطوة ٢: إذاا كان $m\angle S \leq m\angle W$، فإن $m\angle S < m\angle W$ أو
$m\angle S = m\angle W$

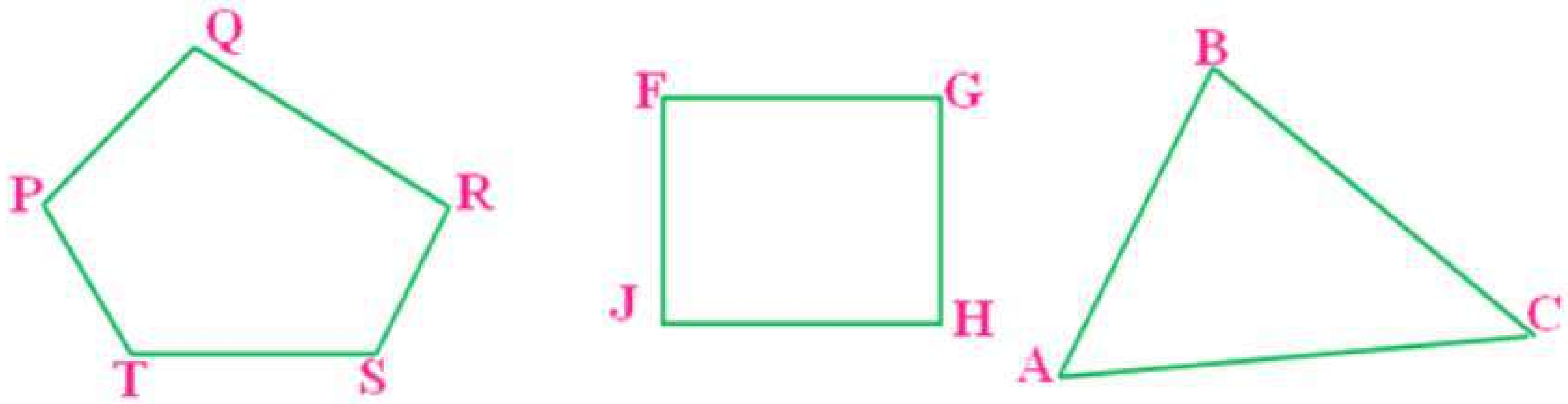
الحالة١: إذا كان $m\angle S < m\angle W$ فإن $RT < UV$ حسب المتباينة SAS.

الحالة ٢:

إذا كان $m\angle S = m\angle W$، فإن $\Delta RST \cong \Delta UVW$ حسب SAS، ويكون $\overline{RT} \cong \overline{UV}$ لأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين تكون متطابقة لذلك $\overline{RT} = \overline{UV}$.

الخطوة ٣: الحالتان تؤديان إلى تناقص مع المعطى $\overline{RT} > \overline{UV}$. لذلك فالفرض يجب أن يكون خطأ والنتيجة $m\angle S > m\angle W$، ستكون صحيحة.

19a) تمثيلات متعددة:



(19b

عدد الأضلاع	قياسات الزوايا				مجموع قياسات الزوايا
3	$m\angle A$	59	$m\angle C$	45	180
	$m\angle B$	76			
4	$m\angle F$	90	$m\angle H$	90	360
	$m\angle G$	90	$m\angle J$	90	
5	$m\angle P$	105	$m\angle S$	116	540
	$m\angle Q$	100	$m\angle T$	123	
	$m\angle R$	96			

(19c

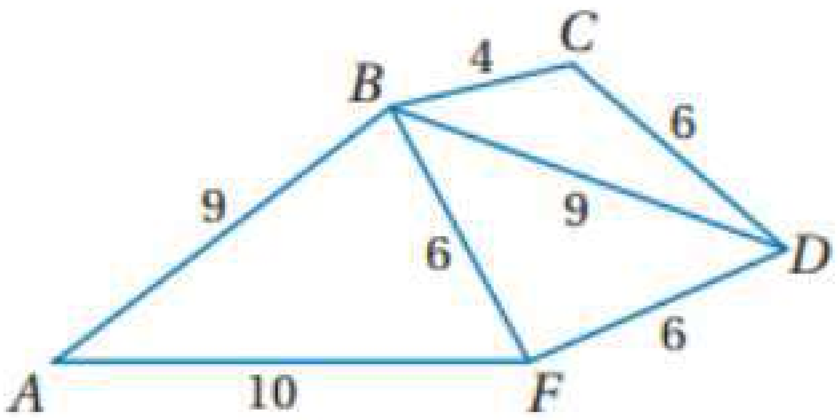
مجموع قياسات زاوايا المضلع يساوي ناتج ضرب $180°$ في عدد أضلاع المضلع مطروحا منها ٢.

(19d

التبرير الاستقرائي ؛ بما إنني استعملت نمطا للتوصل إلى التخمين فإن التبرير الذي استعملته هو التبرير الاستقرائي.

(19e $180^{\circ}(n-2)$

استعمل الشكل المجاور:



(٢٠

بما أن $CD \cong FD$ و $BD \cong BD$ حسب خاصية الانعكاس و $FD > BC$

إذن عكس حسب متباينة SAS: $m\angle BDC > m\angle FDB$

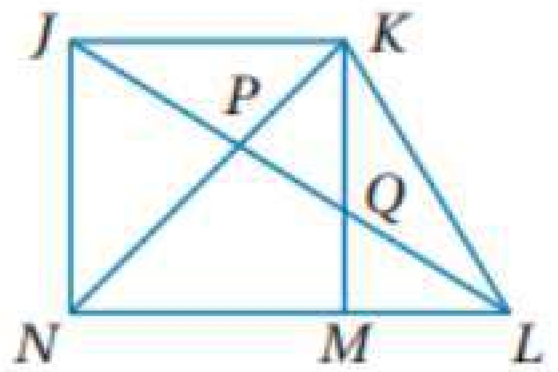
(٢١

بما أن $BD \cong AB$ و $BF \cong FD$ و $AF > FB$

إذن عكس حسب متباينة SAS: $m\angle ABF > m\angle BDF$

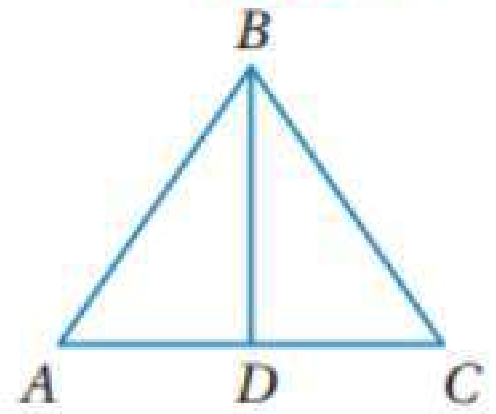
مسائل مهارات التفكير العليا

٢٢) تحد:



في المثلثين JNL, JKL معطى أن $m\angle LJN > m\angle KJL$
$\overline{JN} \cong \overline{KJ}, \overline{JL} \cong \overline{JL}$ ولذلك، وحسب متباينة SAS يكون $LN > LK$. وفي ΔLKN، $LN > LK$ وهذا يعني أن $m\angle LNK > m\angle LKN$.

٢٣) تبرير:



لا تكون حادة أبدا من عكس متباينة SAS، $\angle ADB < \angle BDC$، وبما أن $\angle BDC, \angle ADB$ متجاورتان على مستقيم فإن،
$m\angle ADB + m\angle BDC = 180^\circ$. ولأن $m\angle BDC > m\angle ADB$
فيجب أن يكون $m\angle BDC$ أكبر من 90° و $m\angle ADB$ سيكون أصغر من 90°
ولذلك حسب تعريف الزاوية المنفرجة والزاوية الحادة تكون $\angle BDC$ منفرجة دائما و $\angle ADB$ حادة دائما.

٢٥) اكتب:

تتطلب كل من المسلمة SAS والمتباينة SAS أن يكون هناك زوجان من الأضلاع المتطابقة وزوج من الزوايا المحصورة. وباستعمال المسلمة SAS لتطابق المثلثات، إذا كانت الزاويتان المحصورتان متطابقتين فإن المثلثين يكونان متطابقين. وباستعمال متباينة SAS، إذا كانت إحدى الزاويتين المحصورتين أكبر من الأخرى فإن الضلع المقابل للزاوية الأكبر يكون أطول من الضلع المقابل للزاوية الأصغر في المثلث الآخر.

تدريب على الاختبار المعياري

C (٢٦

بحسب عكس متباينة SAS:

$46^\circ > 5x - 14$

$46 + 14 > 5x$

$60 > 5x$

$12 > x$

استعمال حقيقة أن أي زاوية في مثلث اقل من 180°:

$5x - 14 > 0$

$5x > 14$

$5x > 14$

$x > \frac{14}{5}$

$2.8 < x < 12$

B (٢٧

طول القطر = $(x+3)\sqrt{2} = x\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$

مراجعة تراكمية

اكتب متباينة تمثل مدى طول الضلع الثالث:

(٢٨

بفرض أن طول الضلع الثالث x

$3.2 + 4.4 \overset{?}{>} x$

$7.6 > x$ أو $7.6 < x$

$3.2 + x \overset{?}{>} 4.4$

$x > 1.2$

$4.4 + x \overset{?}{>} 3.2$

$x > -1.2$

$1.2 < x < 7.6$

(٢٩

بفرض أن طول الضلع الثالث x

$$5+10 \overset{?}{>} x$$

$15 > x$ أو $15 < x$

$$5+x \overset{?}{>} 10 \qquad 10+x \overset{?}{>} 5$$

$$x > 5 \qquad x > -5$$

$$5ft < x < 15ft$$

(٣٠

بفرض أن طول الضلع الثالث x

$$3+9 \overset{?}{>} x$$

$12 > x$ أو $12 < x$

$$3+x \overset{?}{>} 9 \qquad 9+x \overset{?}{>} 3$$

$$x > 6 \qquad x > -6$$

$$6ft < x < 12ft$$

٣١) رحلات:

أفرض أن تكلفة رحلة ماجد x وتكلفة رحلة صديقه y.

الخطوة ١:

المعطيات: $x + y > 500$

المطلوب: $x > 250$ أو $y > 250$

برهان غير مباشر:

أفرض أن $x \le 250$ و $y \le 250$

الخطوة ٢: إذا كانت $x \le 250$ و $y \le 250$ فإن $x + y \le 250 + 250$

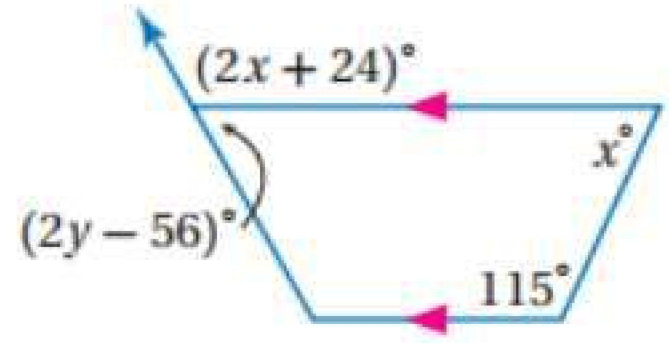
أو $x + y \le 500$ وهذا يناقض الفرض بأن $x + y > 500$.

الخطوة ٣: بما أن الفرض $x \le 250$ و $y \le 250$ أدى تناقض مع حقيقة معلومة فإنه افتراض خطأ. لذلك فالنتيجة بأن $x > 250$ أو $y > 250$ نتيجة صحيحة إذن فتكلفة رحلة أحدهما كانت أكبر من ٢٥٠ ريال.

استعد للدرس اللاحق

أوجد قيمة كل من x, y في الأسئلة الآتية:

(٣٢



حسب نظرية الزاويتين المتخالفتين:

$$x + 115 = 180$$

$$x = 180 - 115$$

$$x = 65^\circ$$

حسب نظرية الزاويتين المتكاملتين:

$$(2x + 24)^\circ = 2 \times 65 + 24 = 154$$

$$154 + 2y - 56 = 180$$

$$2y - 56 = 180 - 154$$

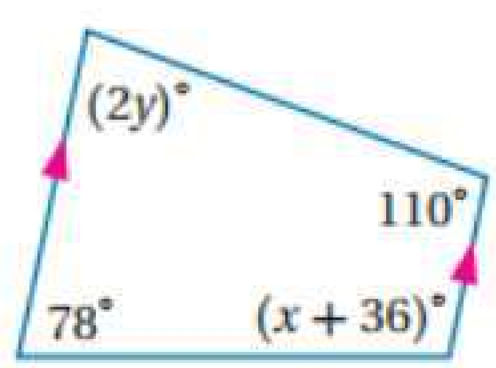
$$2y - 56 = 26$$

$$2y = 26 + 56$$

$$2y = 82$$

$$y = 41$$

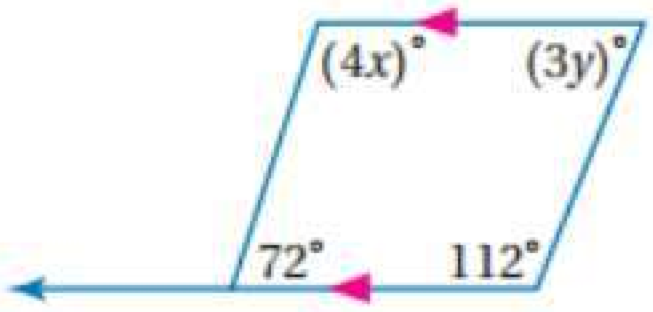
(٣٣



حسب نظرية الزاويتين المتحالفتين:

$$x + 36 + 110 = 180$$
$$x + 146 = 180$$
$$x = 180 - 146$$
$$x = 34$$
$$2y + 78 = 180$$
$$2y = 180 - 78$$
$$2y = 102$$
$$y = 51$$

٣٤)



حسب نظرية الزاويتين المتحالفتين:

$$4x + 72 = 180$$
$$4x = 180 - 72$$
$$4x = 108$$
$$x = 27$$
$$3y + 112 = 180$$
$$3y = 68$$
$$y = 22.66$$

دليل الدراسة والمراجعة

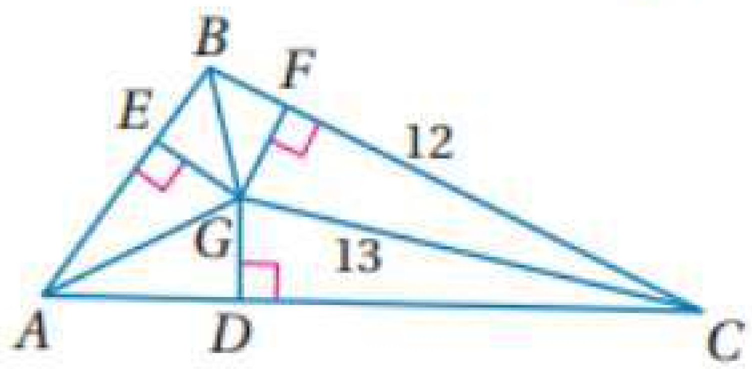
صـ ٢٥٧ : اختبار المفردات:

١) خطأ؛ ملتقى الارتفاعات
٢) خطأ؛ منصفات الزوايا
٣) صحيحة
٤) صحيحة
٥) خطأ؛ القطع المتوسطة
٦) خطأ؛ خطأ
٧) صحيحة
٨) خطأ؛ بالرأس المقابل لذلك الضلع
٩) صحيحة

الفصل 4 دليل الدراسة والمراجعة

4-1 المنصفات في المثلث (ص 217-209)

١٠)



بما أن G هو مركز الدائرة الداخلية للمثلث ΔABC فإن $EG = FG = GD$
وباستعمال فيثاغورث:

$$(GC)^2 = (GF)^2 + (FC)^2$$

$$(13)^2 = (GF)^2 + (12)^2$$

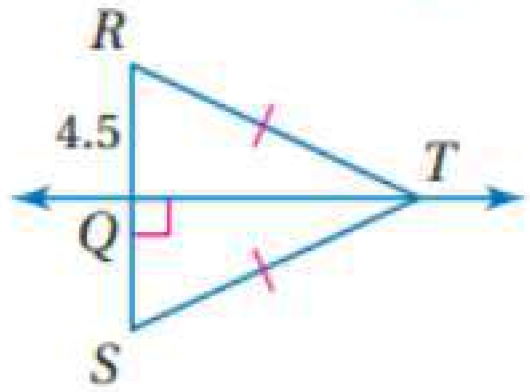
$$(GF)^2 = (13)^2 - (12)^2$$

$$(GF)^2 = 25$$

$$GF = EG = 5$$

أوجد طول كل من القطعتين المستقيمتين الآتيتين:

(١١



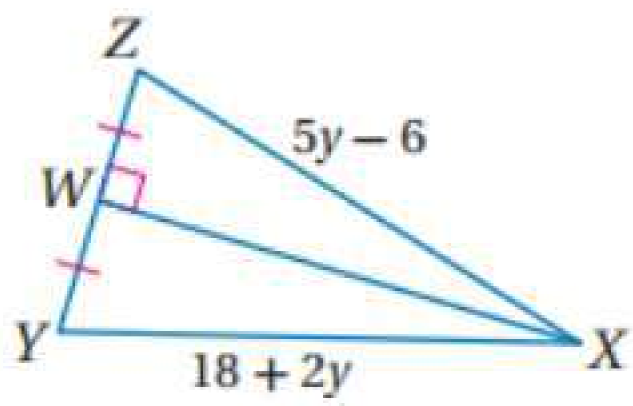
بما أن $RT = TS$ و $RS \perp TQ$ إذن حسب نظرية عكس نظرية العمود المنصف

$RQ = QS = 4.5$

$RS = 4.5 + 4.5$

$RS = 9$

(١٢ ٣٤



بما أن $ZY \perp WX$ و WX ينصف ZY إذن حسب نظرية نظرية العمود المنصف

$ZX = YX$

$5y - 6 = 18 + 2y$

$5y - 2y = 18 + 6$

$3y = 24$

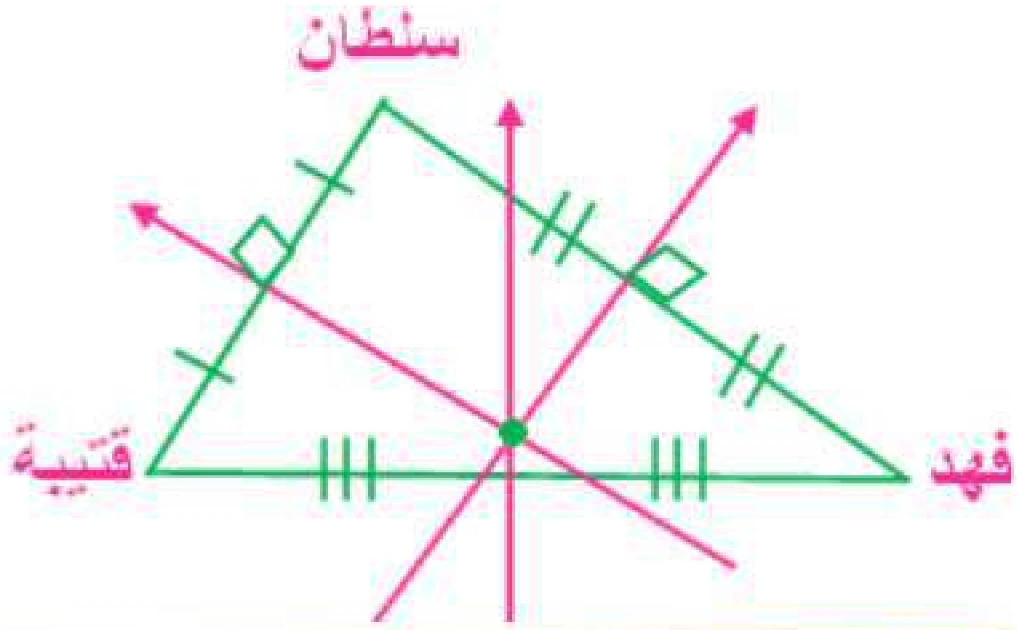
$y = 8$

$XZ = 5Y - 6$

$XZ = 5 \times 8 - 6$

$RS = 34$

١٣) كرة قدم:



2-4 القطع المتوسطة والارتفاعات في المثلث (ص 226-219)

١٤)

$$D(0,0), E(0,7), F(6,3)$$

أوجد معادلة ارتفاع من D إلى $\overline{EF}$

بما أن ميل $\overline{EF}$ يساوي $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-7}{6-0} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$

فإن ميل الارتفاع العمودي على $\overline{EF}$ يساوي $\frac{3}{2}$

$y - y_1 = m(x - x_1)$ صيغة الميل ونقطة

$$D(0,0),\ m = \frac{3}{2}$$

$$y - 0 = \frac{1}{2}(x - 0)$$

$$y = \frac{3}{2}x \rightarrow 1$$

معادلة الإرتفاع من E إلى $\overline{DF}$

بما أن ميل $\overline{DF}$ يساوي $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-0}{6-0} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

فإن ميل الارتفاع العمودي على $\overline{DF}$ يساوي -2

$y - y_1 = m(x - x_1)$ صيغة الميل ونقطة

$$E(0,7),\ m = -2$$

$$y-7=-2(x-0)$$
$$y-7=-2x$$
$$y=-2x+7\to 2$$

حل المعادلتين ١ و ٢

$$y=-2x+7$$
$$y=\frac{3}{2}x$$
$$\frac{3}{2}x=-2x+7$$
$$\frac{3}{2}x+2x=7$$
$$3.5x=7$$
$$x=2$$
$$y=\frac{3}{2}x$$
$$y=\frac{3}{2}\times 2$$
$$y=3$$

إذن احداثيات ملتقى ارتفاعات ΔDEF هي $(2,3)$

١٥) احتفالات:

ايجاد نقطة المنتصف للنقطة D للضلع $\overline{AC}$

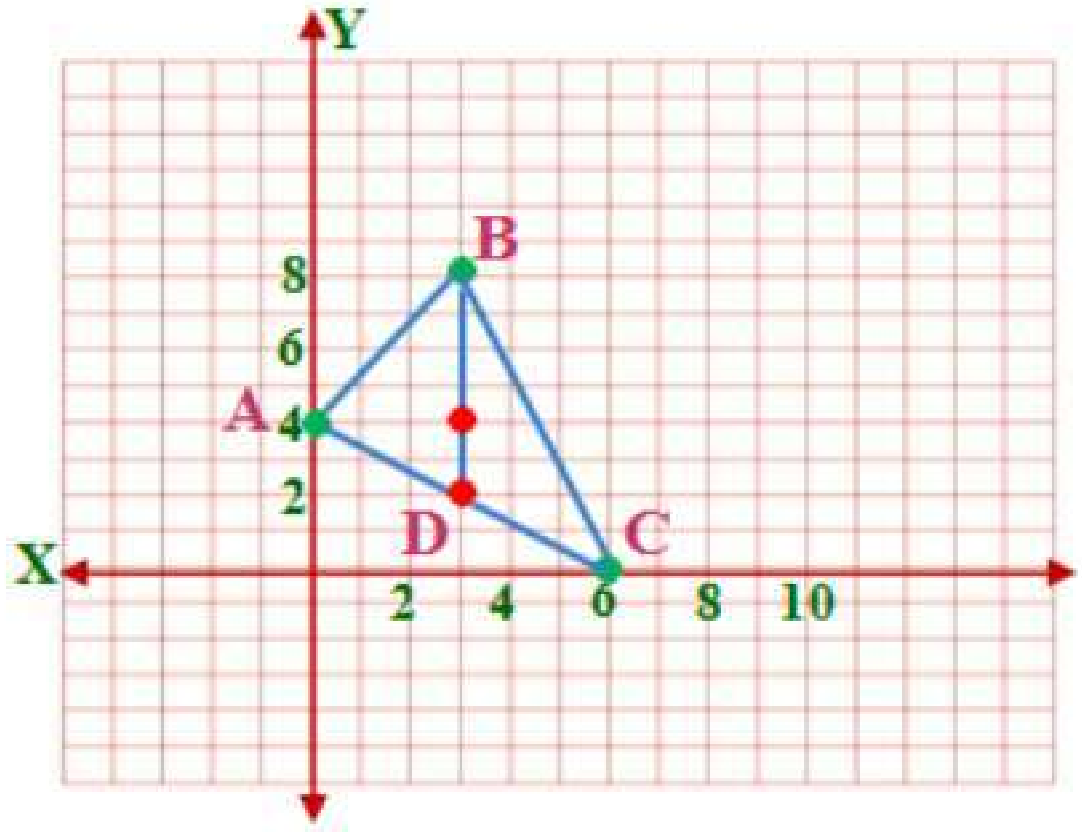
$$A(0,4),C(6,0)$$
$$D\left(\frac{0+6}{2},\frac{0+4}{2}\right)=D(3,2)$$

المسافة من $D(3,2)$ إلى $B(3,8)$ تساوي $8-2$ أي ٦ وحدات

واذا كانت P هي مركز ΔABC فإن $BP=\frac{2}{3}BD$ ولذلك يقع المركز على بعد

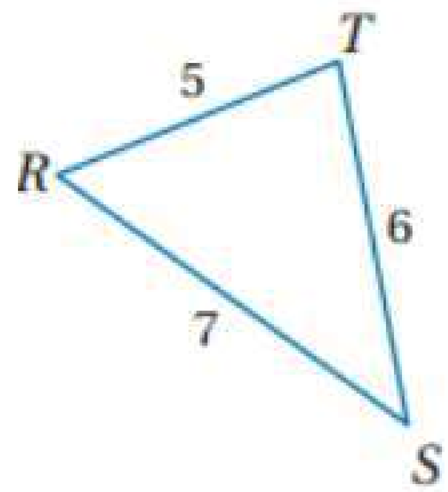
$6\times\frac{2}{3}$ أو ٤ وحدات وتكون احداثيات P هي $(3,8-4)$

إذن يتوازن المثلث عند النقطة $(3,4)$



4-3 المتباينات في المثلث (ص 227-233)

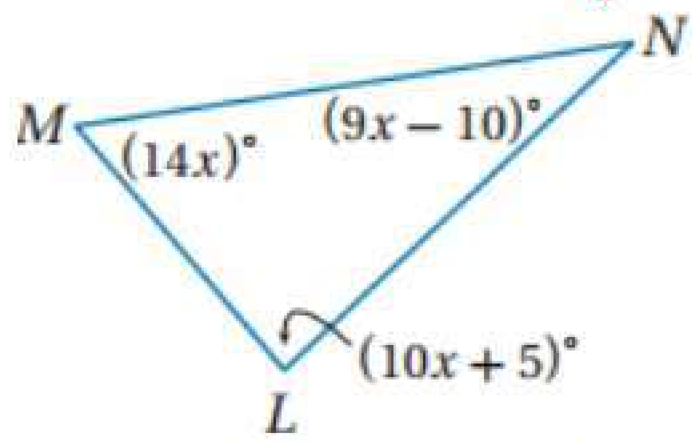
(١٦



الأضلاع بالترتيب من الأقصر إلى الأطول هي : $\overline{RT}, \overline{TS}, \overline{RS}$

الزوايا بالتريب من الأصغر إلى الأكبرهي: $\angle S, \angle R, \angle T$

(١٧



بما أن مجموع قياسات زوايا أي مثلث = ١٨٠ إذن:

$$14x + 9x - 10 + 10x + 5 = 180$$

$$33x - 5 = 180$$

$$33x = 185$$

$$x = 5.6$$

$$(14x)^\circ = 78.4$$

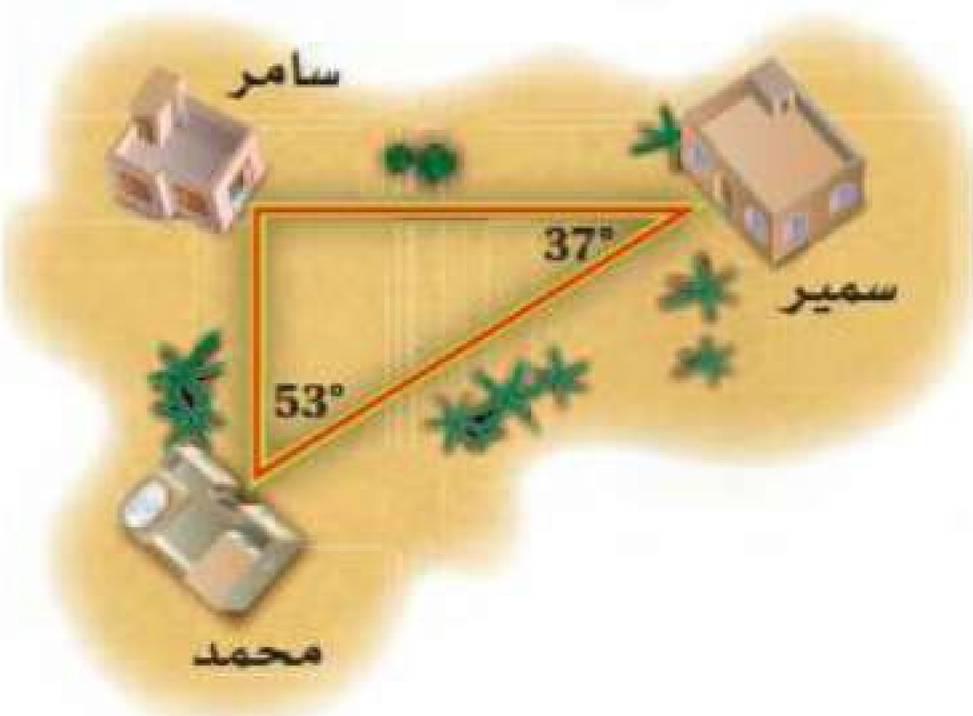
$$(9x - 10)^\circ = 40.4$$

$$(10x + 5)^\circ = 61$$

الزوايا بالتريب من الأصغر إلى الأكبر هي: $\angle N, \angle L, \angle M$

الأضلاع بالترتيب من الأقصر إلى الأطول هي : $\overline{ML}, \overline{MN}, \overline{LN}$

١٨) جيران:



الطريق الأقصر اصطحاب محمد لسامر وذهابهما معا إلى بيت سمير.

4-4 البرهان غير المباشر (ص 241-235)

١٩) $m\angle A < m\angle B$

٢٠) $\Delta FGH \ncong \Delta MNO$

٢١) ΔKLM ليس قائم الزاوية.

٢٢) $y \geq 4$

٢٣)

أفرض أن قياس إحدى الزاويتين x وقياس الأخرى y ومن تعريف الزوايا المتتامة يكون $x + y = 90$.

الخطوة ١: افرض أن الزاوية التي قياسها x زاوية قائمة. فيكون $x = 90^\circ$

الخطوة ٢: بما أن $x = 90^\circ$ فإن $x + y > 90^\circ$ وهذا تناقض لأننا نعلم أن $x + y = 90$.

الخطوة ٣: بما أن الفرض بأن إحدى الزاويتين قائمة أدى إلى تناقض فإن هذا الفرض خطأ لذلك فالنتيجة بأن كلا من الزاويتين ليست قائمة هي نتيجة صحيحة بالتأكيد.

٢٤) مطالعة:

أفرض أن ثمن أحد الكتابين x وثمن الآخر y.

المعطيات: $x + y > 180$

المطلوب: إثبات أن $x > 90$ أو $y > 90$

برهان غير مباشر:

الخطوة ١: أفرض $x \le 90$ و $y \le 90$

الخطوة ٢: إذا كانت $x \le 90$ و $y \le 90$ فإن

$x + y \le 90 + 90$ أو $x + y \le 180$ وهذا تناقض لأننا نعلم أن $x + y > 180$.

الخطوة ٣: بما أن الفرض $x \le 90$ و $y \le 90$ أدى إلى تناقض مع حقيقة معطاه فإن هذا الفرض خطأ وبذلك تكون النتيجة بأن $x > 90$ أو $y > 90$ صحيحة أي أن ثمن كتاب واحد على الأقل يزيد عن 90 ريالا.

4-5 متباينة المثلث (ص 243-248)

٢٥) نعم

$5 + 6 \overset{?}{>} 9$ | $6 + 9 \overset{?}{>} 5$ | $9 + 5 \overset{?}{>} 6$

$11 > 9$ ✓ | $15 > 5$ ✓ | $14 > 6$ ✓

بما أن طولي كل قطعتين أكبر من طول القطعة الثالثة، فإن القطع المستقيمة التي أطوالها 5,6,9 يمكن تكون مثلث.

٢٦)

$3 + 4 \overset{?}{>} 8$

$7 \not> 8$ ✗

بما أن طولي كل قطعتين ليس أكبر من طول القطعة الثالثة، فإن القطع المستقيمة التي أطوالها 3,4,8 لا يمكن تكون مثلث.

٢٧)

بفرض أن طول الضلع الثالث x

$$5+7\overset{?}{>}x$$

$12>x$ أو $12<x$

$7+x\overset{?}{>}5 \qquad 5+x\overset{?}{>}7$

$x>-2 \qquad x>2$

$$2ft<x<12ft$$

٢٨)

بفرض أن طول الضلع الثالث x

$$10.5+4\overset{?}{>}x$$

$14.5>x$ أو $14.5<x$

$10.5+x\overset{?}{>}4 \qquad 4+x\overset{?}{>}10.5$

$x>-6.5 \qquad x>6.5$

$$6.5cm<x<14.5cm$$

٢٩) دراجات:

بفرض أن طول الضلع الثالث x

$$2+3\overset{?}{>}x$$

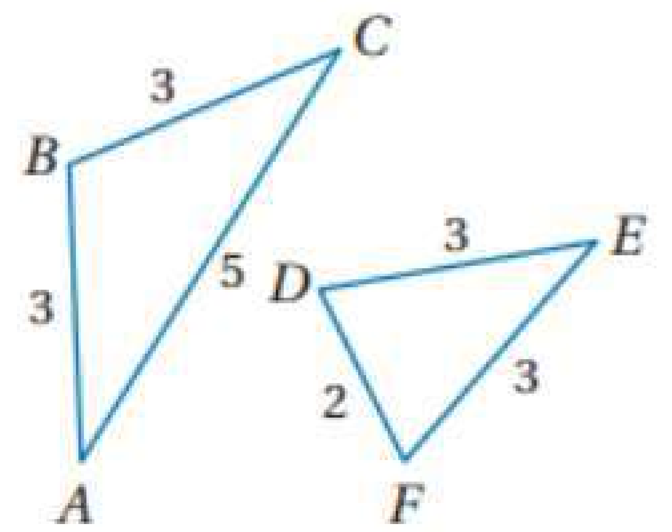
$5>x$ أو $5<x$

$2+x\overset{?}{>}3 \qquad 3+x\overset{?}{>}2$

$x>1 \qquad x>-1$

$$1km<x<5km$$

٣٠)



بما أن $BC \cong DE$ و $AB \cong EF$ و $AC > DF$
إذن حسب عكس متباينة SAS: $m\angle ABC > m\angle DEF$

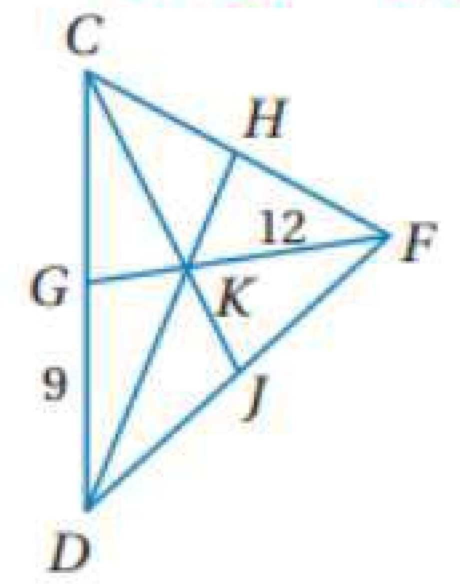
٣١) تجديف:

حسب متباينة SAS: رضوان هو الأقرب إلى نقطة النهاية.

اختبار الفصل

١) حدائق: مركز الدائرة الداخلية.

أوجد طول كل مما يأتي:



٢) بما أن K مركز ΔCDF إذن:

$$DK = \frac{2}{3}DH$$

$$16 = \frac{2}{3}DH$$

$$DH = 24$$

$$DK = DH - KH$$

$$16 = 24 - KH$$

$$KH = 24 - 16$$

$$KH = 8$$

٣)

$$CD = CG + GD$$

$$CD = 9 + 9$$

$$CD = 18$$

٤)

$$FK = \frac{2}{3}FG$$

$$12 = \frac{2}{3}FG$$

$$FG = 18$$

٥) برهان اكتب برهان غير مباشر:

المعطيات: $5x + 7 \geq 52$

المطلوب: $x \geq 9$

البرهان:

الخطوه ١: أفترض أن $x < 9$

الخطوه ٢: أعمل جدولا بقيم ممكنه لـ x على فرض أن $x < 9$.

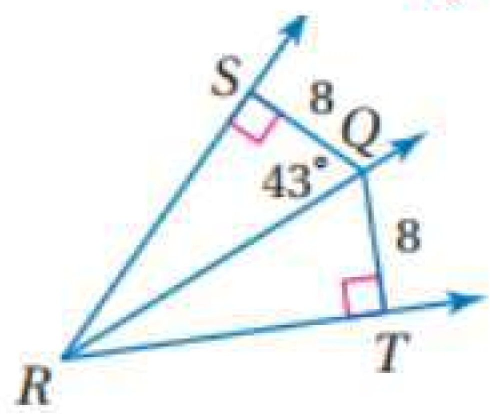
x	٨	٧	٠	-2
$5x + 7$	٤٧	٤٢	٧	-3

عندما تكون $x < 9$ فإن $5x + 7 < 52$.

الخطوه ٣: أدى الافتراض إلى تناقض مع المعلومة المعطاه $5x + 7 \geq 52$. لذلك فإن الافتراض بأن $x < 9$. وتكون النتيجة الأصلية بأن $x \geq 9$ صحيحة بالتأكيد.

أوجد قياس كل مما يأتي:

٦)

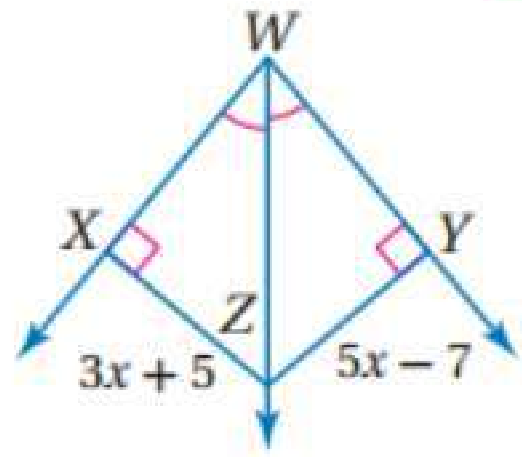


بما أن $SQ = QT$ و $QT \perp RT$ و $QS \perp RS$

إذن حسب عكس نظرية منصف الزاوية: QR ينصف $\angle SQT$

إذن $\angle SQT = 43^\circ$

٧)



بما أن ZW ينصف $\angle XWY$ و $ZY \perp WY$ و $XZ \perp XW$

إذن حسب نظرية منصف الزاوية:

$$YZ = XZ$$

$$5x - 7 = 3x + 5$$

$$5x - 3x = 5 + 7$$

$$2x = 12$$

$$x = 6$$

$$XZ = 3x + 5$$

$$XZ = 3 \times 6 + 5$$

$$XZ = 23$$

٨) اختيار من متعدد:

الأختيار: B

بفرض أن طول الضلع الثالث x

$$3.1 + 4.6 \overset{?}{>} x$$

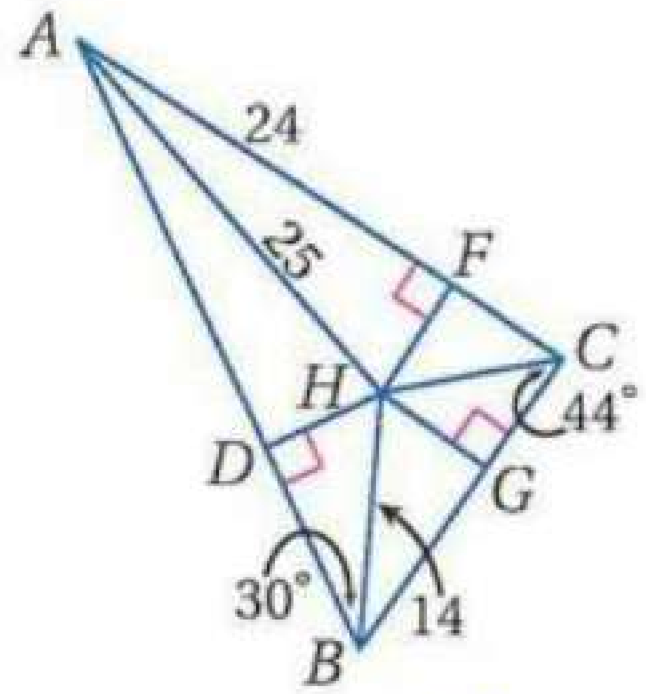
$7.7 > x$ أو $7.7 < x$

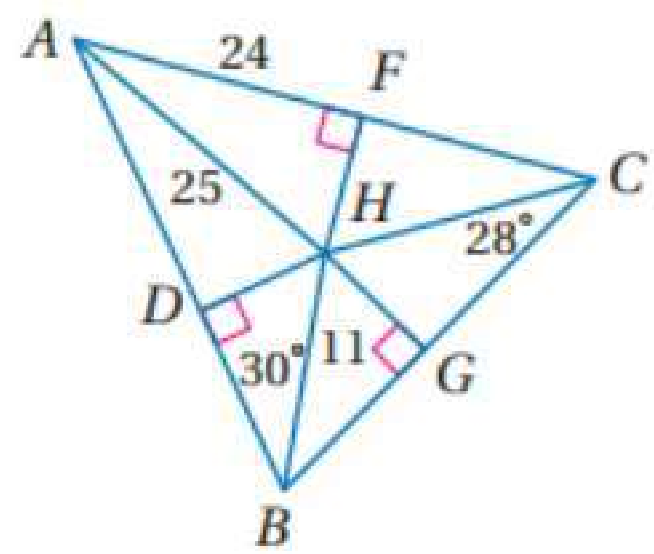
$$3.1 + x \overset{?}{>} 4.6 \qquad 4.6 + x \overset{?}{>} 3.1$$

$$x > 1.5 \qquad x > -1.5$$

$$1.5 < x < 7.7$$

٩)





بما أن H مركز الدائرة الداخلية في ΔABC:

$$(AH)^2=(AF)^2+(FH)^2$$

$$(25)^2=(24)^2+(FH)^2$$

$$625=576+(FH)^2$$

$$(FH)^2=49$$

$$FH=DH=7$$

١٠)

$$(HB)^2=(BD)^2+(DH)^2$$

$$(14)^2=(BD)^2+(7)^2$$

$$196=49+(BD)^2$$

$$(BD)^2=196-49$$

$$(BD)^2=147$$

$$BD\approx 12.12$$

١١)

بالتنصيف $\angle ACH=16^\circ$

$$\angle BAC=180-(88+60)$$

$$\angle HAC=32^\circ$$

١٢)

$$\angle DHB = 180 - (30 + 90)$$

$$\angle DHB = 60^\circ$$

$$\angle DHG = \angle DHB + \angle GHB$$

$$\angle DHG = 60^\circ + 60^\circ$$

$$\angle DHG = 120^\circ$$

١٣) اختيار من متعدد:

الاختيار: C

بفرض أن طول الضلع الثالث x

$$5 + 11 \overset{?}{>} x$$

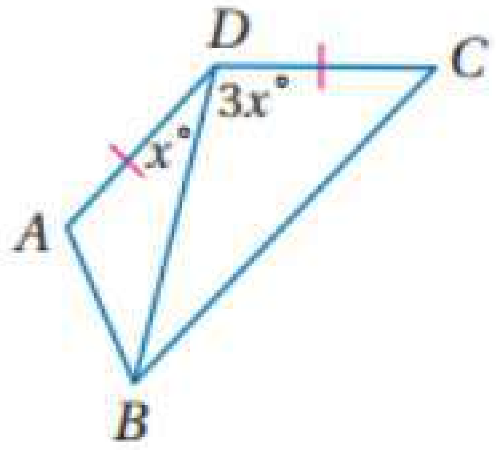
$16 > x$ أو $16 < x$

$5 + x \overset{?}{>} 11$ $\qquad$ $11 + x \overset{?}{>} 5$

$x > 6$ $\qquad$ $x > -6$

$$6 < x < 16$$

١٤) قارن بين BC ,AB في الشكل أدناه:



بما أن $DC = AD$ و $\overline{DB} = \overline{DB}$ حسب خاصية الانعكاس

و $\angle CDB > \angle ADB$ إذن حسب متباينة SAS: $BC > AB$

اكتب الافتراض الضروري:

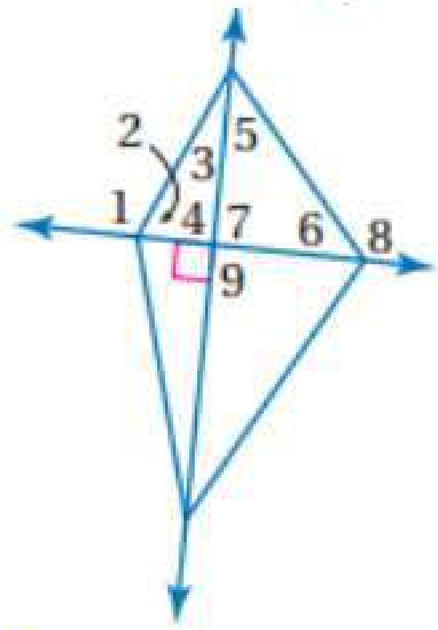
١٥) إذا كان ٨ عاملا لعدد n، فإن ٤ ليس عامل للعدد n

١٦) $\angle M < \angle N$

١٧) إذا كان $3a + 7 \leq 28$ فإن $a > 7$

استعمل الشكل المجاور، لتحدد أي زاوية لها أكبر قياس في كل من المجموعات الاتية:

١٨)



١٨) $\angle 1$ هي الزاوية الأكبر حسب متباينة الزاوية الخارجية

١٩) $\angle 8$

٢٠) $\angle 4$ لان المثلث قائم الزاوية وزاوية $90°$ فية تكون هي أكبر زاوية

٢١)

بفرض أن طول الضلع الثالث x

$10+16 \overset{?}{>} x$

$26 > x$ أو $26 < x$

$16+x \overset{?}{>} 10$ $\quad$ $10+x \overset{?}{>} 16$

$x > -6$ $\quad$ $x > 6$

$6 < x < 26$

٢٢)

بفرض أن طول الضلع الثالث x

$23+39 \overset{?}{>} x$

$62 > x$ أو $62 < x$

$23+x \overset{?}{>} 39$ $\quad$ $39+x \overset{?}{>} 23$

$x > 16$ $\quad$ $x > -16$

$16 < x < 62$

تمارين ومسائل

١) D

$$QP = \frac{2}{3}QT$$

$$14 = \frac{2}{3}QT$$

$$QT = 21$$

٢) C

مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ طول القاعدة في الإرتفاع

مساحة المثلث = $\frac{1}{2} \times 7 \times 9 = 31.5$

٣) الاختيار: C

بفرض أن النقاط هي: $D(-2,4), E(4,4), F(1,-2)$

أوجد معادلة ارتفاع من D إلى $\overline{EF}$

بما أن ميل $\overline{EF}$ يساوي 2 $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2-4}{1-4} = \frac{-6}{-3} = 2$

فإن ميل الارتفاع العمودي على $\overline{EF}$ يساوي $-\frac{1}{2}$

صيغة الميل ونقطة $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$D(-2,4),\ m = -\frac{1}{2}$$

$$y-4=-\frac{1}{2}(x+2)$$

$$y-4=-\frac{1}{2}x-1$$

$$y=-\frac{1}{2}x-1+4$$

$$y=-\frac{1}{2}x+3\rightarrow 1$$

معادلة الإرتفاع من E إلى $\overline{DF}$

بما أن ميل $\overline{DF}$ يساوي -2 $\quad m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-2-4}{1+2}=\frac{-6}{3}=-2$

فإن ميل الارتفاع العمودي على $\overline{DF}$ يساوي $\frac{1}{2}$

صيغة الميل ونقطة $\quad y-y_1=m(x-x_1)$

$$E(4,4),\ m=\frac{1}{2}$$

$$y-4=\frac{1}{2}(x-4)$$

$$y-4=\frac{1}{2}x-2$$

$$y=\frac{1}{2}x+2\rightarrow 2$$

حل المعادلتين ١ و ٢

$$y = \frac{-1}{2}x + 3$$

$$y = \frac{1}{2}x + 2$$

$$\frac{-1}{2}x + 3 = \frac{1}{2}x + 2$$

$$\frac{-1}{2}x - \frac{1}{2}x = 2 - 3$$

$$-x = -1$$

$$x = 1$$

$$y = \frac{1}{2}x + 2$$

$$Y = 2.5$$

إذن احداثيات ملتقى ارتفاعات ΔDEF هي $\left(1, \frac{5}{2}\right)$

٤) $D: AB = AC$

٥) B

$$(X)^2 = (1.6)^2 + (3)^2$$

$$(X)^2 = 2.56 + 9$$ حسب نظرية فيثاغورث

$$(X)^2 = 11.56$$

$$X = 3.4$$

اختبار معياري

أسئلة الاختيار من متعدد:

١) أوجد قيمة x:

حسب نظرية منصف الزاوية:

$$4x+1=5x-5$$
$$4x-5x=-5-1$$
$$-x=-6$$
$$x=6$$

الاختيار: D

٢)

$$7+4\overset{?}{>}x$$
$11<x$ أو $11>x$

$$4+x\overset{?}{>}7 \qquad 7+x\overset{?}{>}4$$
$$x>3 \qquad x>-3$$
$$3<x<11$$

الاختيار: D

٣)

الاختيار: A: ارتفاع

٤)

الاختيار: A

بما أن $QP<PR<QR$ إذن $\angle R<\angle Q<\angle P$

٥)

الاختيار: B: $\angle S$ زاوية منفرجة

٦)

الاختيار: C: منفرج الزاوية لان الزاوية المتبقية قياسها أكبر من 90° :

$$180^\circ-(25+57)=98^\circ$$

٧) الاختيار: C:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-2+5}{-6-3}=\frac{3}{-9}=\frac{-1}{3}$$

أسئلة ذات إجابات قصيرة

٨)

بفرض أن طول الضلع الثالث x

$$9+15\overset{?}{>}x$$

$24>x$ أو $24<x$

$$15+x\overset{?}{>}9 \qquad 9+x\overset{?}{>}15$$

$$x>-6 \qquad x>6$$

$$6<x<24$$

إذن ٧ يمكن أن يكون أصغر رقم للضلع الثالث

٩)

النقاط هي: $X(-3,2), Y(-1,4), Z(5,1)$

أوجد معادلة ارتفاع من Z إلى $\overline{XY}$

بما أن ميل $\overline{XY}$ يساوي 1 $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{4-2}{-1+3}=\frac{2}{2}=1$

فإن ميل الارتفاع العمودي على $\overline{XY}$ يساوي -1

$y-y_1=m(x-x_1)$ صيغة الميل ونقطة

$$Z(5,1),\ m=-1$$

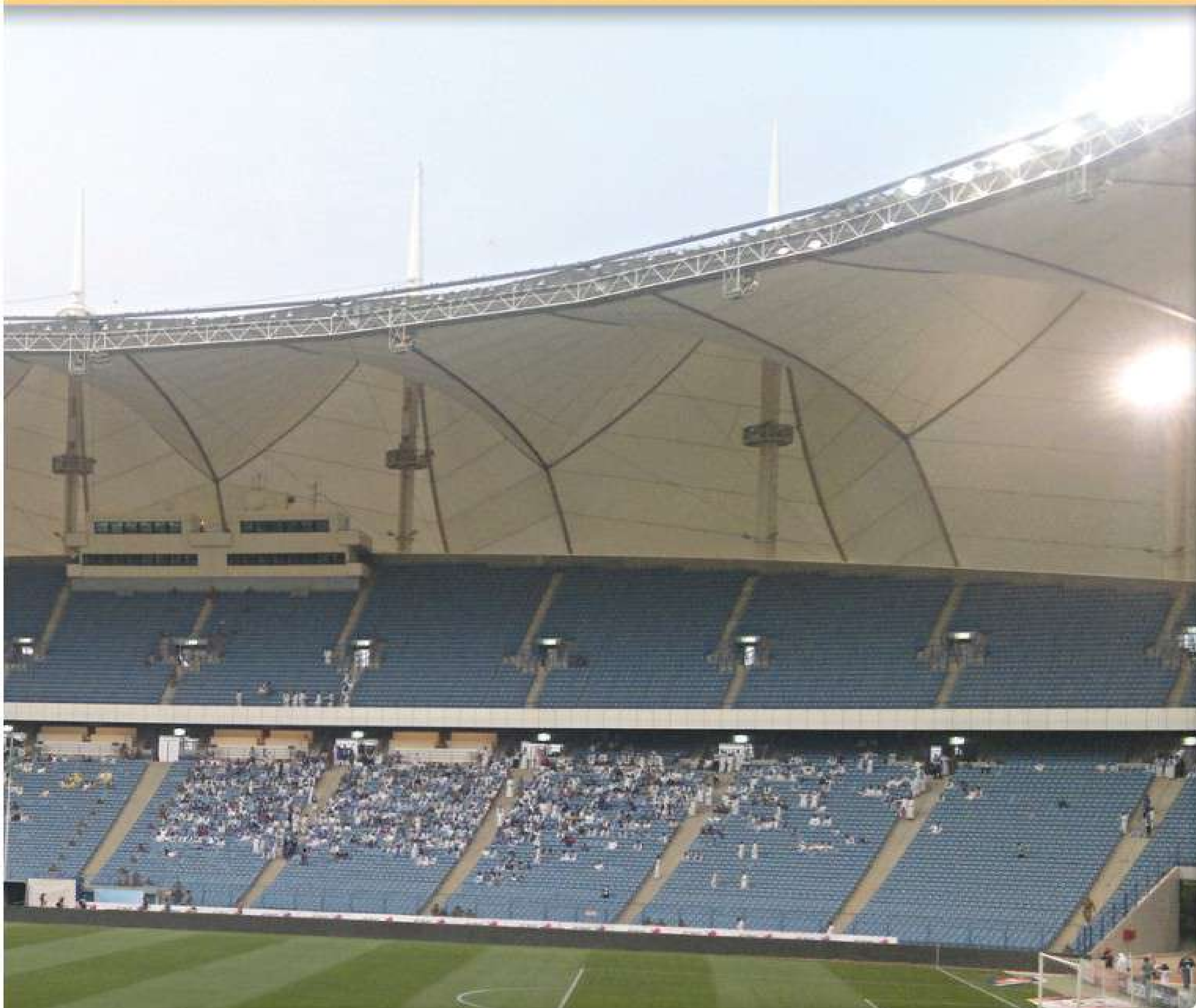
$$y-1=-1(x-5)$$

$$y-1=-x+5$$

$$y=-x+6\rightarrow 1$$

الفصل 5

الأشكال الرباعية
Quadrilaterals



فيما سبق:

درستُ تصنيف المضلعات وميَّزت خصائصها وطبَّقتُها.

والآن:

- أجد مجموع قياسات كل من الزوايا الداخلية والخارجيّة لمضلع، وأستعملها.
- أتعرف خصائص الأشكال الرباعية، وأطبّقها.
- أقارن بين الأشكال الرباعيّة.

لماذا؟

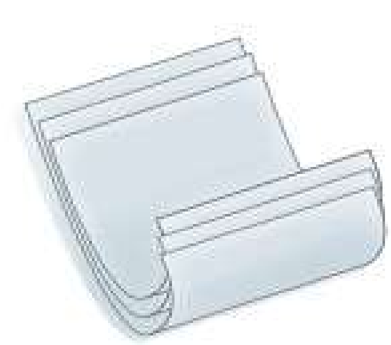
أدوات رياضية:
تُستعمل خصائص الأشكال الرباعيّة لإيجاد قياسات زوايا أو أطوال أضلاع، كقياس زوايا الملاعب وتخطيطها.

المطويات منظم أفكار

الأشكال الرباعيّة: اعملْ هذهِ المطويَّةَ لتساعدَكَ على تنظيمِ معلوماتِكَ حول الفصل 5 . ابدأ بثلاثِ أوراقِ A4 .

1. ضَعْ 3 أوراق بعضها فوق بعض بحيث تبعد كل ورقة عن الأخرى 2 cm

2. اطوِ الأوراقَ بحيث تكون لحوافها الظاهرة العرض نفسه.



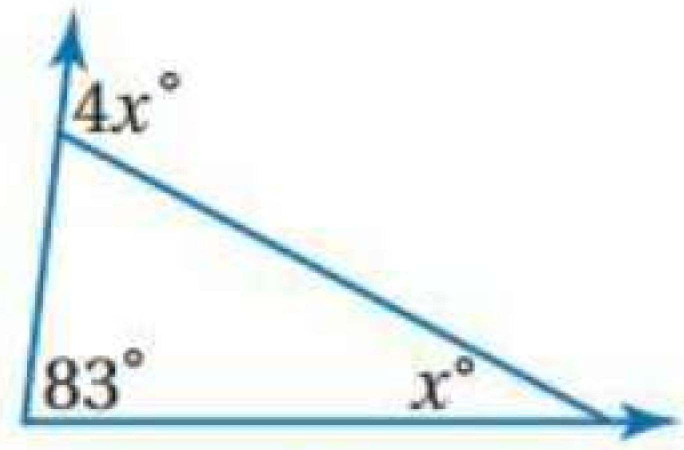
3. ثَبِّتِ الأوراقَ على طُولِ خطِّ الطَّيِّ.

4. أُكتبْ عنوان الفصل وأرقام الدُّروسِ، وسجِّلْ مُلاحظاتِكَ.

التهيئة

أوجد قيمة x مقربة إلى أقرب عُشْر :

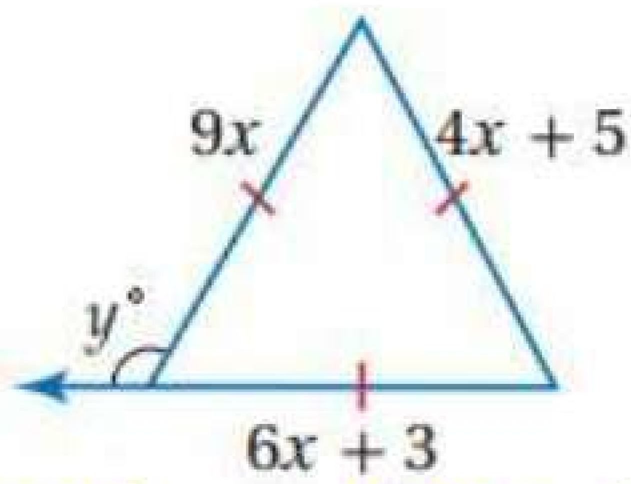
(1



الزاوية الخارجة عن المثلث = مجموع الزاويتين الداخلتين البعيدتين

$$4x = 83 + x$$
$$4x - x = 83$$
$$3x = 83$$
$$x = 27.7$$

(2

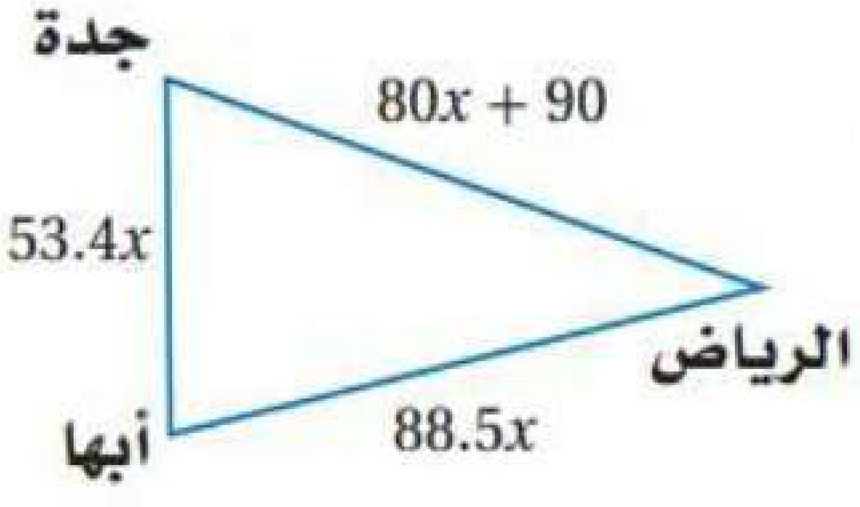


بما أن المثلث جميع أضلاعه متطابقة إذا:

$$9x = 4x + 5$$
$$9x - 4x = 5$$
$$5x = 5$$
$$x = 1$$

بما أن المثلث جميع أضلاعه متطابقة إذا: جميع زواياة متطابقة و= 60°

$$y = 180 - 60$$
$$y = 120^\circ$$



3) **مدن:** تمثل مواقع كل من الرياض وجدة وأبها رؤوس مثلث كما في الشكل أدناه. إذا كان محيط هذا المثلث 2198 km، فأوجد المسافة الجوية بين كل من المدن الثلاث.

محيط المثلث = مجموع أطوال أضلاعه

$$=(53.4x + 80x + 90 + 88.5x) = 2198$$

$$(221.9x) = 90 - 2198$$

$$(221.9x) = 2108$$

$$9.5 = x$$

المسافة بين الرياض وجدة $= 80x + 90 = 80 \times 9.5 + 90 = 850$

المسافة بين الرياض وأبها $= 88.5x = 88.5 \times 9.5 = 840.8$

المسافة بين جدة وأبها $= 53.4x = 53.4 \times 9.5 = 507.3$

حدِّد ما إذا كان $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$ متوازيين أو متعامدين أو غير ذلك في كل مما يلي:

4) $A(3, 3), B(8, 2), C(6, -1), D(1, 0)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ميل $\overleftrightarrow{AB}$: $\frac{2-3}{8-3} = \frac{-1}{5}$

ميل $\overleftrightarrow{CD}$: $\frac{0+1}{1-6} = \frac{1}{-5}$

بما أن ميل كل من $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{CD}$ متساوينن إذا فهما متوازيين

5) $A(4, 2), B(1, -3), C(-3, 5), D(2, 2)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ميل $\overleftrightarrow{AB}$: $\frac{-3-2}{1-4} = \frac{-5}{-3} = \frac{5}{3}$

ميل $\overleftrightarrow{CD}$: $\dfrac{2-5}{2-(-3)} = \dfrac{-3}{5}$

بما أن ميل كل من $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{CD}$ حاصل ضربهم = 1– إذا فهما متعامدان

6) $A(-8, -7), B(4, -4), C(-2, -5), D(1, 7)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ميل $\overleftrightarrow{AB}$: $\dfrac{-4+7}{4+8} = \dfrac{3}{12} = \dfrac{1}{4}$

ميل $\overleftrightarrow{CD}$: $\dfrac{7+5}{1+2} = \dfrac{12}{3} = 4$

بما أن ميل كل من $\overleftrightarrow{AB}$ و $\overleftrightarrow{CD}$ غير متساويين فهما غير متوازيين وليس حاصل ضربهم = 1– إذا فهما غير ذلك.

7) **حدائق:** صمّم مهندس رسمًا لحديقة رباعيّة الشكل، إحداثيات رؤوسها: $A(-2, 1), B(3, -3), C(5, 7), D(-3, 4)$، إذا رسم ممرين يقطعانها $\overleftrightarrow{BD}$, $\overleftrightarrow{AC}$، فهل الممران متعامدان؟ فسّر إجابتك.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ميل $\overleftrightarrow{BD}$: $\dfrac{-3-4}{3+3} = \dfrac{-7}{6}$

ميل $\overleftrightarrow{AC}$: $\dfrac{7-1}{5+2} = \dfrac{6}{7}$

بما أن ميل كل من $\overleftrightarrow{BD}$ و $\overleftrightarrow{AC}$ حاصل ضربهم = 1– إذا فهما متعامدان

أوجد المسافة بين كل نقطتين، ثم أوجد إحداثيات نقطة منتصف القطعة الواصلة بينهما في كل مما يلي:

8) $J(-6, 2), K(-1, 3)$

$$JK=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$JK=\sqrt{(-1+6)^2+(3-2)^2}$$

$$JK=\sqrt{(-1+6)^2+(3-2)^2}=\sqrt{26}$$

9) $R(2, 5), S(8, 4)$

$$RS=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$RS=\sqrt{(8-2)^2+(4-5)^2}$$

$$RS=\sqrt{(6)^2+(-1)^2}=\sqrt{37}$$

10) **مسافات:** وقف شخص عند النقطة $T(80, 20)$ من مستوى إحداثي، ورغب في الانتقال إلى كل من $U(20, 60)$ وَ $V(110, 85)$، فما أقصر مسافة يمكن أن يقطعها الشخص؟ فسِّر إجابتك.

$$TU=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$TU=\sqrt{(20-80)^2+(60-20)^2}$$

$$TU=\sqrt{(-60)^2+(40)^2}=20\sqrt{13}=72.11$$

$$TV=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$TV=\sqrt{(110-80)^2+(85-20)^2}$$

$$TV=\sqrt{(30)^2+(65)^2}=5\sqrt{205}=71.6$$

أقصر مسافة يقطعها الشخص هي من النقطة T إلى U

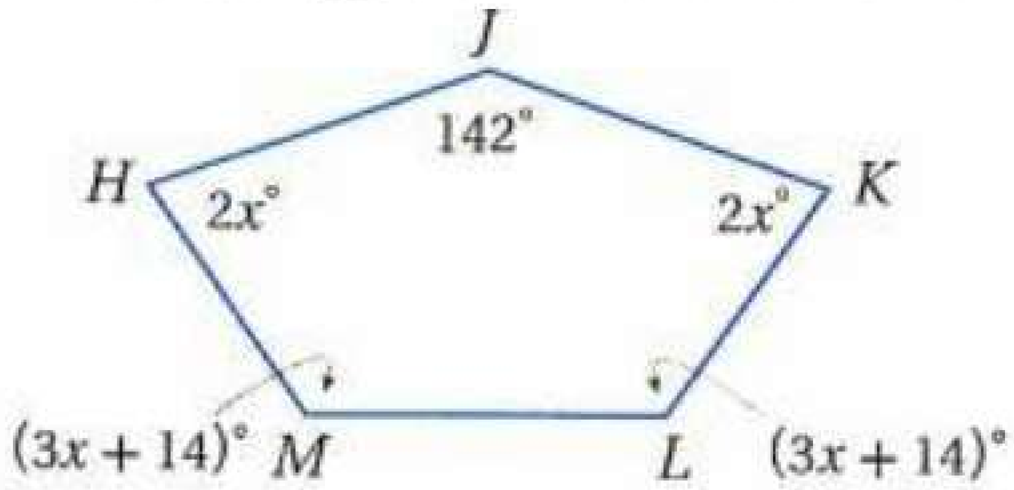
5-1 زوايا المضلع

تحقق

1A) أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للثماني المحدّب.

$$(n-2).180=(8-2).180=1080^{\circ}$$

1B) أوجد قياسات جميع الزوايا الداخلية للخماسي المجاور.



مجموع قياسات زواياة =

$$(n-2).180=(5-2).180=540^{\circ}$$

$$2x+142+2x+(3x+14)+(3x+14)=540^{\circ}$$

$$4x+142+6x+28=540$$

$$10x=540-(142+28)$$

$$10x=370$$

$$x=37$$

$$\angle H=\angle K=2x=2\times 37=74$$

$$\angle L=\angle M=(3x+14)=3\times 37+14=125^{\circ}$$

2A) **سجاد:** أوجد قياس زاوية داخلية لسجادة على شكل ثماني منتظم.

مجموع قياسات الزوايا الداخلية =

$$(n-2).180=(8-2).180=1080^\circ$$

قياس كب زاوية داخلية = مجموع قياسات الزوايا الداخلية ÷ عدد الزاويا الداخلية

$$\frac{1080}{6}=135^\circ$$

2B) **نوافير:** تزين النوافير الأماكن العامة، ويقام بعضها على شكل مضلعات منتظمة.

أوجد قياس زاوية داخلية لنافورة على شكل تساعي منتظم.

مجموع قياسات الزوايا الداخلية =

$$(n-2).180=(9-2).180=1260^\circ$$

قياس كب زاوية داخلية = مجموع قياسات الزوايا الداخلية ÷ عدد الزاويا الداخلية

$$\frac{1260}{9}=140^\circ$$

3) إذا كان قياس زاوية داخليّة لمضلع منتظم يساوي 144°، فأوجد عدد أضلاعه.

$144n = (n-2)\,.\,180$ **(كتابة معادلة)**

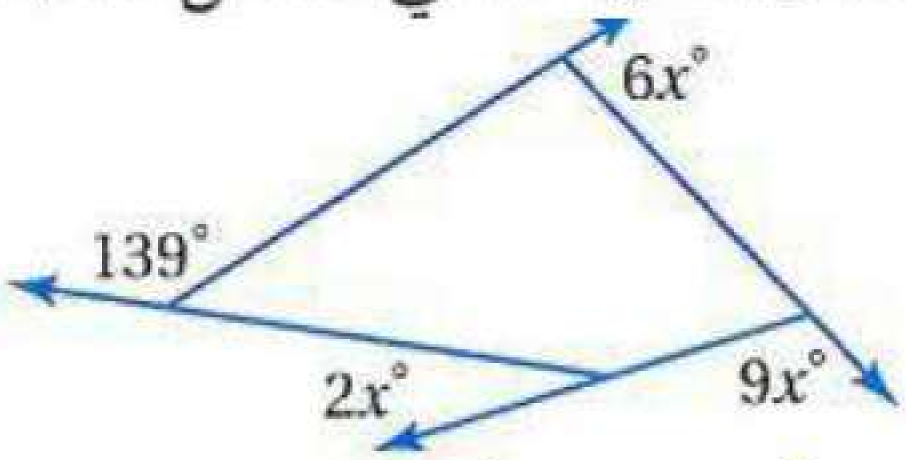
$144n = 180n - 360$ **(خاصية التوزيع)**

$-36n = -360$ **(بطرح 180n من كلا الطرفين)**

$n = 10$ **(بقسمة كلا الطرفين على 36–)**

إذن للمضلع 10 أضلاع

4A) أوجد قيمة x في الشكل المجاور.



(نظرية مجموع قياسات الزوايا الخارجية للمضلع)

$$6x+9x+2x+139=360^\circ$$

$$17x=360^\circ-139$$

$$17x = 360^\circ - 139^\circ$$

$$x = 13^\circ$$

4B) أوجد قياس زاوية خارجيّة لمضلع منتظم ذي 12 ضلعًا.

$12n = 360$ (نظرية مجموع قياسات الزوايا الخارجية للمضلع)

$n = 30$

إذن قياس كل زاوية خارجية للمضلع المنتظم ذي 12 ضلعا يساوي 30°

تأكد:

المثال 1 أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لكل من المضلعين المحدبين الآتيين:

1) العشاري

$$n = 10$$

$$(n-2).180 = (10-2).180 = 1440^\circ$$

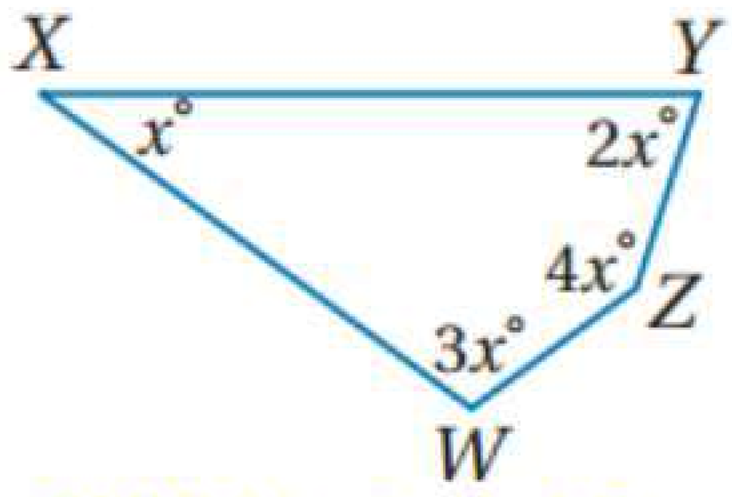
2) الخماسي

$$n = 5$$

$$(n-2).180 = (5-2).180 = 540^\circ$$

أوجد قياسات جميع الزوايا الداخلية لكل من المضلعين الآتيين:

(3



مجموع قياسات زوايا الشكل =

$$(n-2).180 = (4-2).180 = 360^\circ$$

$$x + 2x + 3x + 4x = 360^\circ$$

$$10x = 360^\circ$$

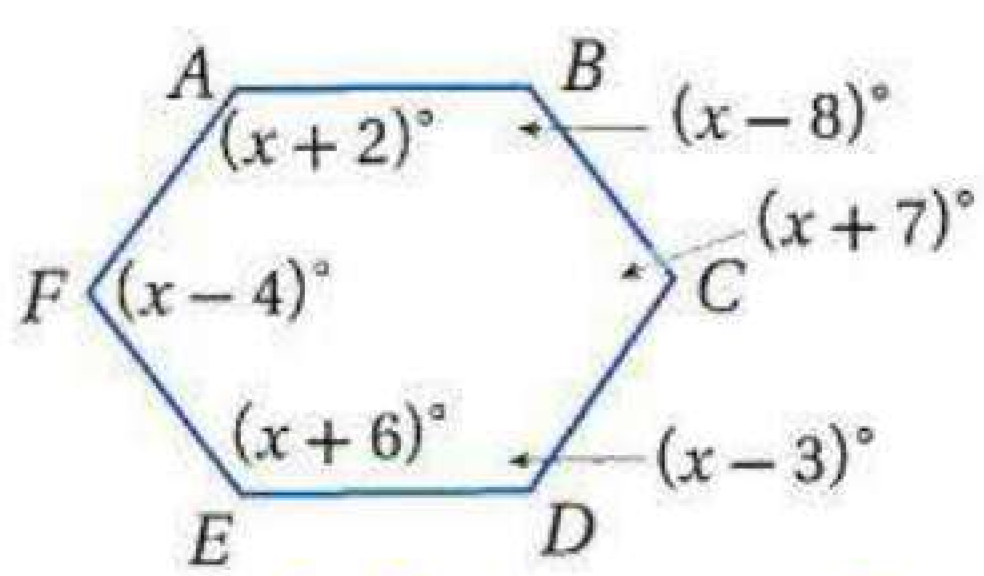
$$\angle X = 36$$

$$\angle Y = 2 \times 36 = 72^\circ$$

$$\angle W = 3 \times 36 = 108^\circ$$

$$\angle Z = 4 \times 36 = 144^\circ$$

(4



مجموع قياسات زوايا الشكل =

$$(n-2).180=(6-2).180=720°$$

$$(x+2)+(x-8)+(x-4)+(x+7)+(x+6)+(x-3)=720°$$

$$6x+0=720$$

$$x=120$$

$$\angle A=120+2=122°$$

$$\angle B=120-8=112°$$

$$\angle C=120+7=127°$$

$$\angle D=120-3=117°$$

$$\angle E=120+6=126°$$

$$\angle F=120-4=116°$$

المثال 2 5) **عجلة دوارة:** العجلة الدوّارة في الصورة المجاورة على شكل مضلع منتظم عدد أضلاعه 15 ضلعًا. أوجد قياس زاوية داخليّة له.

مجموع زوايا المضلع عند $(n=15)=$

$$(n-2).180=(15-2).180=2340°$$

قياس أي زاوية داخلية له = $\frac{2340}{15}=156°$

إذا كان قياس إحدى الزوايا الداخلية لمضلع منتظم معطى، فأوجد عدد الأضلاع في كل مما يأتي:

6) 150°

$150n = (n-2) . 180$ (كتابة معادلة)

$150n = 180n - 360$ (خاصية التوزيع)

$-30n = -360$ (بطرح 180n من كلا الطرفين)

$n = 12$ (بقسمة كلا الطرفين على 30−)

إذن للمضلع 12 ضلع

7) 170°

$170n = (n-2) . 180$ (كتابة معادلة)

$170n = 180n - 360$ (خاصية التوزيع)

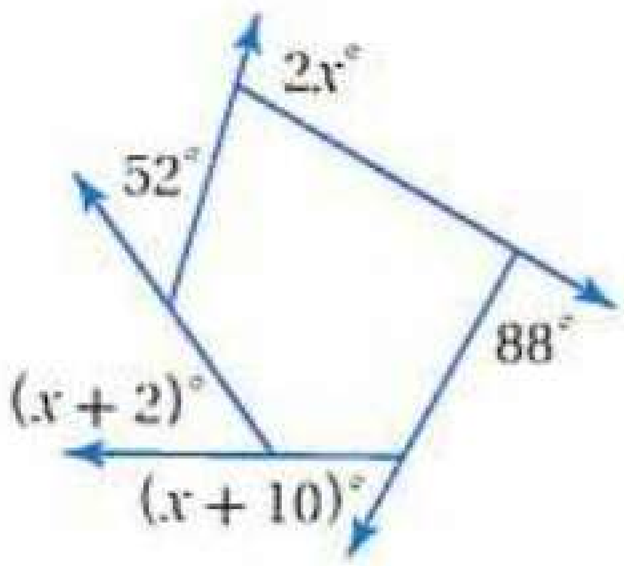
$-10n = -360$ (بطرح 180n من كلا الطرفين)

$n = 36$ (بقسمة كلا الطرفين على 30−)

إذن للمضلع 36 ضلع

المثال 4 أوجد قيمة x في كلٍّ من الشكلين الآتيين:

8)



(نظرية مجموع قياسات الزوايا الخارجية للمضلع)

$$2x + 52 + (x+2) + (x+10) + 88 = 360^\circ$$

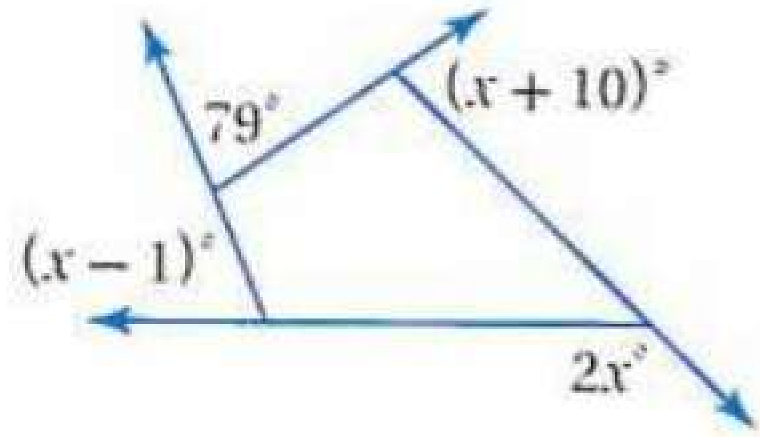
$$4x + 152 = 360^\circ$$

$$4x = 360^\circ - 152$$

$$4x = 208^\circ$$

$$x = 52$$

9)



(نظرية مجموع قياسات الزوايا الخارجية للمضلع)

$$79+(x+10)+(x-1)+2x=360^\circ$$

$$4x+88=360^\circ$$

$$4x=360^\circ-88$$

$$4x=272^\circ$$

$$x=68$$

أوجد قياس زاوية خارجيّة لكل من المضلعين المنتظمين الآتيين:

10) رباعي

$4n=360^\circ$ (نظرية مجموع قياسات الزوايا الخارجية للمضلع)

$n=90^\circ$

إذن قياس كل زاوية خارجية للمضلع المنتظم ذي 4 ضلعا يساوي 90°

11) ثُماني

$8n=360^\circ$ (نظرية مجموع قياسات الزوايا الخارجية للمضلع)

$n=45^\circ$

إذن قياس كل زاوية خارجية للمضلع المنتظم ذي 4 ضلعا يساوي 45°

تدرب وحل المسائل:

المثال 1 أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لكل من المضلعات المحدبة الآتية:

12) ذو 12 ضلعًا

$n = 12$

$$(n-2).180 = (12-2).180^\circ = 1800^\circ$$

13) ذو 20 ضلعًا

$n = 20$

$$(n-2).180 = (20-2).180^\circ = 3240^\circ$$

14) ذو 29 ضلعًا

$n = 29$

$$(n-2).180 = (29-2).180^\circ = 4860^\circ$$

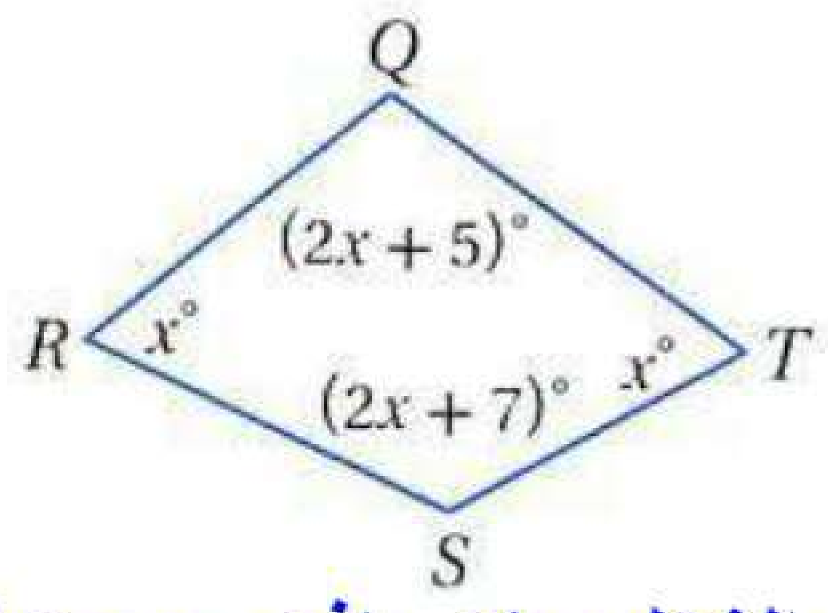
15) ذو 32 ضلعًا

$n = 32$

$$(n-2).180 = (32-2).180^\circ = 4500^\circ$$

أوجد قياسات جميع الزوايا الداخلية لكل من المضلعات الآتية:

16)



بما أن الشكل رباعي إذن مجموع قياسات الزوايا الداخلية له =

$$(n-2).180 = (4-2).180^\circ = 360^\circ$$

$360^\circ = m\angle Q + m\angle R + m\angle S + m\angle T$

$360^\circ = (2x+5) + x + (2x+7) + x$

$360^\circ = 6x + 12$

$360 - 12 = 6x$

$348 = 6x$

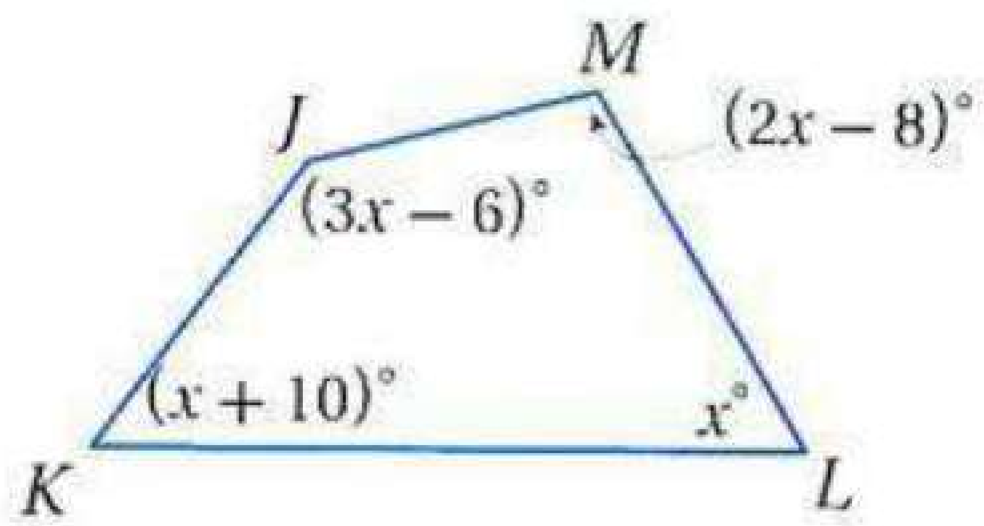
$x = 58$

$m\angle R = m\angle T = 58^\circ$

$m\angle Q = (2x+5) = (2 \times 58 + 5) = 121^\circ$

$m\angle S = (2x+7) = (2 \times 58 + 5) = 123^\circ$

(17



بما أن الشكل رباعي إذن مجموع قياسات الزوايا الداخلية له =

$(n-2).180 = (4-2).180^\circ = 360^\circ$

$360^\circ = m\angle J + m\angle M + m\angle L + m\angle K$

$360^\circ = (3x-6) + (2x-8) + x + (x+10)$

$360^\circ = 7x - 4$

$360 + 4 = 7x$

$348 = 6x$

$x = 52$

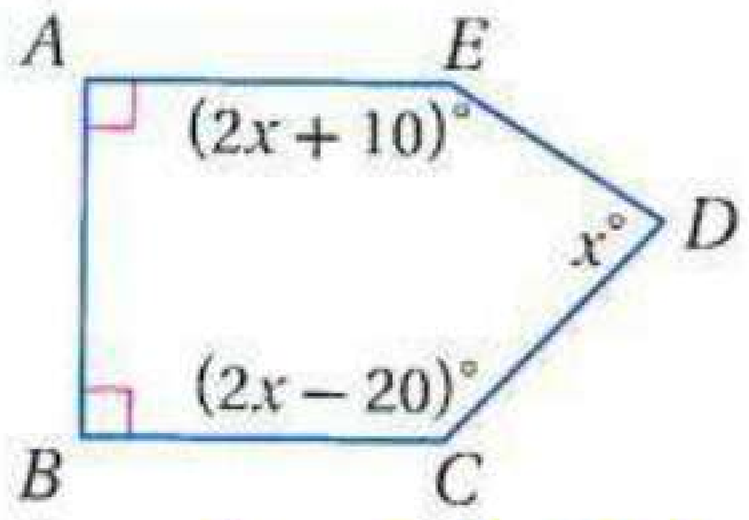
$m\angle J = (3 \times 52 - 6) = 150^\circ$

$m\angle M = (2 \times 52 - 8) = 96^\circ$

$m\angle L = x = 52^\circ$

$$m\angle K = (x + 10) = (52 + 10) = 62^\circ$$

(18



بما أن الشكل خماسي إذن مجموع قياسات الزوايا الداخلية له =

$$(n-2).180 = (5-2).180^\circ = 540^\circ$$

$$540^\circ = m\angle A + m\angle B + m\angle C + m\angle D + m\angle E$$

$$540^\circ = 90 + 90 + (2x - 20) + x + (2x + 10)$$

$$540^\circ = 5x + 170$$

$$540 - 170 = 5x$$

$$540 = 5x$$

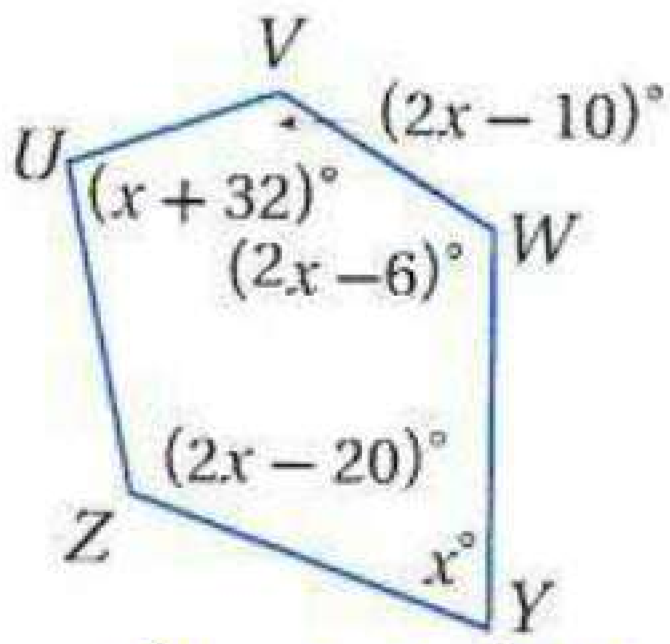
$$x = 74$$

$$m\angle D = 74^\circ$$

$$m\angle C = (2 \times 74 - 20) = 128^\circ$$

$$m\angle E = (2 \times 74 + 10) = 158^\circ$$

(19



بما أن الشكل خماسي إذن مجموع قياسات الزوايا الداخلية له =

$$(n-2).180 = (5-2).180^\circ = 540^\circ$$

$$540^\circ = m\angle U + m\angle V + m\angle W + m\angle Y + m\angle Z$$

$$540^\circ = (x+32) + (2x-10) + (2x-6) + x + (2x-20)$$

$$540^\circ = 8x - 4$$

$$x = 68$$

$$m\angle U = (68+32) = 100^\circ$$

$$m\angle V = (2\times 68 - 10) = 126^\circ$$

$$m\angle W = (2\times 68 - 6) = 130^\circ$$

$$m\angle Y = x = 68^\circ$$

$$m\angle Z = (2\times 68 - 20) = 116^\circ$$

20) ما مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للمضلع فى الشكل المجاور؟

$n = 5$

$$(n-2).180 = (5-2).180^\circ = 540^\circ$$

المثال 2 أوجد قياس زاوية داخليّة لكل من المضلعات المنتظمة الآتية:

21) الاثنا عشري

$n = 12$

$$(n-2).180 = (12-2).180^\circ = 1800^\circ$$

$$\frac{1800}{12} = 150^\circ$$

22) الخماسي

$n = 5$

$$(n-2).180 = (5-2).180^\circ = 540^\circ$$

$$\frac{540}{5} = 108^\circ$$

23) العشاري

$n = 10$

$(n-2).180 = (10-2).180^\circ = 1440^\circ$

$\frac{1440}{10} = 144^\circ$

24) التُّساعي

$n = 9$

$(n-2).180 = (9-2).180^\circ = 1260^\circ$

$\frac{1260}{9} = 140^\circ$

المثال 3 إذا كان قياس إحدى الزوايا الداخلية لمضلع منتظم معطى، فأوجد عدد الأضلاع في كل مما يأتي:

25) 60°

$60n = (n-2).180$

$60n = n180 - 360$

$60n - n180 = -360$

$-120n = -360$

$n = 3$

إذن قياس كل زاوية خارجية للمضلع المنتظم ذي3 ضلعا يساوي 60°

26) 90°

$90n = (n-2).180$

$90n = n180 - 360$

$90n - n180 = -360$

$-90n = -360$

$n = 4$

إذن قياس كل زاوية خارجية للمضلع المنتظم ذي 4 ضلعا يساوي 60°

120° (27

$$120n = (n-2).180$$
$$120n = n180 - 360$$
$$120n - n180 = -360$$
$$-n60 = -360$$
$$n = 6$$

إذن قياس كل زاوية خارجية للمضلع المنتظم ذي 6 ضلعا يساوي 120°

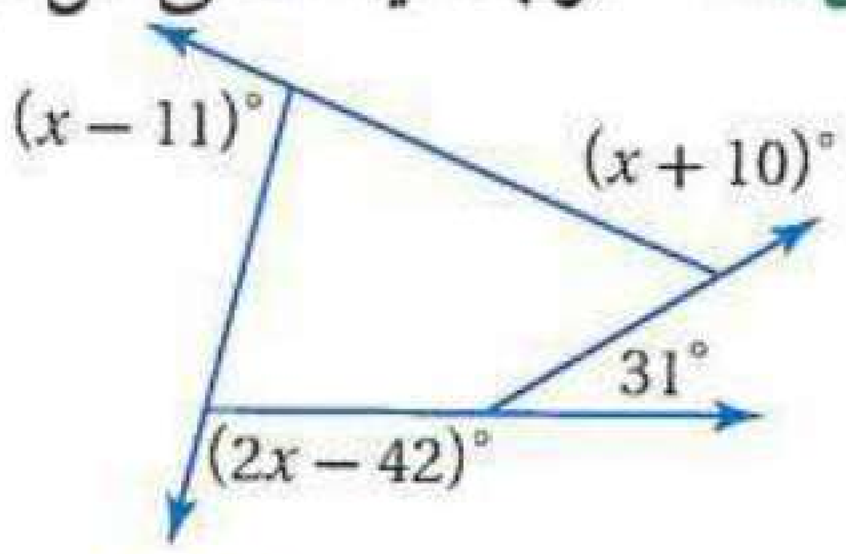
156° (28

$$156n = (n-2).180$$
$$156n = n180 - 360$$
$$156n - n180 = -360$$
$$-24n = -360$$
$$n = 15$$

إذن قياس كل زاوية خارجية للمضلع المنتظم ذي 15 ضلعا يساوي 156°

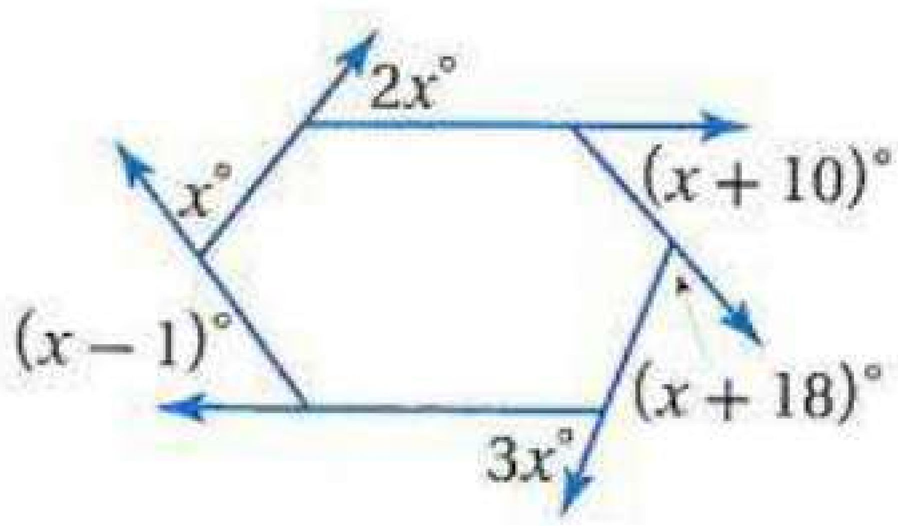
المثال 4 أوجد قيمة x في كل من الشكلين الآتيين:

(29



$$(x-11)+(x+10)+(2x-42)+31^{\circ} = 360^{\circ}$$
$$4x - 12 = 360$$
$$4x = 372$$
$$x = \frac{372}{4} = 93$$

30)



$$(2x)+(x+10)+(x+18)+3x+(x-1)+x=360^\circ$$

$$9x+27=360$$

$$9x=333$$

$$x=\frac{333}{9}=37$$

أوجد قياس زاوية خارجيّة لكل من المضلعات المنتظمة الآتية:

31) العشاري

نظرية مجموع الزوايا الخارجية للمضلع

$$10n=360$$

$$n=\frac{360}{10}=36^\circ$$

32) الخماسي

نظرية مجموع الزوايا الخارجية للمضلع

$$5n=360$$

$$n=\frac{360}{5}=72^\circ$$

33) السداسي

نظرية مجموع الزوايا الخارجية للمضلع

$$6n=360$$

$$n=\frac{360}{6}=60^\circ$$

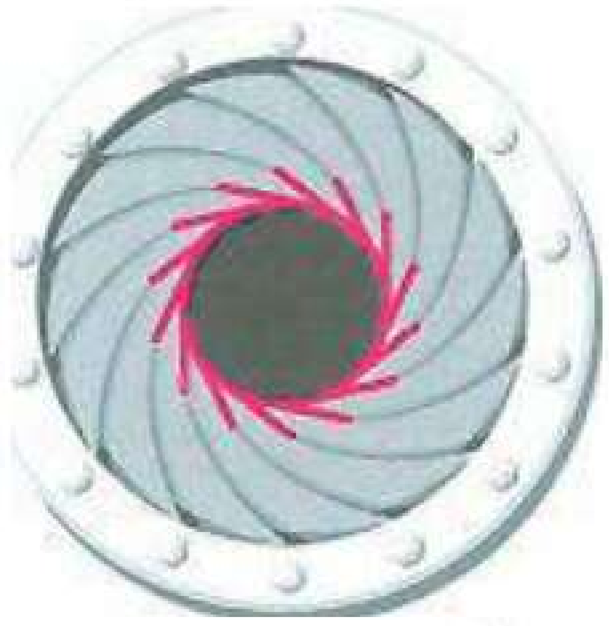
34) ذو 15 ضلعًا

نظرية مجموع الزوايا الخارجية للمضلع

$$15n=360$$

$$n=\frac{360}{15}=24^\circ$$

35) **تصوير:** تشكّل الفتحة التي ينفذ منها الضوء إلى عدسة آلة التصوير في الشكل المجاور مضلعًا منتظمًا ذا 14 ضلعًا.



a) أوجد قياس زاوية داخلية؟

$$(14-2).180 = 2160^\circ \qquad n = 14$$

$$\text{قياس الزاوية الداخلية} = \frac{2160}{14} = 154.3^\circ \text{ تقريبا}$$

b) أوجد قياس زاوية خارجية؟

$14n = 360^\circ$ (نظرية مجموع قياسات الزوايا الخارجية للمضلع)

$n = 25.7$ (بقسمة كلا الطرفين على 14)

إذن قياس كل زاوية خارجية للمضلع = 25.7° تقريباً

أوجد قياس زاوية خارجية وزاوية داخلية للمضلع المنتظم المعطى عدد أضلاعه في كل إلى أقرب عُشر:

36) 7

$$(7-2).180 = 900^\circ \qquad n = 7$$

$$\text{قياس الزاوية الداخلية} = \frac{900}{7} = 128.6^\circ \text{ تقريباً}$$

$7n = 360^\circ$ (نظرية مجموع قياسات الزوايا الخارجية للمضلع)

$n = 51.4$ (بقسمة كلا الطرفين على 7)

إذن قياس كل زاوية خارجية للمضلع = 51.4° تقريباً

37) 13

$$(13-2).180 = 1980^\circ \qquad n = 13$$

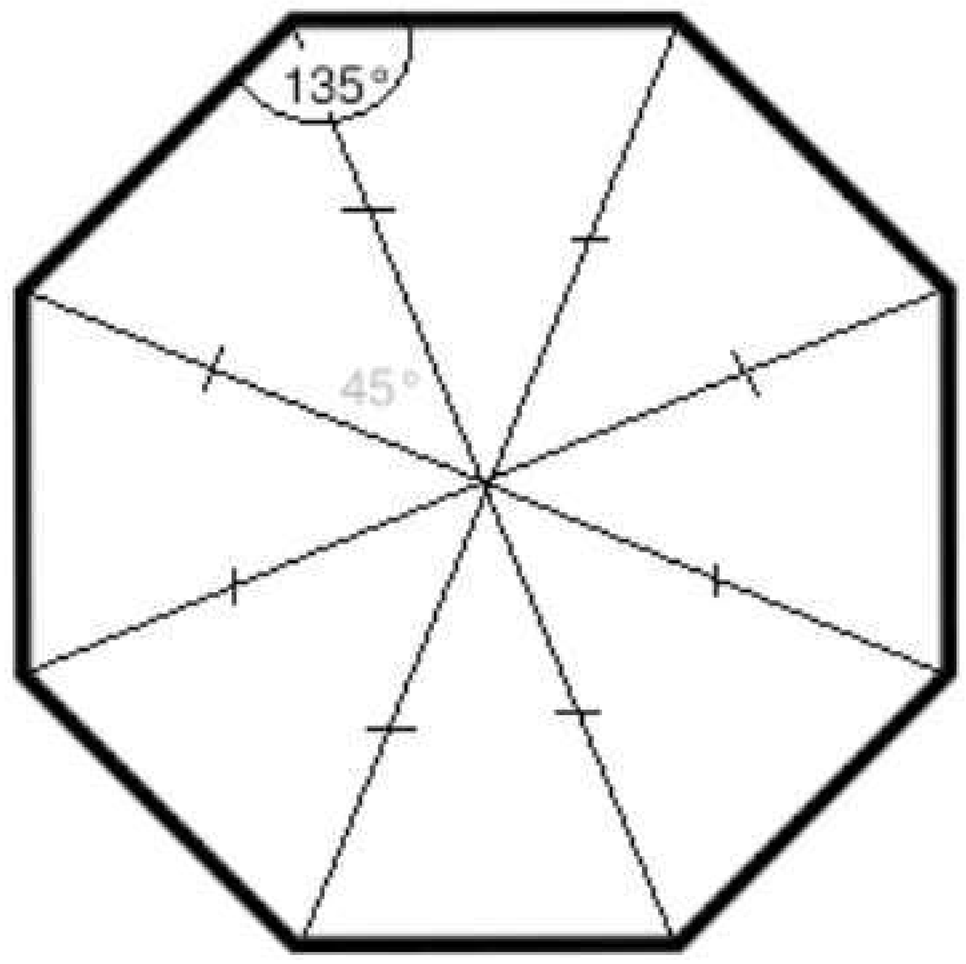
$$\text{قياس الزاوية الداخلية} = \frac{1980}{13} = 152.3^\circ \text{ تقريباً}$$

$13n = 360^\circ$ (نظرية مجموع قياسات الزوايا الخارجية للمضلع)

$n = 51.4$ (بقسمة كلا الطرفين على 13)

إذن قياس كل زاوية خارجية للمضلع = 27.7° تقريباً

38) أثبت أن مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمضلع الثماني يساوي 1080°، دون استعمال صيغة مجموع الزوايا الداخلية للمضلع.



يقسم المضلع الى ثمان مثلثات

مجموع زوايا 8 مثلثات = $8 \times 180^\circ = 1440^\circ$

مجموع الزوايا حول نقطة المركز = 360°

∴ مجموع زوايا المضلع الثماني الداخلية = $1440^\circ - 360^\circ = 1080^\circ$

قياس الزاوية الداخلية للمضلع الثماني المنتظم = $1080^\circ \div 8 = 135^\circ$

39) **برهان:** استعمل الجبر لإثبات نظرية مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة للمضلع.

افرض أن N تساوي مجموع قياسات الزوايا الخارجية لمضلع عدد أضلاعه n.

N تساوي مجموع قياسات الأزواج الخطية مطروحاً منه مجموع قياسات الزوايا الداخلية.

$$= 180n - 180(n - 2)$$

$$= 180n - 180n + 360 = 360$$

لذا، فإن مجموع قياسات الزوايا الخارجية لأي مضلع محدب يساوي 360°.

جبر: أوجد قياسات جميع الزوايا الداخلية لكل من المضلعين الآتيين :

40) عشاري قياسات زواياه الداخليّة:

$x+5, x+10, x+20, x+30, x+35, x+40, x+60, x+70, x+80, x+90$

$$(n-2).180=(10-2).180^\circ=1440^\circ$$

$$1440^\circ=(x+5)+(x+10)+(x+20)+(x+30)+(x+35)$$
$$+(x+40)+(x+60)+(x+70)+(x+80)+(x+90)$$

$$1440^\circ=10x+440$$
$$1440^\circ-440=10x$$
$$1000=10x$$
$$x=100$$
$$(x+5)=100+5=105^\circ$$
$$(x+10)=100+10=110^\circ$$
$$(x+20)=100+20=120^\circ$$
$$(x+30)=100+30=130^\circ$$
$$(x+35)=100+35=135^\circ$$
$$(x+40)=100+40=145^\circ$$
$$(x+60)=100+60=160^\circ$$
$$(x+70)=100+70=170^\circ$$
$$(x+80)=100+80=180^\circ$$
$$(x+90)=100+90=190^\circ$$

الزوايا هي: $190^\circ, 180^\circ, 170^\circ, 160^\circ, 140^\circ, 135^\circ, 130^\circ, 120^\circ, 110^\circ, 105^\circ$

41) الخماسي $ABCDE$ الذي قياسات زواياه الداخليّة: $(4x - 1)°$, $(2x - 8)°$, $(x + 9)°$, $6x$, $(4x + 13)°$,

$$(n-2).180 = (5-2).180° = 540°$$

$$540° = (4x-1)+(2x-8)+(x+9)+(4x+13)+6x$$

$$540° = 17x + 13$$

$$540° - 13 = 17x$$

$$527 = 17x$$

$$x = 31$$

$$m\angle E = 4x - 1 = 4\times 31 - 1 = 123°$$

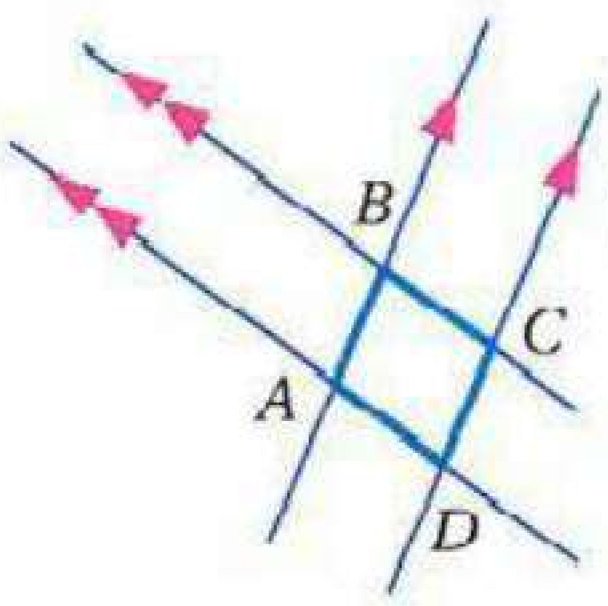
$$m\angle D = 2x - 8 = 2\times 31 - 8 = 54°$$

$$m\angle C = x + 9 = 31 + 9 = 40°$$

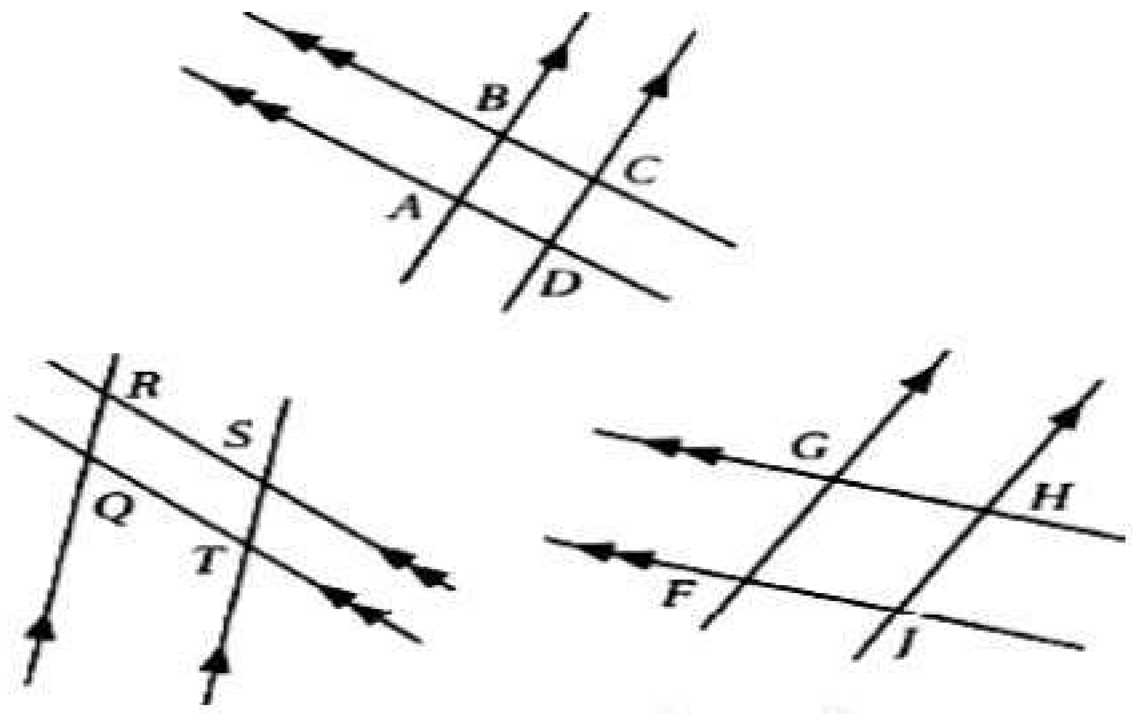
$$m\angle B = 4x + 13 = 4\times 31 + 13 = 137°$$

$$m\angle A = 6x = 6\times 31 = 186°$$

42) **تمثيلات متعددة:** سوف تستقصي في هذه المسألة العلاقات بين الزوايا والأضلاع في أشكال رباعيّة خاصّة.



a) **هندسيًا:** ارسم زوجين من المستقيمات المتوازية تتقاطع كما في الشكل المجاور، وسمِّ الشكل الرباعي الناتج $ABCD$. ثم كرّر هذه الخطوات لتكوين شكلين آخرين: $QRST$, $FGHJ$.



b) جدوليًا: أكمل الجدول الآتي :

الشكل الرباعي	أطوال الأضلاع وقياسات الزوايا							
$ABCD$	$m\angle A$	101	$m\angle B$	97	$m\angle C$	101	$m\angle D$	97
	AB	0.6cm	BC	0.6cm	CD	0.6cm	DA	0.6cm
$FGHJ$	$m\angle F$	76	$m\angle G$	104	$m\angle H$	76	$m\angle J$	104
	FG	1cm	GH	0.9cm	HJ	1cm	JF	0.9cm
$QRST$	$m\angle Q$	121	$m\angle R$	95	$m\angle S$	121	$m\angle T$	95
	QR	0.5cm	RS	1.2cm	ST	0.5cm	TQ	1.2cm

c) لفظيًا: خمّن العلاقة بين كل زاويتين متقابلتين في الشكل الرباعي الناتج عن زوجين من المستقيمات المتوازية.

في الشكل الرباعي المتكون من زوجين من المستقيمات المتوازية تكون الزاويتان المتقابلتان متطابقتين.

d) لفظيًا: خمّن العلاقة بين كل زاويتين متحالفتين في الشكل الرباعي الناتج عن زوجين من المستقيمات

في الشكل الرباعي المتكون من زوجين من المستقيمات المتوازية تكون الزاويتان المتحالفتان متكاملتين.

e) لفظيًا: خمّن العلاقة بين كل ضلعين متقابلين في الشكل الرباعي الناتج عن زوجين من المستقيمات المتوازية.

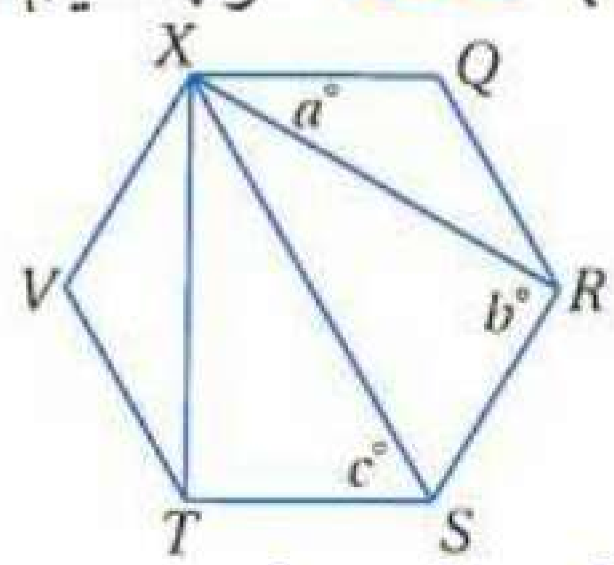
في الشكل الرباعي المتكون من زوجين من المستقيمات المتوازية تكون الضلعان المتقابلان متطابقين.

مسائل مهارات التفكير العليا:

43) اكتشف الخطأ: قالت مريم: إنّ مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة للعشاري أكبر منه للسباعي؛ لأنّ عدد أضلاع العشاري أكثر من أضلاع السباعي. وقالت لبنى: إنّ مجموع قياسات الزوايا الخارجية لكلا المضلعين متساوٍ. فهل أيٌّ منهما إدعاؤها صحيح؟ وضّح تبريرك.

لبنى؛ حسب نظرية مجموع قياسات الزوايا الخارجية، سيكون مجموع قياسات الزوايا الخارجية لأي مضلع محدب يساوي 360°.

44) تحدٍّ: أوجد قيم a, b, c في الشكل السداسي المنتظم $QRSTVX$ المجاور. برّر إجابتك.



$60^\circ, 90^\circ, 30^\circ$؛ حسب نظرية مجموع قياسات الزوايا الداخلية يكون مجموع قياسات الزوايا الداخلية 720°، وبما أن المضلع QRSTVX منتظم فإن له 6 زوايا متطابقة. وقياس كل زاوية 120°، لذلك

$m\angle XVT = m\angle XQR = 120^\circ$ وكذلك $XQ = QR$

وحسب نظرية المثلث متطابق الضلعين يكون

$m\angle QXR = m\angle QRX$

وبما أن مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمثلث 180°، فإن

$m\angle QXR + m\angle QRX + m\angle XQR = 180^\circ$

وبالتعويض ينتج أن $a + a + 120^\circ = 180^\circ$ ، أي أن $2a = 60^\circ$ ومنها $a = 30^\circ$

وحسب مسلمة جمع الزوايا $m\angle QRS = m\angle QRX + m\angle XRS$

وبالتعويض، $m\angle XRS + 30^\circ = 120^\circ$

$m\angle XRS + 30^\circ = 120^\circ$ **وبالطرح يكون** $m\angle XRS = 90^\circ$

إذن $b = 90^\circ$

وحسب (SAS) يكون $\Delta XQR = \Delta XVT$ **و** $\Delta XRS = \Delta XTS$

وبناءً على مسلمة جمع الزوايا يكون

$$m\angle VXQ = m\angle VXT + m\angle TXS + m\angle SXR + m\angle RXQ$$

وبالتعويض

$$m\angle TXS + m\angle SXR + 30^\circ + 30^\circ = 120^\circ$$

إذن $60^\circ = m\angle TXS + m\angle SXR$ وبما أن

$m\angle TXS + m\angle SXR$ ولأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين

متطابقة، فإن $30^\circ = m\angle TXS = m\angle SXR$

وفي ΔXTS، $m\angle XTS + m\angle TSX + m\angle SXT = 180^\circ$

وبالتعويض $c + 30^\circ + 90^\circ = 180^\circ$، إذن $c = 60^\circ$

45) **تبرير:** إذا مُدَّ ضلعان لسداسي منتظم بحيث يلتقيان في نقطة خارجه، فهل يكون المثلث الناتج متطابق الأضلاع دائمًا، أو أحيانًا، أو لا يمكن أن يكون متطابق الأضلاع أبدًا؟ برِّر إجابتك.

دائماً؛ حسب نظرية مجموع الزوايا الخارجية

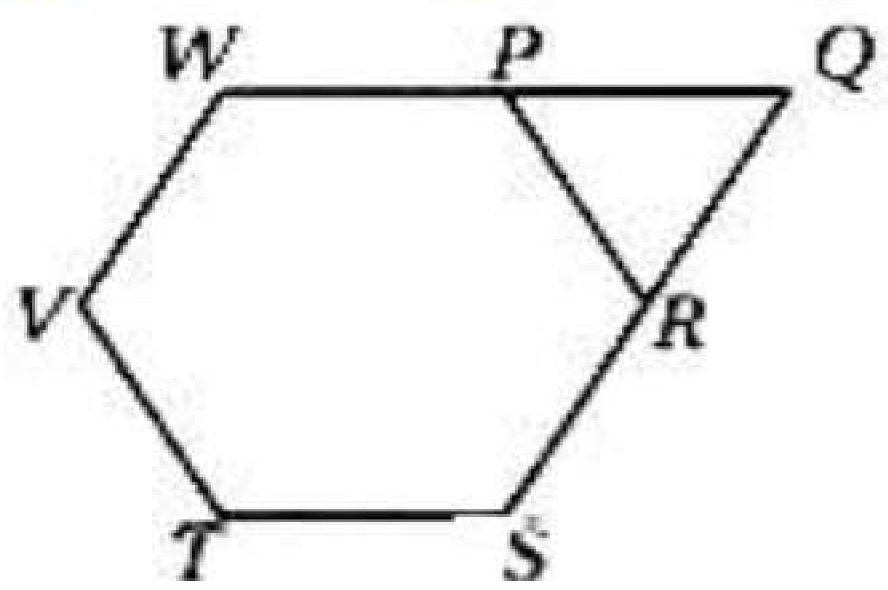
$$m\angle QRP = 60^\circ, m\angle QPR = 60^\circ$$

ولما كان مجموع قياسات الزوايا الداخلية لأي مثلث يساوي 180°، فإن

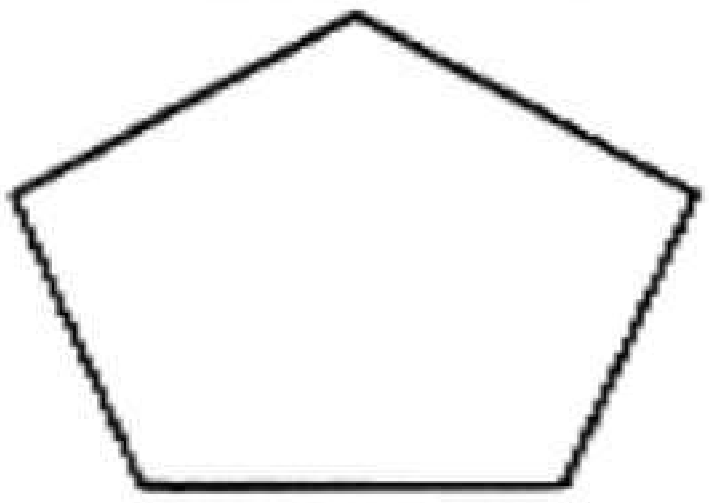
$$180^\circ - m\angle QPR - m\angle QRP = m\angle PQR$$

$$180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$$

إذن فالمثلث ΔPQR متطابق الأضلاع.



46) **مسألة مفتوحة:** ارسم مضلعًا، وأوجد مجموع قياسات زواياه الداخليّة.
ما عدد أضلاع المضلع الذي مجموع قياسات زواياه الداخليّة مِثلا المجموع الذي أوجدته؟ برّر إجابتك.



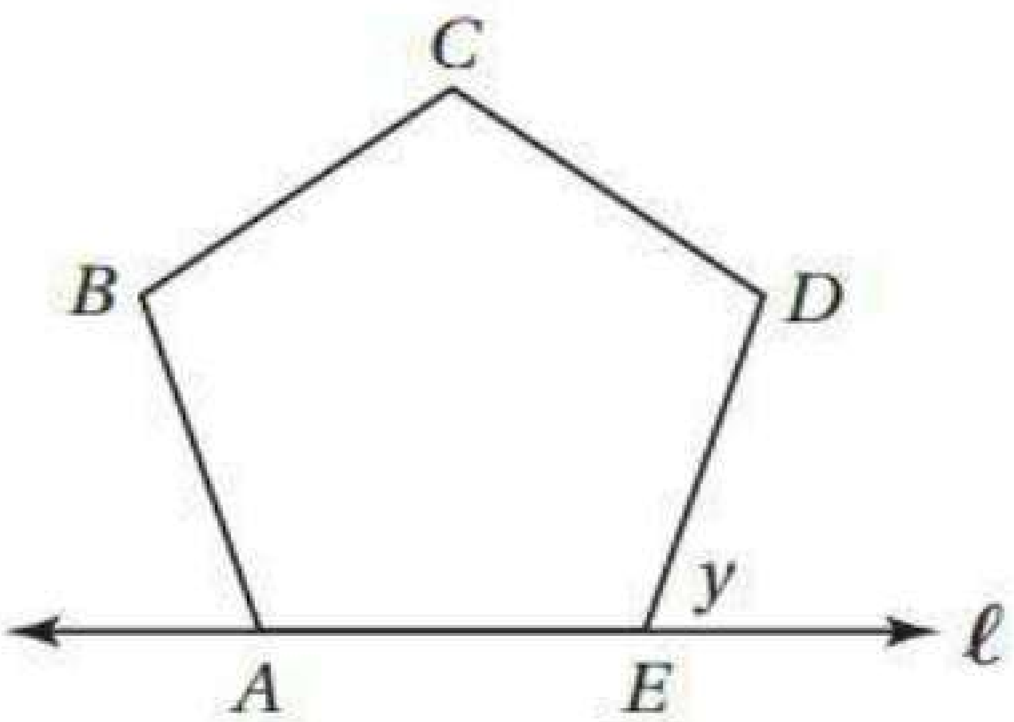
مجموع قياسات الزوايا الداخلية لهذا المضلع يساوي $180^\circ.(5-2) = 540^\circ$
ومِثلا هذا المجموع يساوي (540) .2 أو 1080
وعدد أضلاع المضلع الذي مجموع قياسات زواياه الداخلية 1080°
هو حل المعادلة $1080^\circ = 180^\circ \cdot (n-2)$ ومنها $n = 8$.

48) **اكتب:** وضّح العلاقة بين المثلثات ونظرية مجموع قياسات الزوايا الداخليّة للمضلع.

اشتقت نظرية مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمضلع من النمط الذي يربط عدد أضلاع المضلع بعدد المثلثات. والصيغة هي حاصل ضرب مجموع قياسات زوايا المثلث أي 180° في عدد المثلثات في المضلع.

تدريب على اختبار

48) **إجابة قصيرة:** الشكل $ABCDE$ خماسي منتظم، والمستقيم ℓ يحوي $\overline{AE}$. ما قياس $\angle y$؟



$$(5-2).180^\circ = 540^\circ$$

$$\angle DEA = \frac{540^\circ}{5} = 108^\circ$$

$$\angle Y = 180 - 108^\circ = 72^\circ$$

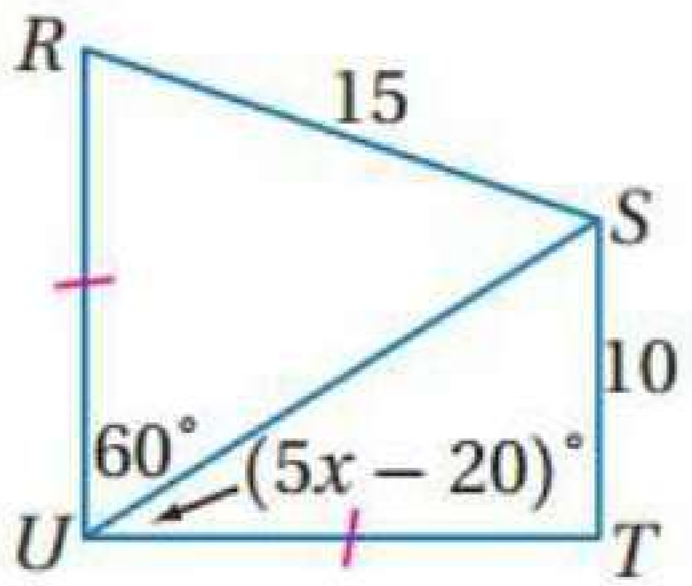
49) إذا كان مجموع قياسات الزوايا الداخليّة لمضلع مِثْلي مجموع قياسات زواياه الخارجيّة، فما نوع هذا المضلع؟

A مربع
B خماسي
C سداسي
D ثماني

C سداسي

مراجعة تراكمية

50) **جبر:** اكتب متباينة تمثّل مدى القيم الممكنة لـ x (الدرس 6-4)



$$60 + 5x - 20 = 90$$

$$40 + 5x = 90$$

$$5x = 90 - 40$$

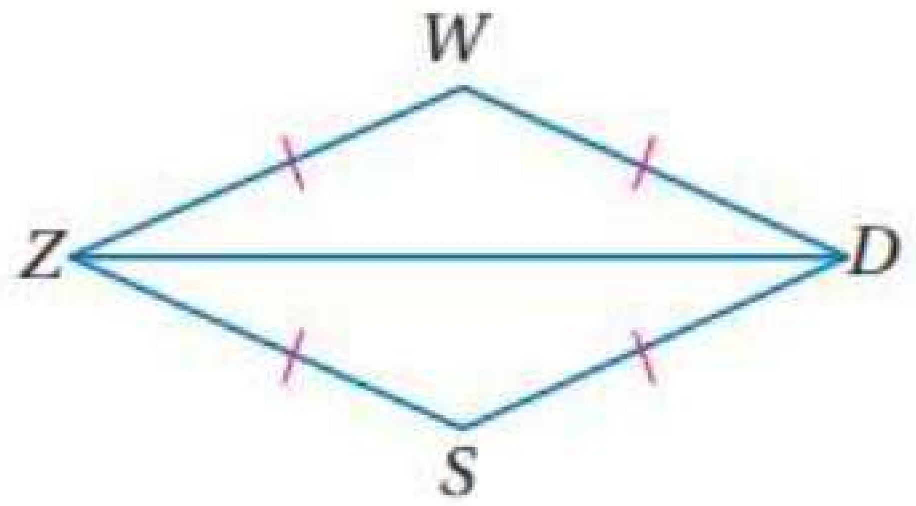
$$5x = 50$$

$$x = 10$$

بيّن في كل مما يأتي أن المثلثين متطابقان، وحدِّد حالة التطابق، ثم اكتب عبارة

تطابق : (الدرسان 5-3 ,4-3)

(51

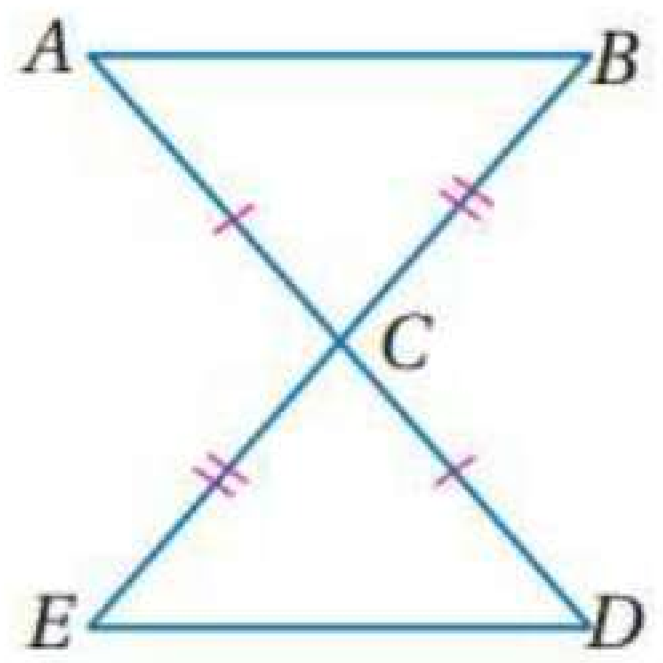


$\overline{WD} \cong \overline{DS}$, $\overline{WZ} \cong \overline{ZS}$ (معطى)

$\overline{ZD} \cong \overline{ZD}$ حسب خاصية الانعكاس

إذا $\Delta ZWD \cong \Delta ZSD$ حسب SSS

(52

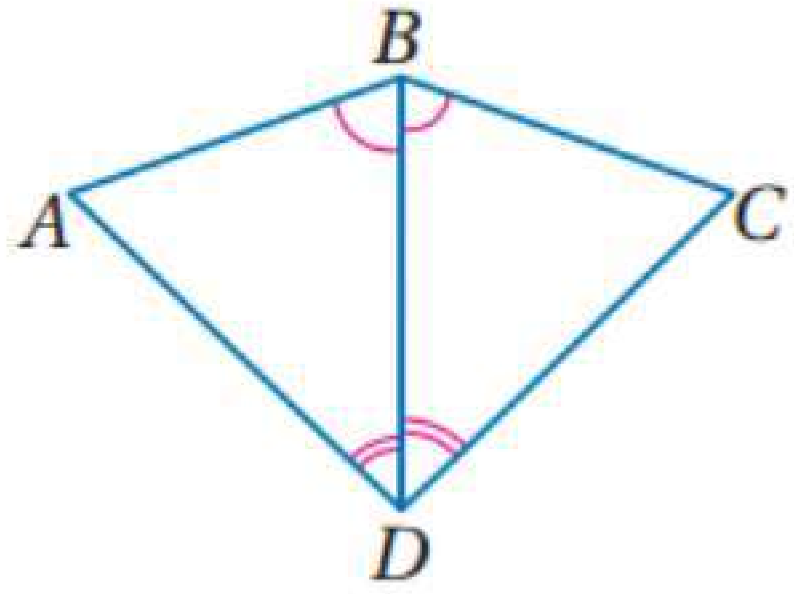


$\overline{CB} \cong \overline{CE}$, $\overline{AC} \cong \overline{CD}$ (معطى)

$\angle ACB \cong \angle ECD$ بالتقابل بالرأس

$\Delta ACB \cong \Delta ECD$ حسب SAS

(53



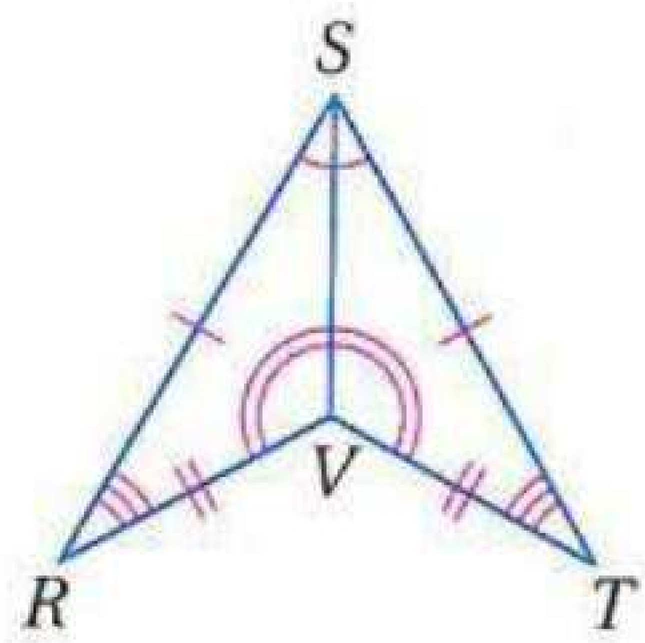
$\Delta CBD \cong \Delta ABD$

$\angle CBD = \angle ABD$

$\angle BDC = \angle BDA$

$BD = BD$ (خاصية الانعكاس)

(54



$SV = SV$ (حسب خاصية الانعكاس)

$ST = SR$ (معطى)

$VR = VT$ (معطى)

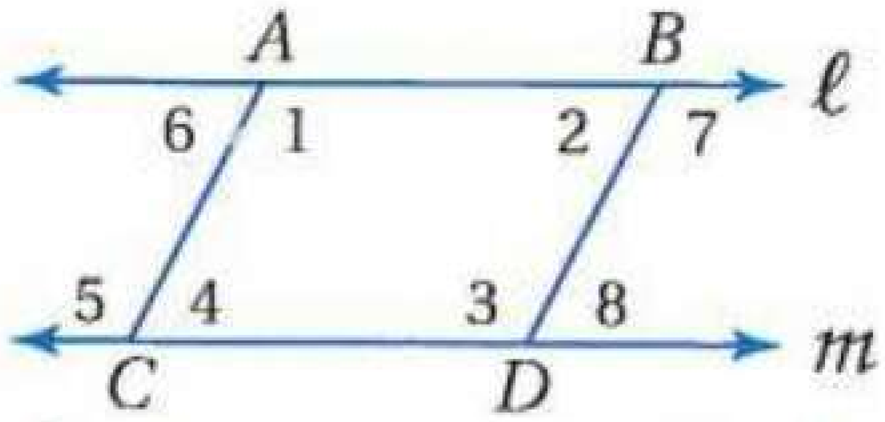
$\angle TSV = \angle RSV$

$\angle SVT = \angle SVR$

$\Delta SVT \cong \Delta SVR$ لأن جميع الأضلاع المتناظرة متطابقة وجميع الزوايا المتناظرة متطابقة

استعد للدرس اللاحق

في الشكل المجاور $\overline{BD} \parallel \overline{AC}$, $m \parallel \ell$ ، حدد جميع أزواج الزوايا في كل مما يأتي:



54) زاويتان متبادلتان داخليًّا.

الزوايا 1 و5؛ 4 و6؛ 2 و8؛ 3 و7

55) زاويتان متحالفتان.

الزوايا 1 و4؛ 2 و3؛ 1 و2؛ 3 و4؛ 8 و7؛ 6 و5

5-1 توسع: معمل الجداول الإلكترونية: زوايا المضلع

تمارين ومسائل:

1) اكتب صيغة لإيجاد قياس زاوية داخلية للمضلع المنتظم.

$$\frac{C2}{A2}$$

2) اكتب صيغة لإيجاد مجموع قياسات الزوايا الخارجيّة للمضلع المنتظم.

$A2*E2$

3) ما قياس كل زاوية داخليّة إذا كان عدد الأضلاع 1 أو 2؟

$0^\circ - 180^\circ$

4) هل من الممكن أن يكون عدد الأضلاع 1 أو 2؟ وضّح إجابتك.

لا؛ لأن المضلع شكل مغلق مكون من قطع مستقيمة تقع في المستوى نفسه.

استعمل جدولًا إلكترونيًا لحل الأسئلة 8–5 :

5) ما عدد المثلثات في مضلع عدد أضلاعه 17 ضلعًا؟

15

6) أوجد قياس الزاوية الخارجية لمضلع منتظم عدد أضلاعه 16 ضلعًا.

$$16n = 360$$

$$n = \frac{360}{16} = 22.5^\circ$$

7) أوجد قياس زاوية داخلية لمضلع منتظم عدد أضلاعه 115 ضلعًا.

$$20340 = 180.(n-2)$$

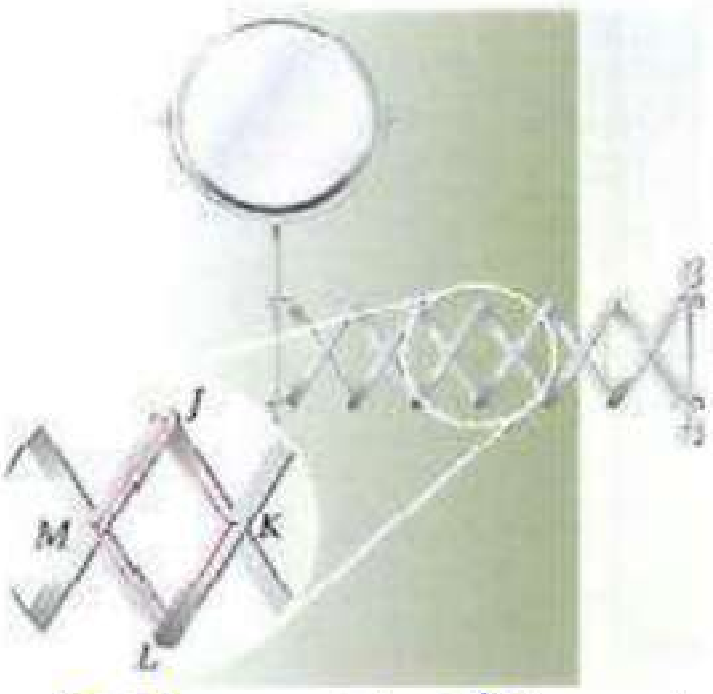
$$176.9^\circ = \frac{20340}{115}$$

8) إذا كان قياس كل من الزوايا الخارجية 0°، فأوجد قياسات جميع الزوايا الداخلية.
وهل هذا ممكن؟ وضّح إجابتك.

سيكون قياس كل زاوية داخلية، 180° وهذا غير ممكن للمضلع.

5-2 متوازي الأضلاع

تحقق



1) **مرايا:** تُستعمل في مرآة الحائط المبينة جانبًا متوازيات أضلاع يتغير شكلها كُلّما مُدّ الذراع. في $\square JKLM$ ، إذا كان $m\angle J = 47, MJ = 8$ cm، فأوجد كلًّا مما يأتي:

A) LK

$LK = MJ$ (كل ضلعين في متوازي الأضلاع متطابقان)

$= 8cm$

B) $m\angle L$

$m\angle L = m\angle J$ (كل زاويتين متقابلتين في متوازي الأضلاع متطابقتان)

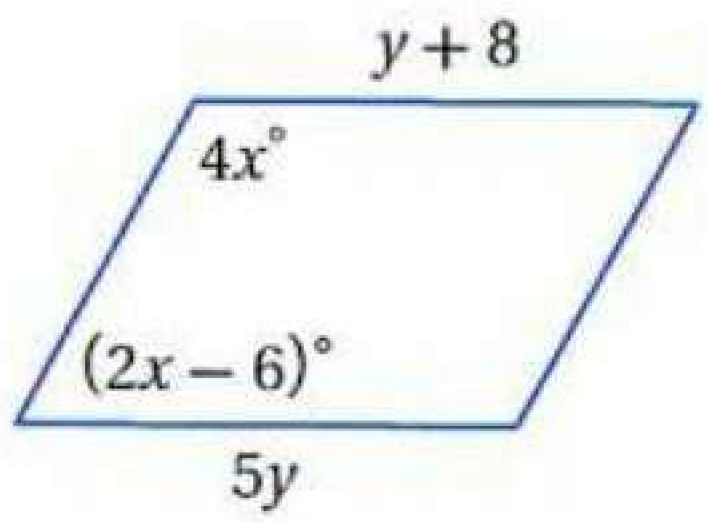
$= 47^\circ$

C) إذا مُدّ الذراع حتى أصبح $m\angle J = 90^\circ$، فكم يصبح قياس كل من $\angle K, \angle L, \angle M$؟ برّر إجابتك.

سيكون قياس كل من الزوايا الأخرى 90° تبعاً للنظرية 1.6.

أوجد قيمة المتغير في كل من متوازيي الأضلاع الآتيين :

2A)



$y + 8 = 5y$ (تعريف تطابق القطع المستقيمة)

$4y = 8$

$y = 2$

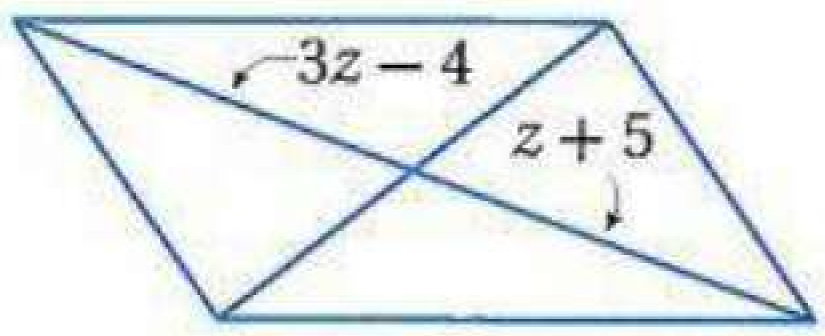
$4x + (2x - 6) = 180^\circ$

$6x = 186^\circ$

$x = 31$

$x = 31, y = 2$

(2B



$3z - 4 = z + 5$ (قطرا متوازي الأضلاع ينصف كلا منهما الآخر)

$2z = 9$

$z = 4.5$

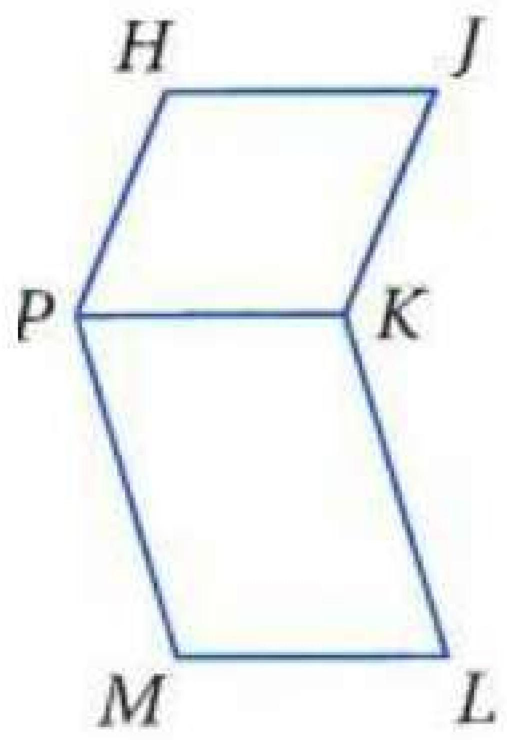
3) **هندسة إحداثيَّة :** أوجد إحداثيي نقطة تقاطع قطري $\square RSTU$ الذي رؤوسه $R(-8, -2), S(-6, 7), T(6, 7), U(4, -2)$.

بما أن قطري متوازي الأضلاع ينصف كلا منهما الآخر، فإن نقطة تقاطعهما هي نقطة منتصف كل من $\overline{SU}$, $\overline{RT}$. أوجد نقطة منتصف $\overline{RT}$ التي طرفاها $(-8،-2), (6\ 7)$

$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = \left(\frac{-8+6}{2}, \frac{-2+7}{2}\right)$ (صيغة نقطة المنتصف)

$= (-1،2.5)$ (بالتبسيط)

إذن إحداثيا نقطة تقاطع قطري RSTU هما $(-1،2.5)$



4) اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $\square HJKP$, $PKLM$

المطلوب: $\overline{HJ} \cong \overline{ML}$

المعطيات: متوازيا الأضلاع HJKP, PKLM

المطلوب: $\overline{HJ} \cong \overline{ML}$

البرهان:

العبارات (المبررات):

1) HJKP, PKLM متوازيا أضلاع (معطيات)

2) $\overline{HJ} \cong \overline{PK}$, $\overline{PK} \cong \overline{ML}$ (الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة)

3) $HJ = ML$ (خاصية التعدي)

تأكد:

1) **ملاحة:** يستعمل البحّارة مسطرتين متوازيتين يصل بينهما ذراعان متساويا الطول لتحديد اتجاه إبحارهم، فيضعون حافة إحدى المسطرتين بمحاذاة مسار الإبحار ثم يحركون المسطرة الأخرى حتى تصل إلى قرص بوصلة مرسوم على الخريطة. تُشكّل المسطرتين والذراعين الواصلين بينهما $\square MNPQ$.

a) إذا كان $MQ = 2\text{in}$ ، فأوجد NP.

$NP = 2\text{in}$ لأن كل ضلعين متناظرين متطابقين

b) إذا كان $m\angle NMQ = 38^\circ$ ، فأوجد $m\angle MNP$.

كل زاويتين متحالفتين مجموعهم $= 180^\circ$

$$38 + m\angle NMQ = 180^\circ$$

$$m\angle NMQ = 180 - 38$$

$$m\angle NMQ = 142^\circ$$

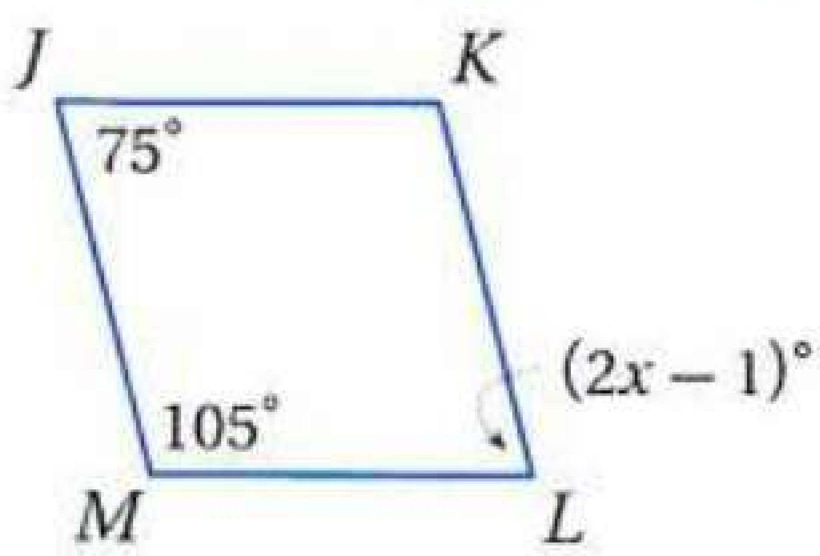
c) إذا كان $m\angle MQP = 128^\circ$ ، فأوجد $m\angle MNP$.

من خصائص متوازي الأضلاع كل زاويتين متقابلين متطابقين

$$\angle MNP = 128^\circ$$

المثال 2 **جبر:** أوجد قيم المتغيرات في كل من متوازيات الأضلاع الآتية :

2)



من خصائص متوازي الأضلاع كل زاويتين متقابلين متطابقين

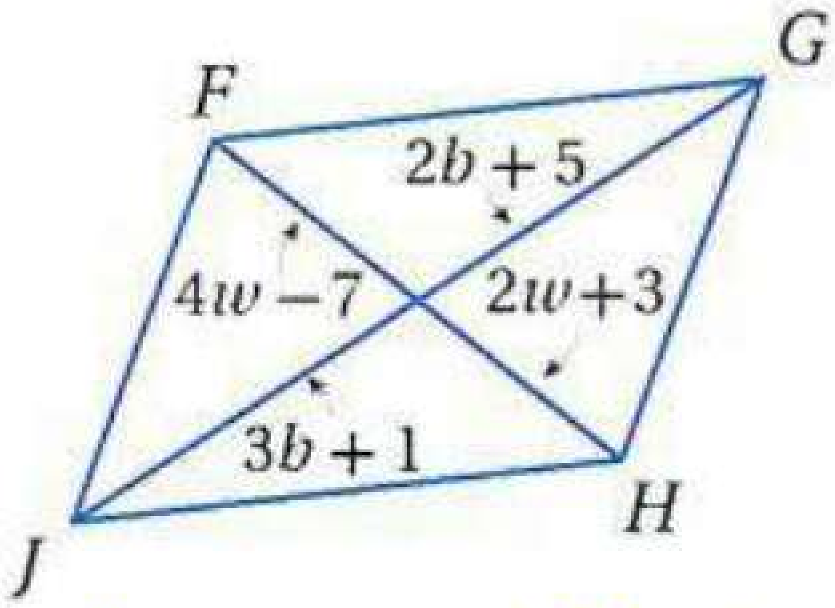
$\angle L = 75^\circ$

$2x - 1 = 75$

$2x = 76$

$x = 38$

3)



حسب نظرية قطرا متوازي الأضلاع

$2w + 3 = 4w - 7$

$2w - 4w = -7 - 3$

$-2w = -10$

$w = 5$

$2b + 5 = 3b + 1$

$2b - 3b = 1 - 5$

$-b = -4$

$b = 4$

المثال 3 4) **هندسة إحداثية :** أوجد إحداثيي نقطة تقاطع قطري $\square ABCD$ الذي رؤوسه $A(-4, 6), B(5, 6), C(4, -2), D(-5, -2)$.

بما أن قطري متوازي الأضلاع ينصف كلا منهما الآخر، فإن نقطة تقاطعهما هي نقطة منتصف كل من $\overline{BD}$, $\overline{AC}$. أوجد نقطة منتصف $\overline{AC}$ التي طرفاها

$(-4،6), (4 \quad -2)$

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = \left(\frac{-4+4}{2}, \frac{6-2}{2}\right)$$ (صيغة نقطة المنتصف)

$$m\angle WZX + m\angle ZXW = 90^\circ$$

$$x - 11 + x - 9 = 90$$

$$2x - 20 = 90$$

$$2x = 110$$

$$x = 55$$

$$\angle ZXW = x - 11 = 55 - 11$$

$$\angle ZXW = 44$$

$$\angle ZXY = 90 - 44 = 46^\circ$$

(بالتبسيط)

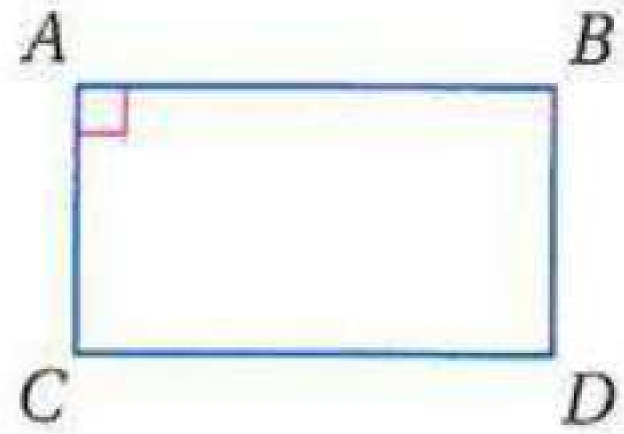
إذن إحداثيا نقطة تقاطع قطري $\overline{ABCD}$ هما $(0,2)$

المثال 4 **برهان:** اكتب برهانًا من النوع المحدد في كل من السؤالين الآتيين :

5) برهانًا حرًّا.

المعطيات: $ABCD$ متوازي أضلاع، $\angle A$ قائمة.

المطلوب: $\angle B, \angle C, \angle D$ قوائم. (النظرية 5.6)



المعطيات: ABCD متوازي أضلاع فيه الزاوية A قائمة.

المطلوب: الزوايا B, C, D قوائم. (النظرية 5.6).

البرهان: حسب تعريف متوازي الأضلاع $\overline{AD} \parallel \overline{CB}$

ولأن $\angle A$ قائمة فإن $\overline{AD} \perp \overline{AB}$.

وحسب نظرية القاطع العمودي يكون $\overline{AB} \perp \overline{CB}$.

إذن $\angle B$ قائمة لأن المستقيمين المتعامدين يشكلان زاوية قائمة

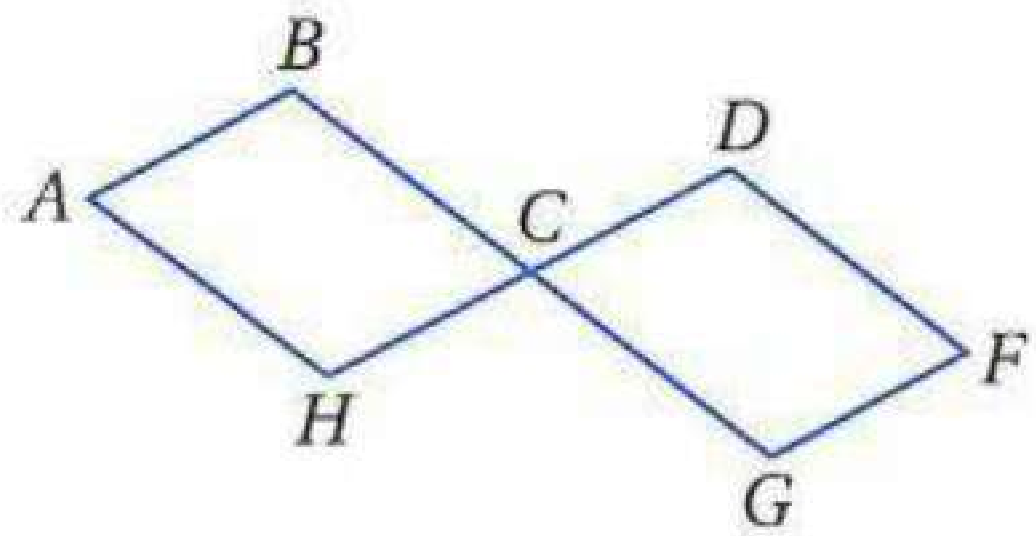
وكذلك $\angle D \cong \angle B$ و $\angle A \cong \angle C$ لأن الزوايا المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة.

إذن الزوايا C, D قائمتان لأن لجميع الزوايا المتطابقة القياس نفسه.

6) برهانًا ذا عمودين.

المعطيات: $ABCH$, $DCGF$ متوازيا أضلاع.

المطلوب: $\angle A \cong \angle F$.



المعطيات: متوازيا الأضلاع DCGF, ABCH.

المطلوب: $\angle A \cong \angle F$

البرهان:

العبارات (المبررات):

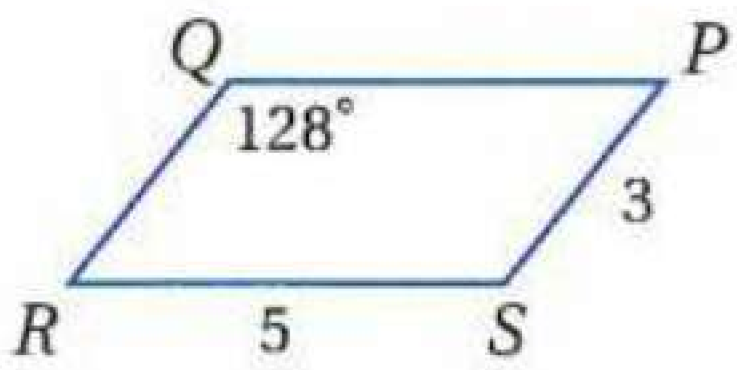
1) ABCH و DCGF متوازيا أضلاع. (معطى)

2) Ê BCH ≅ Ê DCG (الزاويتان المتقابلتان بالرأس متطابقتان)

3) Ê A ≅ Ê BCH و Ê F ≅ Ê DCG (الزوايا المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة)

4) Ê A ≅ Ê F (خاصية التعدي)

تدرب وحل المسائل:



استعمل $\square PQRS$ المبين جانبًا لإيجاد كل مما يأتي :

7) $m\angle R$

كل زاويتين متحالفتين مجموعهم = 180°

$$128 + m\angle QRS = 180^\circ$$

$$m\angle QRS = 180^\circ - 128^\circ$$

$$m\angle QRS = 52^\circ$$

8) QR

كل ضلعين متناظرين متطابقين في متوازي الأضلاع

$$QR = PS = 3cm$$

9) QP

كل ضلعين متناظرين متطابقين في متوازي الأضلاع

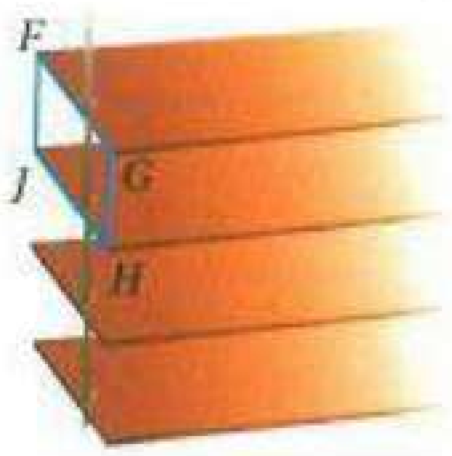
$$QP = RS = 5cm$$

10) $m\angle S$

كل زاويتين متقابلتين متساويتين

$$m\angle Q = m\angle S = 128^\circ$$

11) **ستائر:** في الشكل المقابل صورة لشرائح ستائر النوافذ المتوازية دائمًا؛ لتسمح بدخول أشعة الشمس. في $\square FGHJ$ ، إذا كان $\angle JHG = 62^\circ$ ، $FG = 1$ in, $FJ = \frac{3}{4}$ in ، فأوجد كلًا مما يأتي :



a) JH

كل ضلعين في متوازي الأضلاع متقابلين متطابقين

$$FG = JH = 1in$$

GH (b

كل ضلعين في متوازي الأضلاع متقابلين متطابقين

$$FG = GH = \frac{3}{4} in$$

$m\angle JFG$ (c

كل زاويتين في متوازي الأضلاع متقابلين متطابقين

$$m\angle JHG = m\angle JFG = 62^\circ$$

$m\angle FJH$ (d

كل زاويتين متحالفتين مجموعهم = 180°

$$m\angle JFG + m\angle FJH = 180^\circ$$

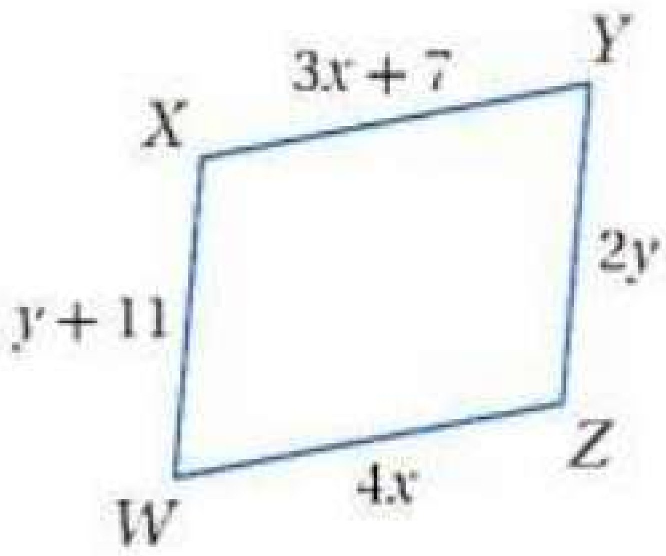
$$62^\circ + m\angle FJH = 180^\circ$$

$$m\angle FJH = 180^\circ - 62^\circ$$

$$m\angle QRS = 118^\circ$$

جبر: أوجد قيمتي x, y في كل من متوازيات الأضلاع الآتية :

(12



بما أن الشكل متوازي أضلاع إذن كل ضلعين متقابلين متطابقين

$$3x + 7 = 4x$$

$$4x - 3x = 7$$

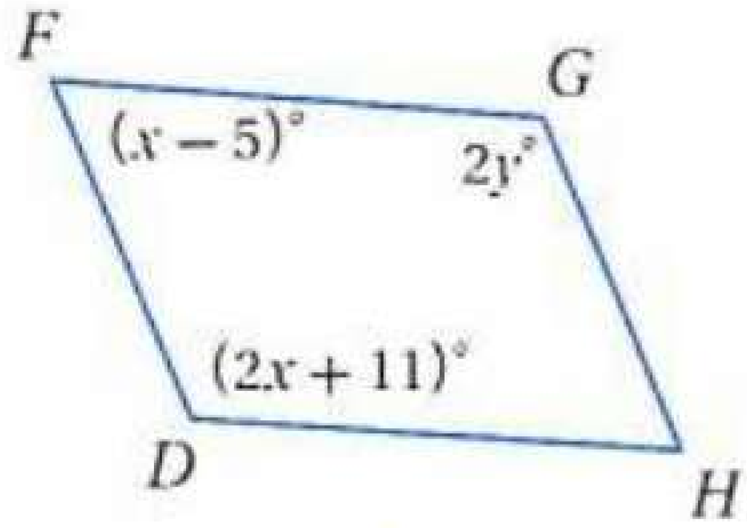
$$x = 7$$

$$2y = y + 11$$

$$2y - y = 11$$

$$y = 11$$

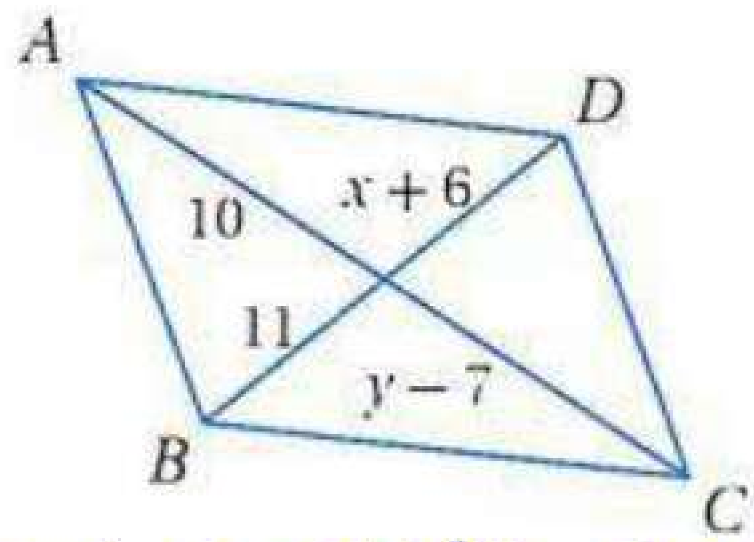
(13



كل زاويتين متحالفتين مجموعهم = 180°

$$x - 5 + 2x + 11 = 180^\circ$$
$$x + 16 = 180$$
$$x = 164$$
$$x - 5 + 2y = 180$$
$$164 - 5 + 2y = 180$$
$$159 + 2y = 180$$
$$2y = 180 - 159 = 21$$
$$y = 10.5$$

(14



قطرا متوازي الأضلاع ينصف كل منهما الأخر

$$x + 6 = 11$$
$$x = 5$$
$$10 = y - 7$$
$$y = 10 + 7$$
$$y = 17$$

هندسة إحداثية: أوجد إحداثيي نقطة تقاطع قطري $\square WXYZ$ المعطاة رؤوسه في كل من السؤالين الآتيين :

15) $W(-1, 7), X(8, 7), Y(6, -2), Z(-3, -2)$

بما أن قطري متوازي الأضلاع ينصف كلا منهما الآخر، فإن نقطة تقاطعهما هي نقطة منتصف كل من $\overline{XZ}$, $\overline{WY}$. أوجد نقطة منتصف $\overline{WY}$ التي طرفاها

$(-1،7), (6\ \ -2)$

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) = \left(\frac{-1+6}{2}, \frac{7-2}{2}\right)$$ (صيغة نقطة المنتصف)

$(2.5،2.5)$ (بالتبسيط)

إذن إحداثيا نقطة تقاطع قطري $\overline{ABCD}$ هما $(2.5،2.5)$

16) $W(-4, 5), X(5, 7), Y(4, -2), Z(-5, -4)$

بما أن قطري متوازي الأضلاع ينصف كلا منهما الآخر، فإن نقطة تقاطعهما هي نقطة منتصف كل من $\overline{XZ}$, $\overline{WY}$. أوجد نقطة منتصف $\overline{WY}$ التي طرفاها

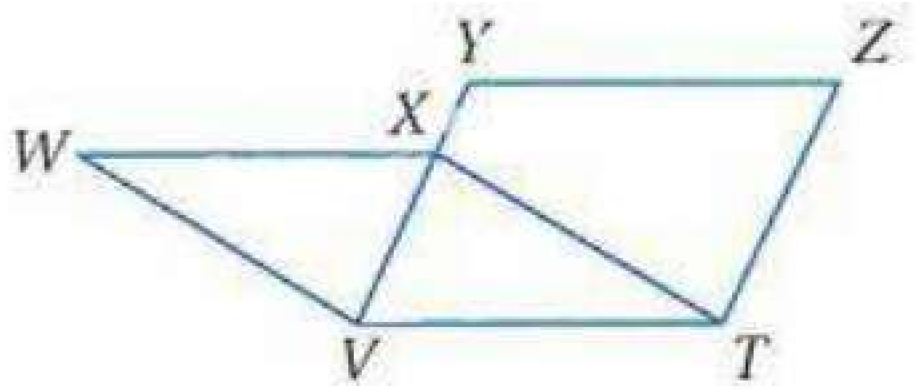
$(-4،5), (4\ \ -2)$

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) = \left(\frac{-4+4}{2}, \frac{5-2}{2}\right)$$ (صيغة نقطة المنتصف)

$(0،1.5)$ (بالتبسيط)

إذن إحداثيا نقطة تقاطع قطري $\overline{ABCD}$ هما $(0،1.5)$

برهان: اكتب برهانًا ذا عمودين فيما يأتي :



17) المعطيات: $\square WXTV , \square ZYVT$

المطلوب: $\overline{WX} \cong \overline{ZY}$

المعطيات: متوازيا الأضلاع WXTV, ZYVT.

المطلوب: $\overline{WX} \cong \overline{ZY}$

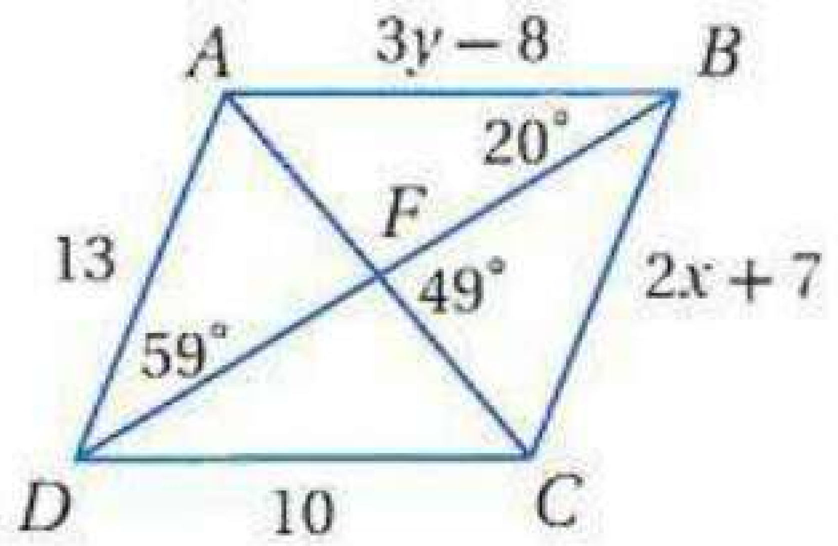
البرهان: العبارات (المبررات):

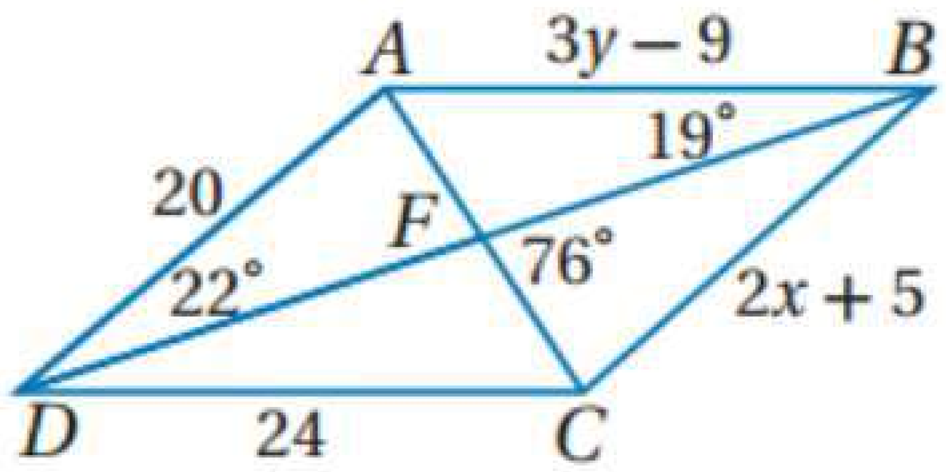
1) متوازيا الأضلاع WXTV, ZYVT (معطى)

2) $\overline{YZ} \cong \overline{VT}$, $\overline{VT} \cong \overline{WX}$. **(الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة)**

3) $\overline{YZ} \cong \overline{WX}$ **(خاصية التعدي)**

جبر: استعمل $\square ABCD$ المبين جانبًا لإيجاد كل مما يأتي :





18) x

كل ضلعين متقابلين متطابقين

$$2x + 5 = 20$$
$$2x = 20 - 5$$
$$2x = 15$$
$$x = 7.5$$

19) y

$$3y - 9 = 24$$
$$3y = 24 + 9$$
$$3y = 33$$
$$y = 11$$

20) $m\angle AFB$

$$\angle AFB = 180 - 76$$
$$\angle AFB = 104^\circ$$

21) $m\angle DAC$

$$\angle DAC = 180 - (76 + 22)$$
$$\angle DAC = 82^\circ$$

22) $m\angle ACD$

$$\angle CAB = 180 - (\angle AFB + \angle ABF)$$

$$\angle CAB = 180 - (19 + 76) = 85^\circ$$

$$\angle ACD = \angle CAB = 85^\circ$$ بالتبادل داخليا

23) $m\angle DAB$

$$\angle AFD = 76$$ بالتقابل بالرأس

$$\angle DAF = 180 - (76 + 22) = 82$$

$$\angle DAB = \angle DAF + \angle CAB$$

$$\angle DAB = 82 + 85 = 167^\circ$$

24) **هندسة إحداثية :** إذا كانت $A(-2, 5), B(2, 2), C(4, -4)$ رؤوسًا في $\square ABCD$، فأوجد إحداثيات الرأس D. وضّح تبريرك.

الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع متوازية

وبما أن ميل $\overline{BC}$ يساوي $\frac{-6}{2}$ فإن ميل $\overline{AD}$ يساوي $\frac{-6}{2}$ أيضاً.

ولتعيين الرأس D، ابدأ من الرأس A وتحرك إلى الأسفل 6 وحدات وإلى اليمين وحدتين.

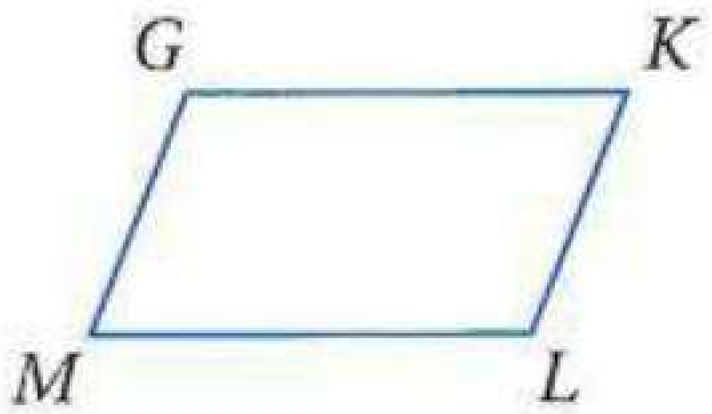
إذن الرأس $D = (0, -1)$

برهان: اكتب برهانًا من النوع المحدد في كل مما يأتي :

25) برهان ذو عمودين.

المعطيات: $GKLM$ متوازي أضلاع ،

المطلوب: $\angle G$ و $\angle K$ ، $\angle K$ و $\angle L$ ،
$\angle L$ و $\angle M$ ، $\angle M$ و $\angle G$ زوايا متكاملة.
(النظرية 5.5)



البرهان:

العبارات (المبررات):

1) متوازي الأضلاع GKLM (معطى)

2) $\overline{GK} \parallel \overline{ML}$, $\overline{GM} \parallel \overline{KL}$ (الأضلاع المتقابلة لمتوازي الأضلاع متوازية)

3) ËK و ËG ، ËK و ËL ، ËL و ËM ، ËM و ËG زوايا متكاملة

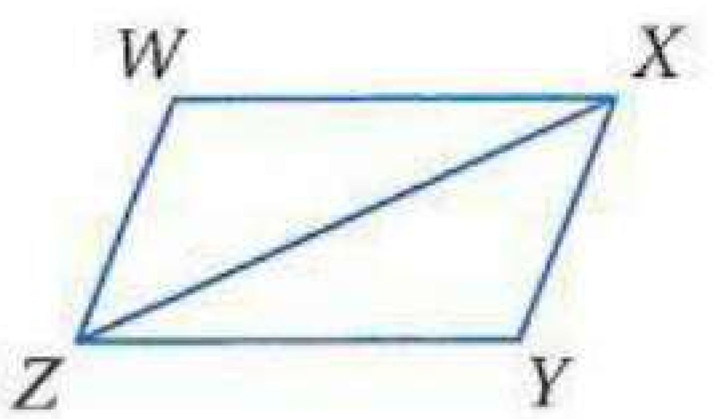
(كل زاويتين متحالفتين في متوازي الأضلاع متكاملتين)

26) برهان ذو عمودين.

المعطيات: $WXYZ$ متوازي أضلاع ،

المطلوب: $\triangle WXZ \cong \triangle YZX$

(النظرية 5.8)



البرهان:

العبارات (المبررات):

2) متوازي الأضلاع WXYZ (معطى)

WX = ZY , XY = WZ ضلعين متناظرين متطابقين

XZ = ZX خاصية الانعكاس

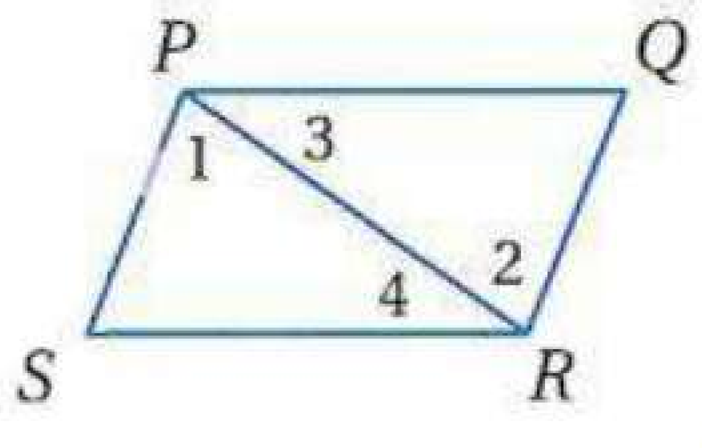
3) $\Delta XYZ \cong \Delta YZX$ (SSS)

27) برهان ذو عمودين.

المعطيات: $PQRS$ متوازي أضلاع.

المطلوب: $\overline{PQ} \cong \overline{RS}$, $\overline{QR} \cong \overline{SP}$

(النظرية 5.3)



البرهان:

العبارات (المبررات):

1) متوازي الأضلاع PQRS (معطى)

2) ارسم قطعة مستقيمة مساعدة PR (قطر PQRS) وسِمِ الزوايا 1، 2، 3، 4 كما هو مبين.

3) $\overline{PQ} \parallel \overline{SR}$, $\overline{PS} \parallel \overline{QR}$ (الأضلاع المتقابلة لمتوازي الأضلاع متوازية)

4) $\angle 1 = \angle 2$ ، و $\angle 3 = \angle 4$ (نظرية الزوايا المتبادلة داخلياً)

5) $PR = RP$ (خاصية الانعكاس)

6) $\Delta QRP \cong \Delta SRP$ (SAS)

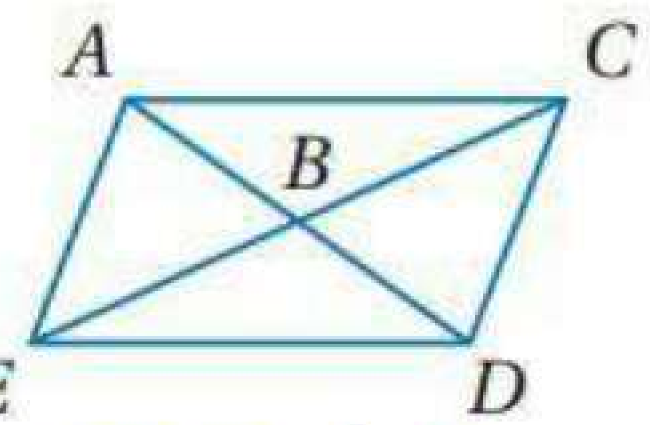
7) $\overline{QR} \cong \overline{SP}$, $\overline{PQ} \cong \overline{RS}$ (العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين متطابقة)

28) برهانًا حرًّا.

المعطيات: $ACDE$ متوازي أضلاع.

المطلوب: القطران $\overline{AC}$ و $\overline{AD}$ ينصف كلٌّ منهما الآخر.

(النظرية 5.7)



البرهان: معطى أن ACDE متوازي أضلاع.

بما أن الأضلاع المتقابلة لمتوازي الأضلاع متطابقة فإن $\overline{DC} \cong \overline{EA}$.

ومن تعريف متوازي الأضلاع $\overline{EA} \parallel \overline{DC}$

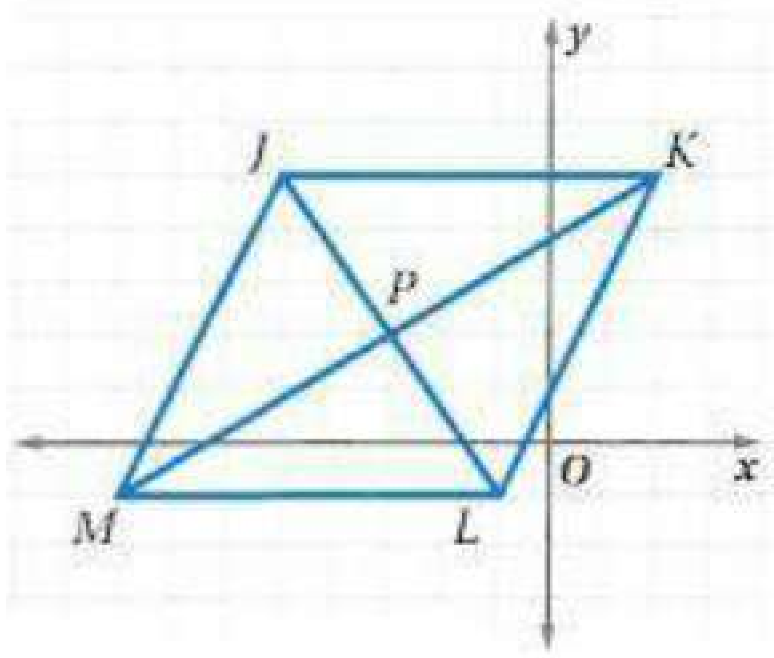
وتكون $\angle AEB \cong \angle DCB$ و $\angle EAB \cong \angle CDB$ لأن الزوايا المتبادلة داخلياً متطابقة.

لأن الزوايا المتبادلة داخلياً متطابقة. إذن $\Delta CBD \cong EBA$ حسب ASA.

و $\overline{EB} \cong \overline{BC}$ و $\overline{AB} \cong \overline{BD}$ لأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة ومن تعريف منصف القطعة المستقيمة فإن $\overline{EC}$ تنصف $\overline{AD}$ و $\overline{AD}$ تنصف $\overline{EC}$.

29) **هندسة إحداثية:** استعن بالشكل المجاور في كل مما يأتي:

a) استعمل صيغة المسافة بين نقطتين لتحديد ما إذا كان قطرا $JKLM$ ينصّف كل منهما الآخر. وضّح إجابتك.



$(-3,2)$ ، $(2,5)$

$PK = \sqrt{(-3-2)^2 + (2-5)^2}$

$PK = \sqrt{34}$

$(-8,-1)$ ، $(-3,2)$

$MP = \sqrt{(-8+3)^2 + (-1-2)^2}$

$MP = \sqrt{34}$

$MP = PK = \sqrt{34}$

$L, P = (-1,-1)$ ، $(-3,2)$

$LP = \sqrt{(-1+3)^2 + (-1-2)^2}$

$LP = \sqrt{13}$

$J, P = (-5,5)$ ، $(-3,2)$

$JP = \sqrt{(-5+3)^2 + (5-2)^2}$

$JP = \sqrt{13}$

$JP = LP = \sqrt{13}$

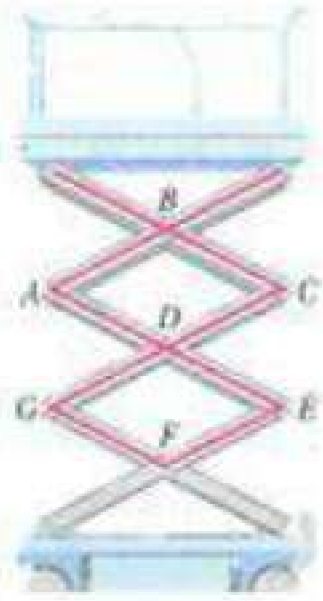
بما أن $JP = LP, MP = KP$ فإن القطرين ينصف كل منهما الآخر.

b) حدّد ما إذا كان قطرا $JKLM$ متطابقين. وضّح إجابتك.

لا؛ $JP + LP \neq MP + KP$

c) استعمل صيغة الميل لتحديد ما إذا كانت الأضلاع المتتالية متعامدة أم لا. وضّح إجابتك.

لا؛ ميل JK يساوي 0، وميل JM يساوي 2؛ أحدهما لا يساوي سالب معكوس الآخر.



30) **رافعات:** في الشكل المجاور: $DEFG$ ، $ABCD$ متوازيا أضلاع متطابقان.

a) حدد الزوايا التي تطابق $\angle A$. وضّح تبريرك.

الزوايا C, E, G؛ إجابة ممكنة: $\angle A \cong \angle C$ لأن الزوايا المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة.

$\angle E \cong \angle A$ لأن متوازيي الأضلاع متطابقان، $\angle G \cong \angle E$ لأن الزوايا المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة وتطابق $\angle A$ حسب خاصية التعدي.

b) حدد القطع المستقيمة التي تطابق $\overline{BC}$. وضّح تبريرك.

$\overline{GF}$, $\overline{DE}$, $\overline{AD}$

$\overline{AD} \cong \overline{BC}$ لأن الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة.

$\overline{DE} \cong \overline{BC}$ لأن متوازيي الأضلاع متطابقان

$\overline{GF} \cong \overline{DE}$ لأن الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة وتطابق $\overline{BC}$ حسب خاصية التعدي.

c) حدد الزوايا المكملة للزاوية C. وضّح تبريرك.

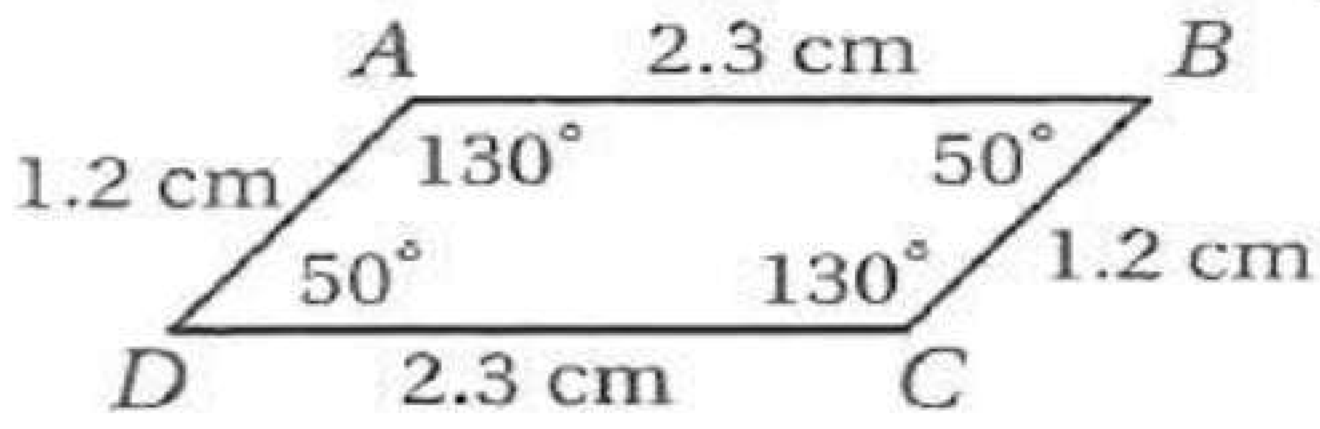
الزوايا $\angle EFG$, $\angle EDG$, $\angle ADC$, $\angle ABC$

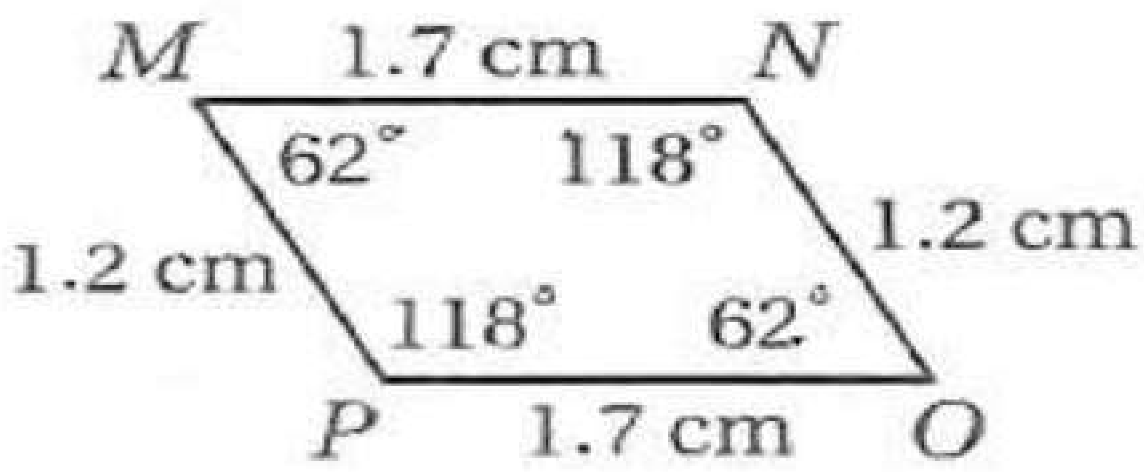
$\angle ABC$ و$\angle ADC$ مكملتان $\angle C$ ؛ لأن الزوايا المتحالفة في متوازي الأضلاع متكاملة.

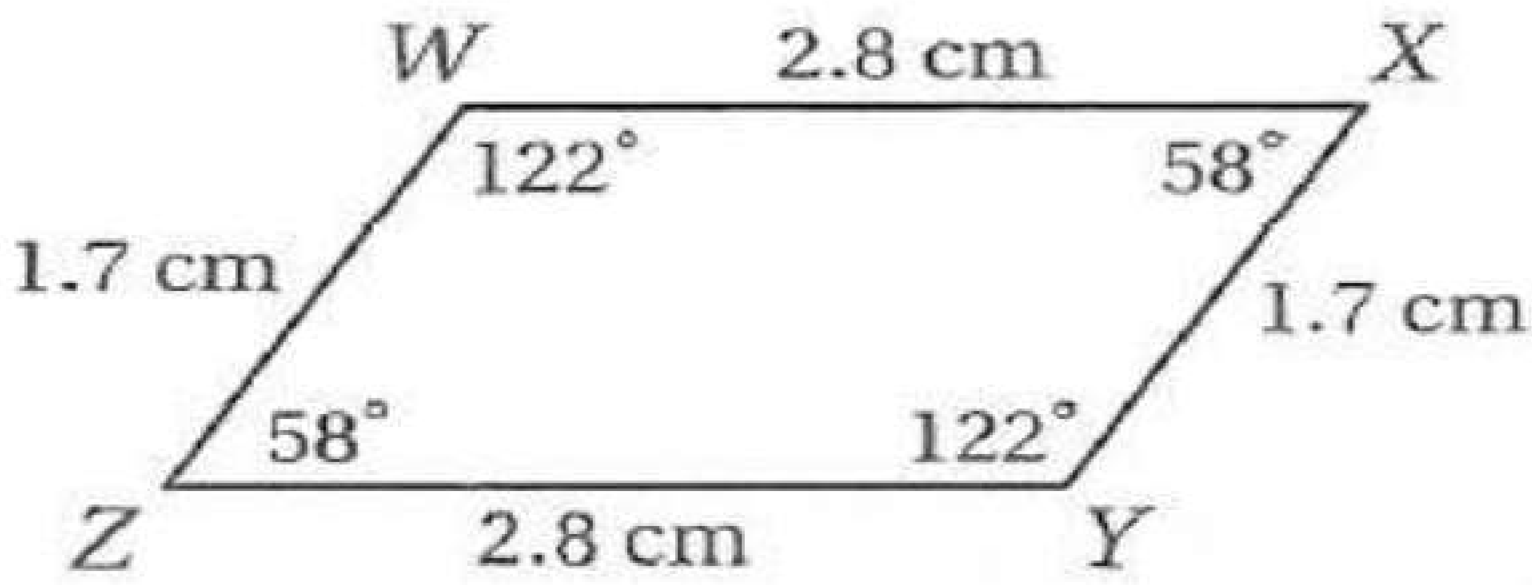
$\angle EDG$ مكملة $\angle C$ لأنها تطابق $\angle ADC$ حسب نظرية الزوايا المتقابلة بالرأس ومكملة $\angle C$ بالتعويض، $\angle EFG$ تطابق $\angle EDG$ لأن الزوايا المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة، ومكملة $\angle C$ بالتعويض.

31) **تمثيلات متعددة:** سوف تستقصي في هذه المسألة اختبارات لتمييز متوازي الأضلاع.

a) هندسيًّا: ارسم ثلاثة أزواج من القطع المستقيمة المتطابقة والمتوازية. صِل الأطراف لتكوِّن أشكالًا رباعية، وسمِّها $ABCD$, $MNOP$, $WXYZ$. ثم قِس أطوال الأضلاع وقياسات الزوايا لكل منها.







b) جدوليًّا: أكمل الجدول الآتي:

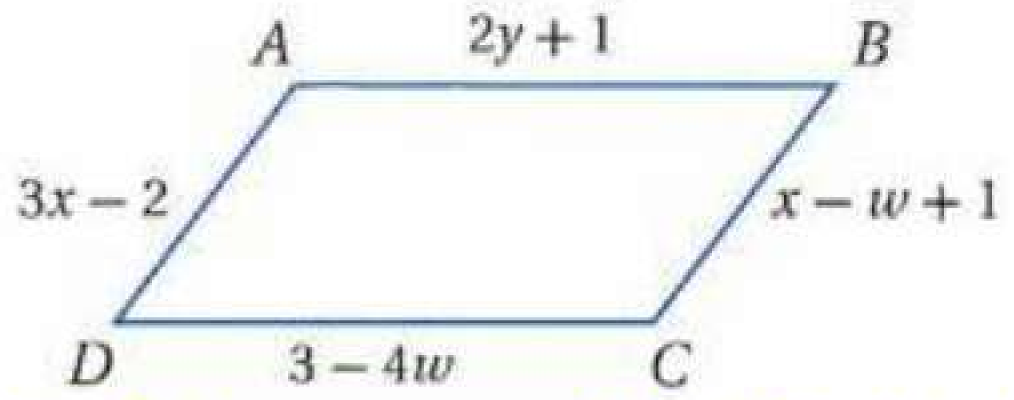
الشكل الرباعي	هل الأضلاع المتقابلة متطابقة؟	هل الزوايا المتقابلة متطابقة؟	هل الشكل متوازي أضلاع؟
ABCD	نعم	نعم	نعم
MNOP	نعم	نعم	نعم
WXYZ	نعم	نعم	نعم

c) لفظيًّا: ضع تخمينًا حول الأشكال الرباعيّة التي لها ضلعان متطابقان ومتوازيان.

إذا كان في الشكل الرباعي ضلعان متوازيان ومتطابقان فإن هذا الشكل متوازي أضلاع.

مسائل مهارات التفكير العليا:

32) **تحدٍّ:** إذا كان محيط $\square ABCD$ في الشكل أدناه يساوي 22 in ، فأوجد AB .



الأضلاع المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقان

$$AB = CD, \text{ and } AD = BC$$
$$2y + 1 = 3 - 4w, \text{ and } 3x - 2 = x - w + 1$$
$$3x - 2 = x - w + 1$$
$$2x = 3 - w$$
$$x = \frac{3 - w}{2}$$

المحيط = مجموع أطوال الأضلاع

$$2y + 1 + x - w + 1 + 3 - 4w + 3x - 2 = 22$$

حيث ان كل ضلعين متقابلين متساويين

$$2y + 1 = 3 - 4w, \text{ and } 3x - 2 = x - w + 1$$

$2(3 - 4w + 3x - 2) = 22$ أي ان

$$3x - 4w + 10$$

بالتعويض عن قيمة x

$$3\left(\frac{3 - w}{2}\right) - 4w = 10$$
$$9 - 3w - 8w = 20$$
$$-11w = 11$$
$$w = -1$$

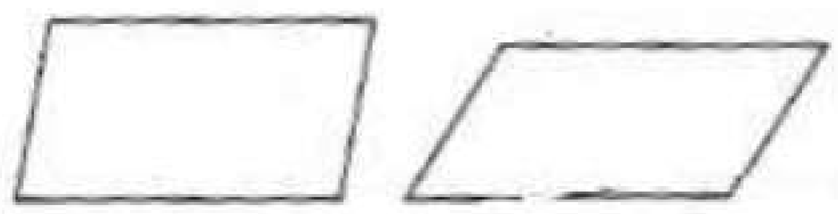
بالتعويض بقيمة w في اطوال الاضلاع

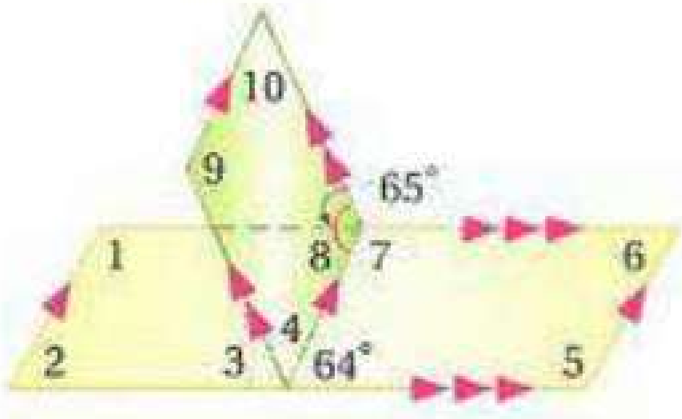
$$DC = 3 - 4(-1) = 7$$
$$AB = DC = 7\text{in}$$

33) اكتب: هل توجد نظرية $SSSS$ في تطابق متوازيات الأضلاع. برّر إجابتك.

لا توجد لأن كل ضلعين متقابلين متطابقين وليس جميع الأضلاع متطابقة

34) إجابة مفتوحة: أعط مثالًا مضادًّا يبيّن أن متوازيات الأضلاع ذات الأضلاع المتناظرة المتطابقة ليست متطابقة دائمًا.





35) تبرير: أوجد $m\angle 10$ ، $m\angle 1$ في الشكل المجاور. وضّح تبريرك.

بما أن الشكل متوازي أضلاع إذن:

$\angle 10$ مكملة للزاوية التي قياسها 65° لأن الزوايا المتحالفة في متوازي الأضلاع متكاملة.

$$\angle 10 + 65^\circ = 180^\circ$$

$$\angle 10 = 180^\circ - 65^\circ$$

$$\angle 10 = 115^\circ$$

$\angle 2 = 64^\circ$ **متساويتان بالتناظر**

$\angle 2$ مكملة للزاوية $\angle 1$ لأن الزوايا المتحالفة في متوازي الأضلاع متكاملة.

$$\angle 1 + 64^\circ = 180^\circ$$

$$\angle 1 = 180^\circ - 64^\circ$$

$$\angle 1 = 116^\circ$$

36) اكتب: لخّص خصائص أضلاع متوازي الأضلاع وزواياه وأقطاره.

في متوازي الأضلاع تكون الأضلاع المتقابلة متطابقة، والزوايا المتقابلة متطابقة، وتكون كل زاويتين متحالفتين متكاملتين.

وإذا كانت إحدى الزوايا قائمة تكون جميع زواياه قوائم. وقطرا متوازي الأضلاع ينصف كل منهما الآخر.

تدريب على الاختبار المعياري:

37) قياسا زاويتين متحالفتين في متوازي أضلاع هما: $9x-18$, $3x+42$. ما قياس الزاويتين؟

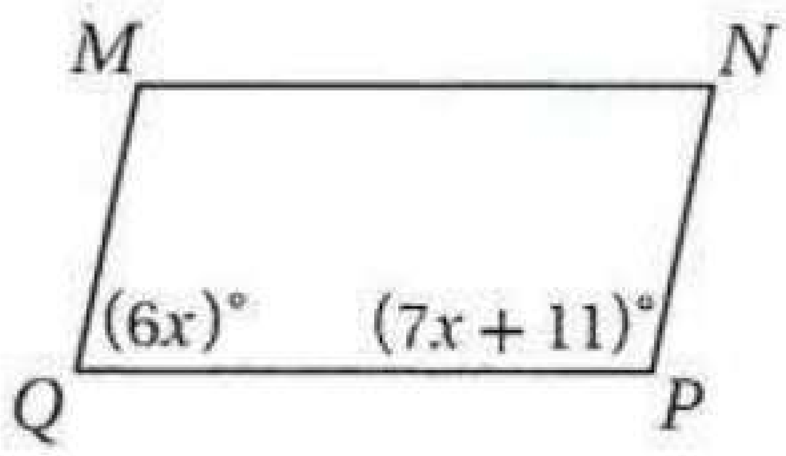
A $13, 167$ **B** $58.5, 31.5$

C $39, 141$ **D** $81, 99$

الاختيار D

$$3x+42+9x-18=180$$
$$12x+24=180$$
$$12x=180-24$$
$$12x=156$$
$$x=13$$
$$\angle 3x+42=3\times 13+42=81^{\circ}$$
$$\angle 9x-18=9\times 13-18=99^{\circ}$$

38) إجابة شبكية: إذا كان $MNPQ$ متوازي أضلاع، فما قيمة x؟



$$6x+7x+11=180$$
$$13x=180-11$$
$$13x=169$$
$$x=13$$

مراجعة تراكمية

أوجد عدد أضلاع المضلع المنتظم المعطى قياس إحدى زواياه الداخلية في كل مما يأتي :

(الدرس 1-1)

39) 108°

$108n = (n-2).180$ (كتابة معادلة)

$108n = 180n - 360$ (خاصية التوزيع)

$-72n = -360$ (بطرح 180n من كلا الطرفين)

$n = 5$ (بقسمة كلا الطرفين على −72)

إذن للمضلع 5 أضلاع

40) 140°

$140n = (n-2).180$ (كتابة معادلة)

$140n = 180n - 360$ (خاصية التوزيع)

$-40n = -360$ (بطرح 180n من كلا الطرفين)

$n = 9$ (بقسمة كلا الطرفين على −40)

إذن للمضلع 9 أضلاع

41) 147.3°

$147.3n = (n-2).180$ (كتابة معادلة)

$147.3n = 180n - 360$ (خاصية التوزيع)

$-32.7n = -360$ (بطرح 180n من كلا الطرفين)

$n = 11$ (بقسمة كلا الطرفين على −32.7)

إذن للمضلع 11 ضلع

42) 160°

$160n = (n-2).180$ (كتابة معادلة)

$160n = 180n - 360$ (خاصية التوزيع)

$-20n = -360$ (بطرح 180n من كلا الطرفين)

$n = 18$ (بقسمة كلا الطرفين على −20)

إذن للمضلع 18 ضلع

43) 135°

$135n = (n-2).180$ (كتابة معادلة)

$135n = 180n - 360$ (خاصية التوزيع)

$-45n = -360$ (بطرح 180n من كلا الطرفين)

$n = 8$ (بقسمة كلا الطرفين على 45−)

إذن للمضلع 8 أضلاع

44) 176.4°

$176.4n = (n-2).180$ (كتابة معادلة)

$176.4n = 180n - 360$ (خاصية التوزيع)

$-3.6n = -360$ (بطرح 180n من كلا الطرفين)

$n = 100$ (بقسمة كلا الطرفين على 3.6−)

إذن للمضلع 100 ضلع

حدد ما إذا كان المستقيمان متوازيين أو متعامدين، أو غير ذلك في كل مما يأتي: (الدرس 5-2)

45) $y = -x + 6$

$x + y = 20$

$y = -x + 6$

$y = 20 - x$

معامل x في كل معادلة متساويين إذن المستقيمان متوازيين

46) $y - 7x = 6$

$7y + x = 8$

$y = 6 + 7x$

$y = \frac{8}{7} - \frac{x}{7}$

حاصل ضرب معامل x في كل معادلة = 1− إذن المستقيمان متعامدين

47) $3x + 4y = 12$

$6x + 2y = 6$

$4y = 12 - 3x \rightarrow y = 3 - \frac{3}{4}x$

$2y = 6 - 6x \rightarrow y = 3 - 3x$

معامل x في كل من المعادلتين غير متساويين إذا هما غير ذلك

48) $2x + 5y = -1$

$10y = -4x - 20$

$$5y = -1 - 2x$$

$$\frac{10y}{2} = \frac{-4x}{2} - \frac{20}{2} \rightarrow 5y = -2x - 10$$

معامل x في كل معادلة متساويين إذن المستقيمان متوازيين

49) **زراعة:** عند زراعة الأشجار، تسند الشجرة بدعامة (على شكل عصا) ترتكز على الأرض وتربط في جذع الشجرة لتثبيتها. استعمل متباينة SAS لتفسير سبب فعالية هذه الطريقة في تثبيت الأشجار المزروعة رأسيًّا. (الدرس 6-4)

حسب نظرية المتباينة SAS، إذا بدأت الشجرة تميل، فإن إحدى زوايا المثلث المتكون من الشجرة وسطح الأرض والدعامة سوف تتغير، والضلع المقابل لتلك الزاوية سوف يتغير.
ولأن الدعامة ترتكز على الأرض ومثبتة في الشجرة فإنه لن يتغير طول أي ضلع من أضلاع المثلث. لذلك لا يمكن أن تتغير أي زاوية. وهذا يؤكد أن الشجرة ستبقى مستقيمة.

استعد للدرس اللاحق

رؤوس شكل رباعي هي $W(3, -1), X(4, 2), Y(-2, 3), Z(-3, 0)$. حدّد ما إذا كانت كل قطعة مستقيمة مما يأتي تمثل ضلعًا أو قطرًا في الشكل الرباعي، وأوجد ميل كل منها.

50) $\overline{YZ}$

ضلع؛ الميل $= \frac{3-0}{-2+3} = 3$

51) $\overline{YW}$

قطر؛ الميل $= \frac{3+1}{-2-3} = \frac{4}{-5}$

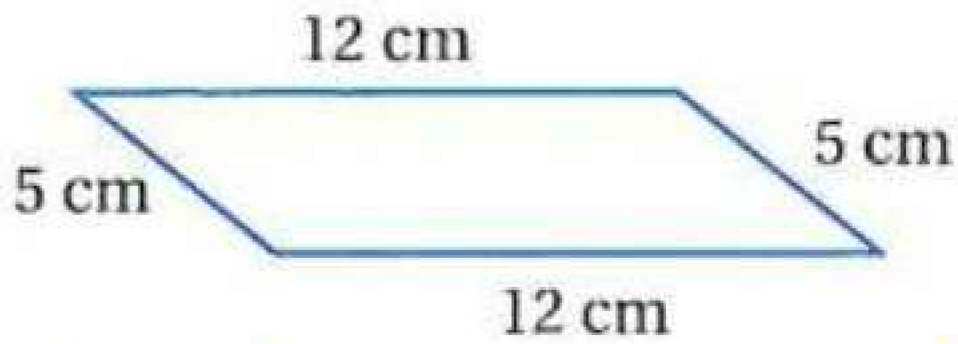
52) $\overline{ZW}$

ضلع؛ الميل: $\frac{0+1}{-3-3} = \frac{-1}{6}$

5-3 تمييز متوازي الأضلاع

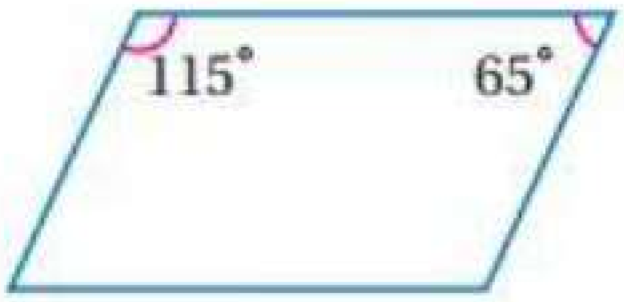
تحقق

(1A



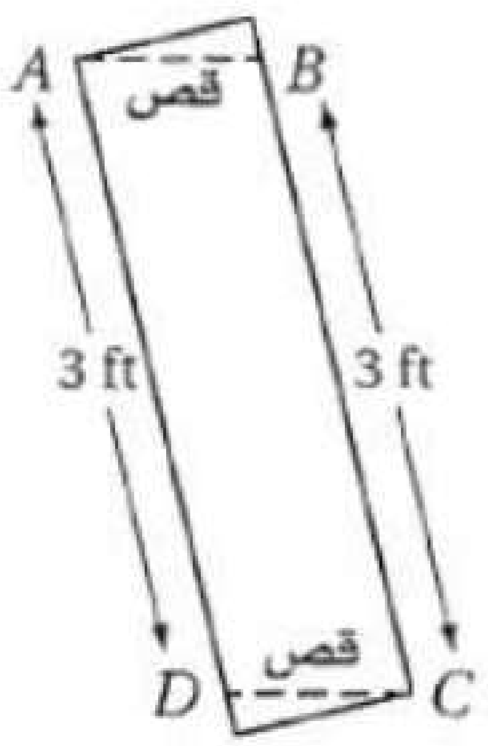
نعم؛ لأن كل ضلعين متقابلين فيه متطابقان.

(1B



لا؛ لأنه لا يحقق أي واحد من اختبارات متوازي الأضلاع.

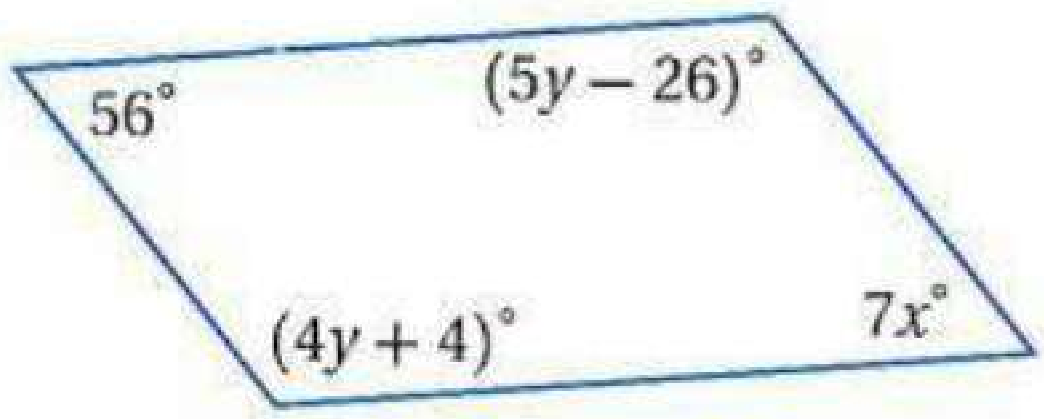
2) **لوحات:** عُد إلى فقرة "لماذا؟" بداية الدرس، وضّح لماذا يكون خطي القص أعلى وأسفل كل شريط متوازيين.



بما أن كل ضلعين متقابلين في الشكل الرباعي ABCD متطابقان فإن ABCD متوازي أضلاع إذن AB ∥ DC

أوجد قيمتي x, y في كل مما يأتي بحيث يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

(3A



كل زاويتين متقابلتين متطابقتين

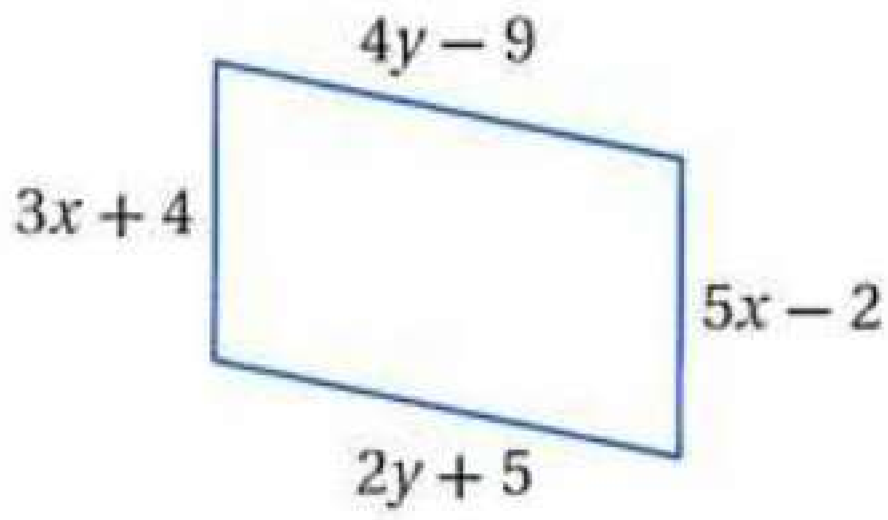
$7x = 56$

$x = 8$

$5y - 26 = 4y + 4$

$y = 4 + 26 = 30$

(3B



كل ضلعين متقابلين متطابقين

$4y - 9 = 2y + 5$

$4y - 2y = 5 + 9$

$2y = 14$

$y = 7$

$3x + 4 = 5x - 2$

$3x - 5x = -2 - 4$

$-2x = -6$

$x = 3$

حدّد ما إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع أم لا في كل مما يأتي. برّر إجابتك باستعمال الطريقة المحددة في السؤال :

4A) $A(3,3), B(8,2), C(6,-1), D(1,0)$ ، صيغة المسافة

$$A,B = (3,3),(8,2)$$

$$AB = \sqrt{(3-2)^2+(3-8)^2}$$

$$AB = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}$$

$$C,D = (6,-1),(1,0)$$

$$CD = \sqrt{(-1-0)^2+(6-1)^2}$$

$$CD = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}$$

$$B,C = (8,2),(6,-1)$$

$$BC = \sqrt{(2+1)^2+(8-6)^2}$$

$$BC = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

$$A,D = (3,3),(1,0)$$

$$AD = \sqrt{(3-0)^2+(3-1)^2}$$

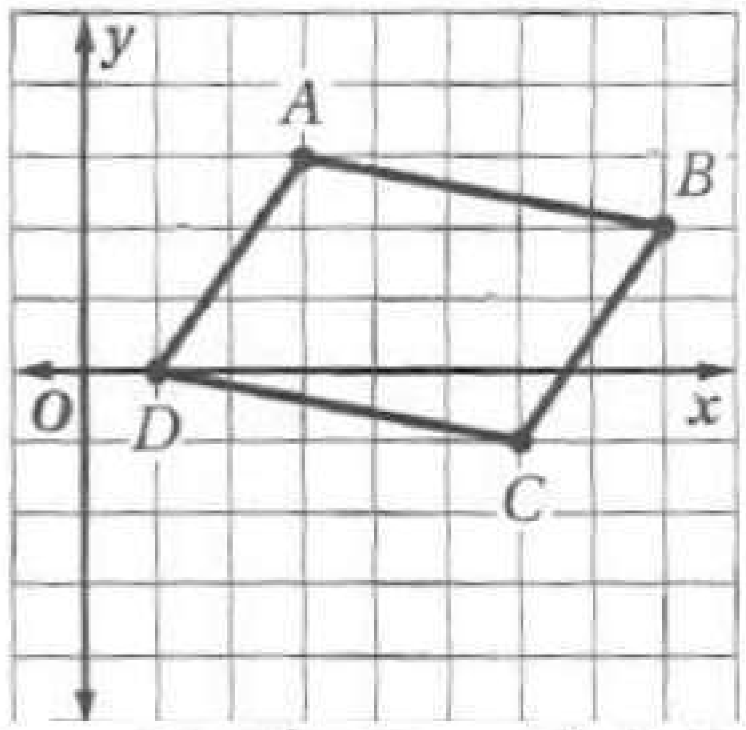
$$AD = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

إذا كانت الأضلاع المتقابلة لشكل رباعي متطابقة فإنه متوازي أضلاع.

$AB = \sqrt{26}$ ؛ $DC = \sqrt{26}$ ؛ $BC = \sqrt{13}$ ؛ $AD = \sqrt{13}$.

حيث أن المسافة بين أي نقطتين = $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

بما أن $AB = DC$ و$AD = BC$ فإن $AB = DC$ و$AD = BC$ لذلك فالشكل الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع حسب النظرية 5.9.



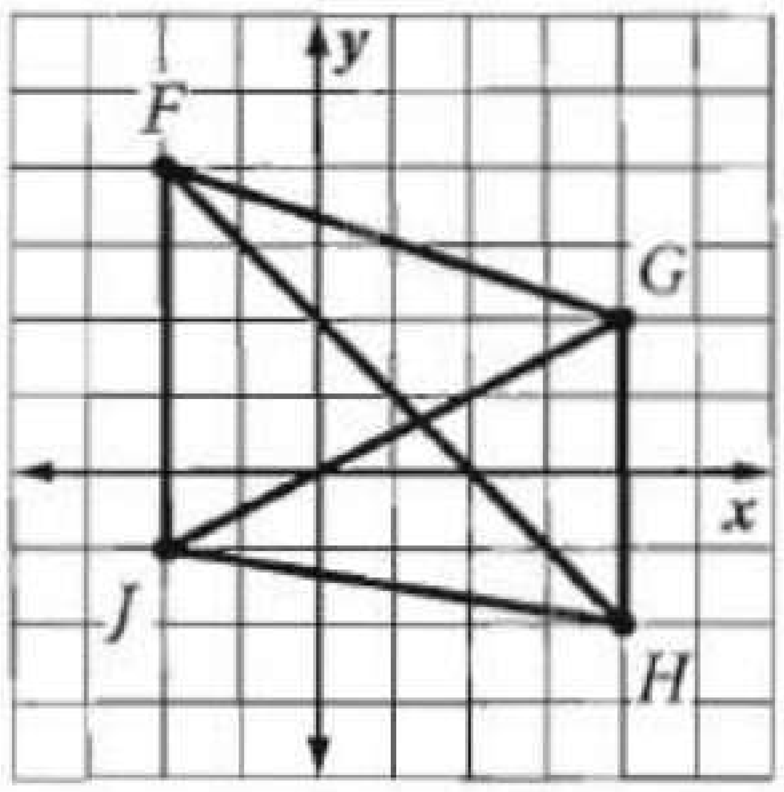
4B) $F(-2, 4), G(4, 2), H(4, -2), J(-2, -1)$ ، صيغة نقطة المنتصف

إذا كان قطرا شكل رباعي ينصف كل منهما الآخر، فإنه متوازي أضلاع، وينصف قطرا شكل رباعي كل منهما الآخر إذا كانت نقطتا منتصفيهما متطابقتين.

نقطة منتصف القطر $\overline{FH}$ هي $(1, 1)$. ونقطة منتصف القطر $\overline{GJ}$ هي $(1,0.5)$.

حيث أن نقطة المنتصف = $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

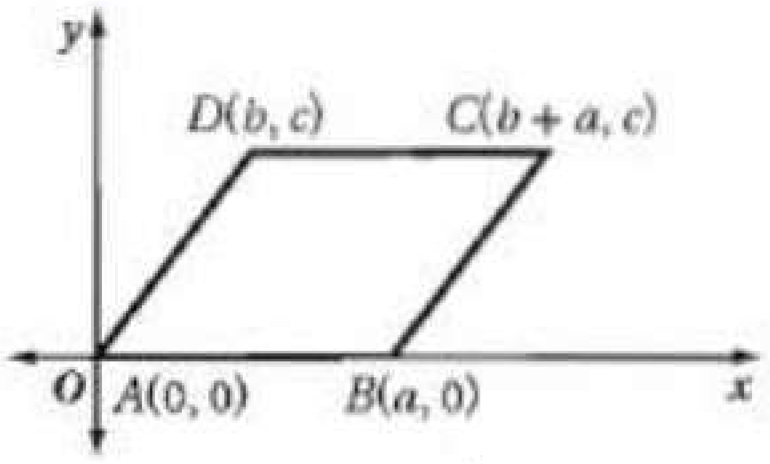
وبما أن نقطتي منتصفي القطرين $\overline{FH}$ و $\overline{GJ}$ ليس لهما الإحداثيات نفسها، فإن الشكل الرباعي FGHJ ليس متوازي أضلاع.



5) اكتب برهانًا إحداثيًا للعبارة الآتية: إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع فإنّ أضلاعه المتقابلة متطابقة.

المعطيات: ABCD متوازي أضلاع.

المطلوب: $AB = CD, AD = BC$



برهان إحداثي:

$$AB = \sqrt{((a-0)^2 + (0-0)^2)} = a$$

$$DC = \sqrt{((b+a-b)^2 + (c-c)^2)} = a$$

$$AD = \sqrt{((c-0)^2 + (b-0)^2)} = \sqrt{(c^2 + b^2)}$$

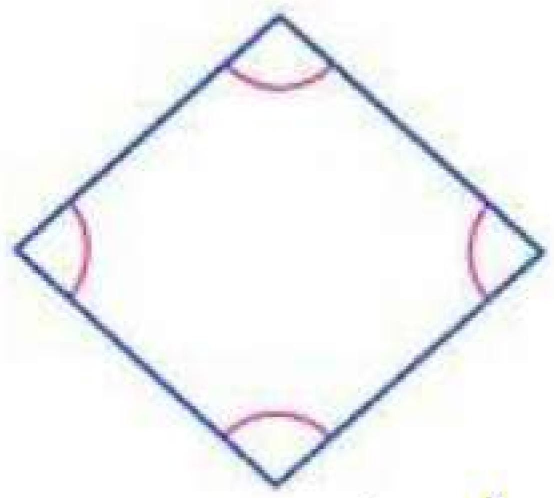
$$BC = \sqrt{((a-(b+a))^2 + (c-0)^2} = \sqrt{(c^2 + b^2)}$$

بما أن $AB = DC$ و $AD = BC$، فإن $AB = DC$ و $AD = BC$.

تأكد:

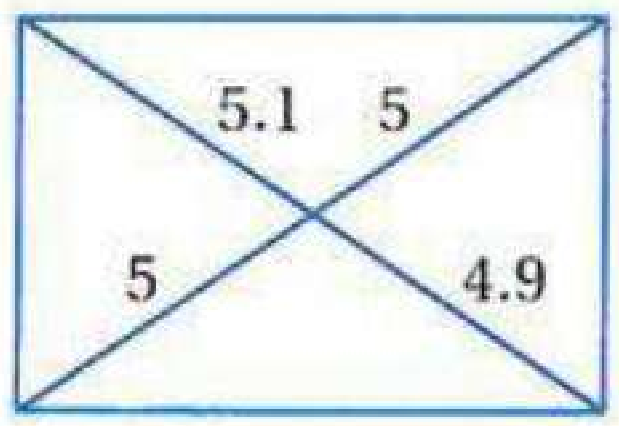
المثال 1 حدّد ما إذا كان شكل رباعي فيما يأتي متوازي أضلاع أم لا. برّر إجابتك.

(1



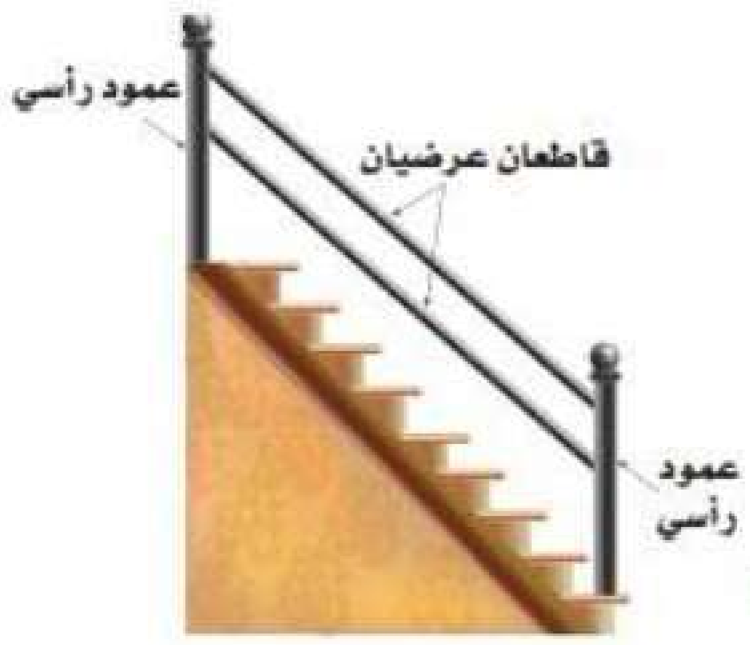
نعم؛ لأن كل زاويتين متقابلتين متطابقتان.

(2



لا؛ لأنه لا يحقق أي شرط من شروط متوازي الأضلاع.

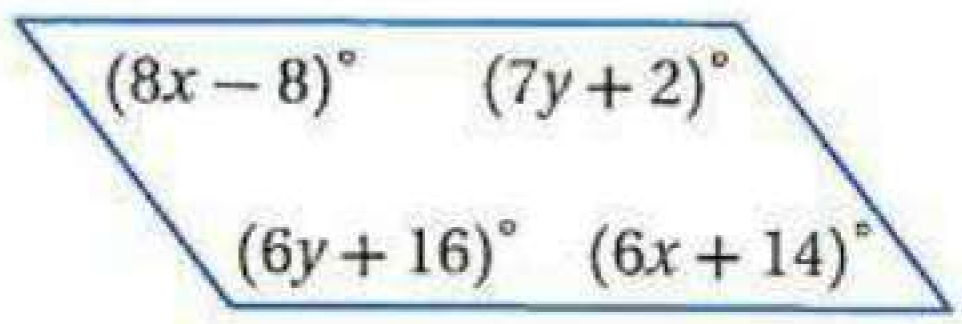
3) **نجارة:** صنع نجار دربزينًا لدَرَج يتكوّن من عمودين رأسيين؛ الأول مثبت فوق الدرجة الأولى، والثاني مثبت فوق الدرجة الأخيرة، ويصل بينهما قاطعان خشبيان كما في الشكل المجاور. كيف يمكن للنجار التحقق من أن القاطعين الخشبيين العرضيين متوازيان، وذلك بأقل عدد من مرات القياس، إذا علمت بأن الدرجتين الأولى والأخيرة مستويتان مع الأرض.



إذا كان القاطعان الخشبيان متطابقان فإن الشكل متوازي أضلاع وبالتالي يكون القاطعان الخشبيين متوازيان.

جبر: أوجد قيمتي x, y في كل مما يأتي بحيث يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

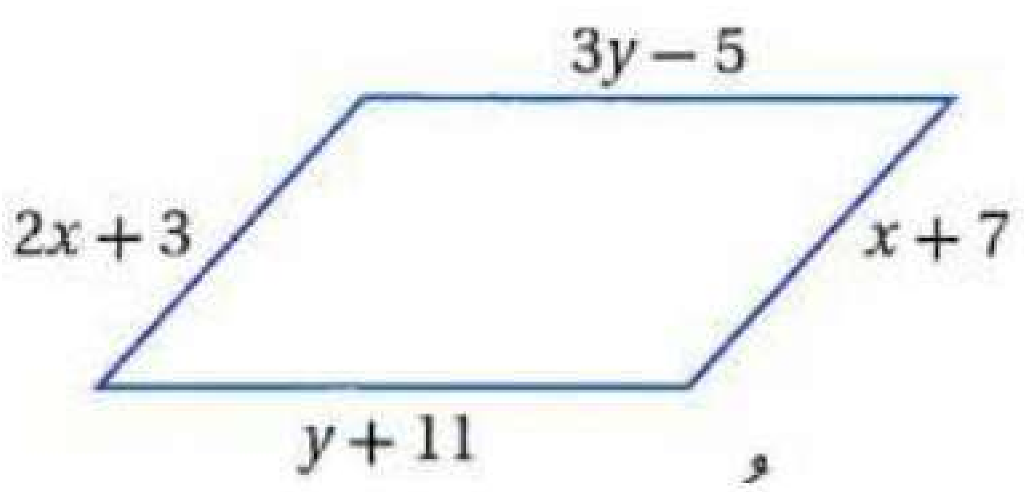
(4



$$8x - 8 = 6x + 14$$
$$8x - 6x = 14 + 8$$
$$2x = 22$$

$$x = 11$$
$$7y + 2 = 6y + 16$$
$$7y - 6y = 16 - 2$$
$$y = 14$$

(5



$$x + 7 = 2x + 3$$
$$2x - x = 7 - 3$$
$$x = 4$$

$$3y - 5 = y + 11$$
$$3y - y = 11 + 5$$
$$2y = 16$$
$$y = 8$$

هندسة إحداثيّة : مثل في المستوى الإحداثي الشكل الرباعي الذي أعطيت إحداثيات رؤوسه فيما يأتي. وحدّد ما إذا كان متوازي أضلاع أم لا، برّر إجابتك باستعمال صيغة الميل.

(6 $A(-2, 4), B(5, 4), C(8, -1), D(-1, -1)$ ، صيغة الميل.

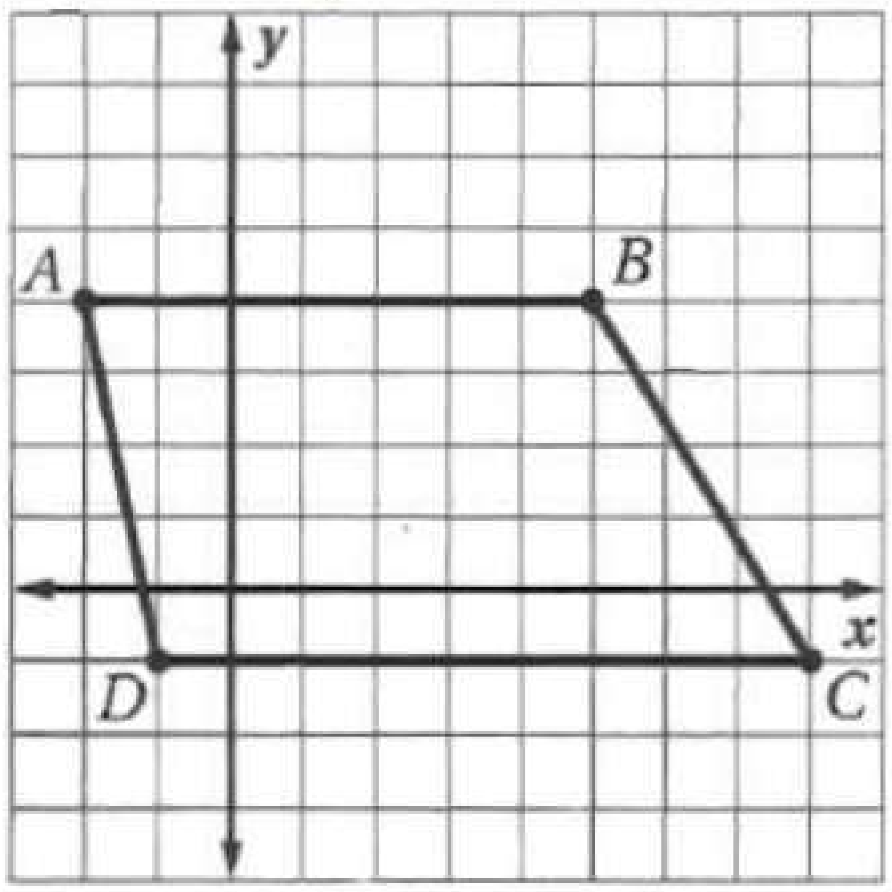
ميل $\overline{AB}$: $\dfrac{-2-5}{4-4} = \dfrac{-7}{0}$

ميل $\overline{BC}$: $\dfrac{5-8}{4+1} = \dfrac{3}{5}$

ميل $\overline{CD}$: $\frac{8+1}{0} = \frac{9}{5}$

ميل $\overline{AD}$: $\frac{-2+1}{4+1} = \frac{-1}{5}$

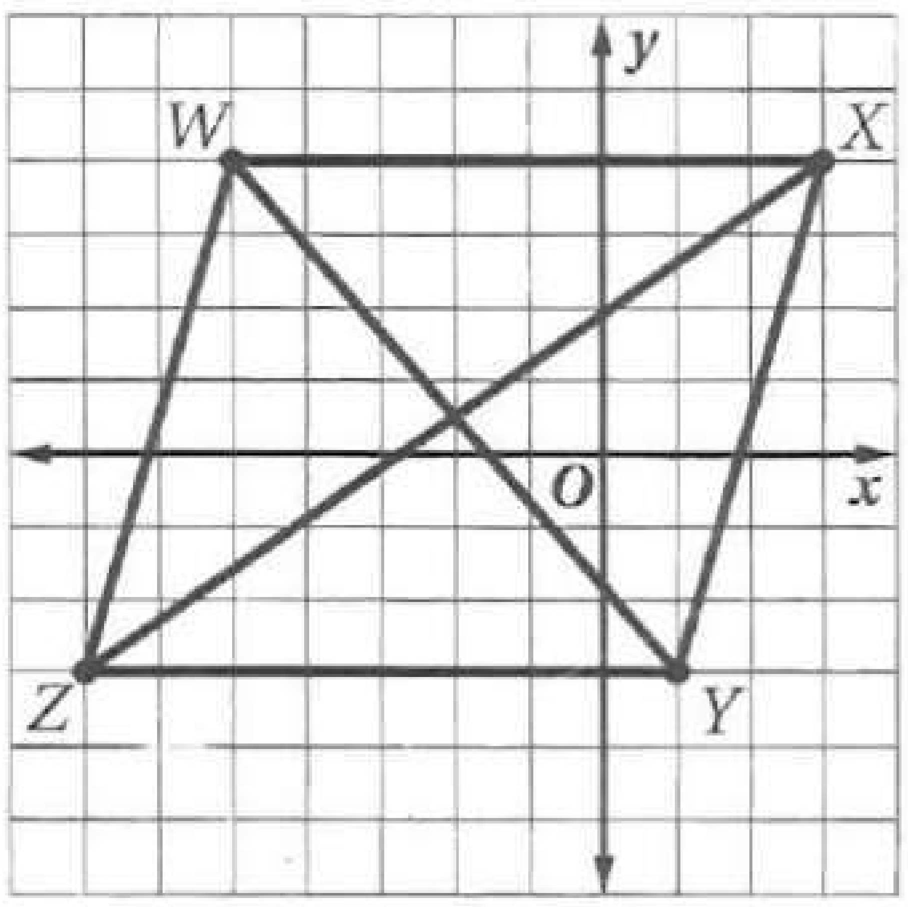
بما أن ميل $\overline{BC} \neq$ ميل $\overline{AD}$ ، فإن ABCD ليس متوازي أضلاع.



7) $W(-5, 4), X(3, 4), Y(1, -3), Z(-7, -3)$ ، صيغة نقطة المنتصف.

نعم؛ نقطة منتصف كل من $\overline{WY}$ و $\overline{XZ}$ هي $\left(-2, \frac{1}{2}\right)$

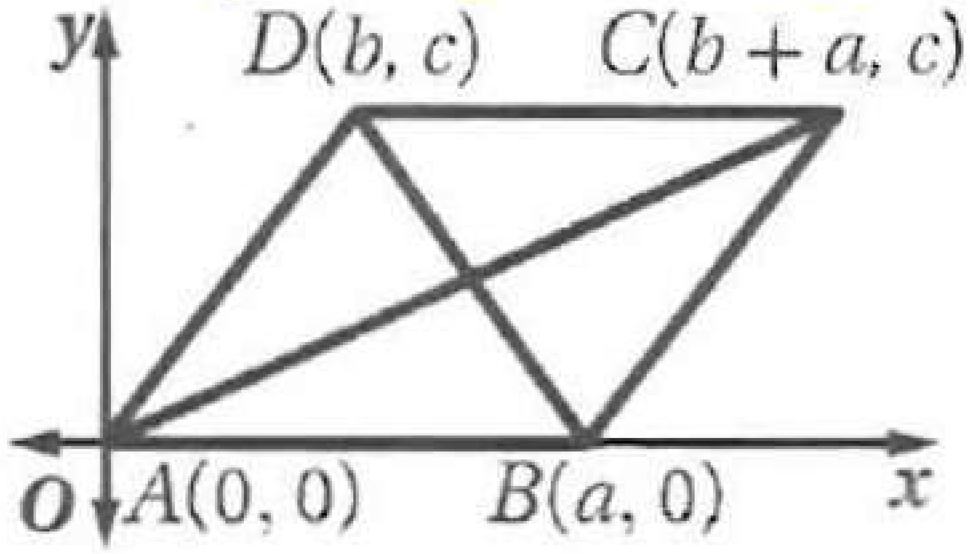
وبما أن القطرين ينصف كل منهما الآخر، فإن الشكل WXYZ متوازي أضلاع.



8) اكتب برهانًا إحداثيًا للعبارة الآتية: إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع، فإنّ قطريه ينصّف كل منهما الآخر.

المعطيات: ABCD متوازي أضلاع.

المطلوب: $\overline{AC}$ و $\overline{DB}$ ينصف كل منهما الآخر.



البرهان:

نقطة منتصف $\overline{AC}$

$$\left(\frac{a+b}{2},\frac{c}{2}\right)=\left(\frac{0+(a+b)}{2},\frac{0+c}{2}\right)$$

ونقطة منتصف $\overline{DB}$

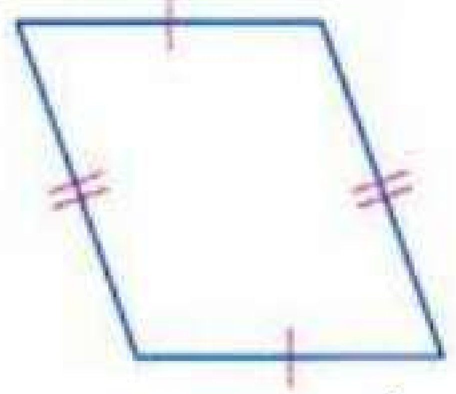
$$\left(\frac{a+b}{2},\frac{c}{2}\right)=\left(\frac{a+b}{2},\frac{0+c}{2}\right)$$

إذن، $\overline{AC}$ و $\overline{DB}$ ينصف كل منهما الآخر.

تدرب وحل المسائل:

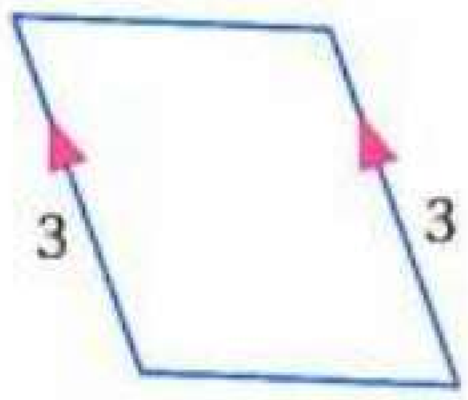
حدّد ما إذا كان كل شكل رباعي فيما يأتي متوازي أضلاع أم لا. برّر إجابتك.

(9



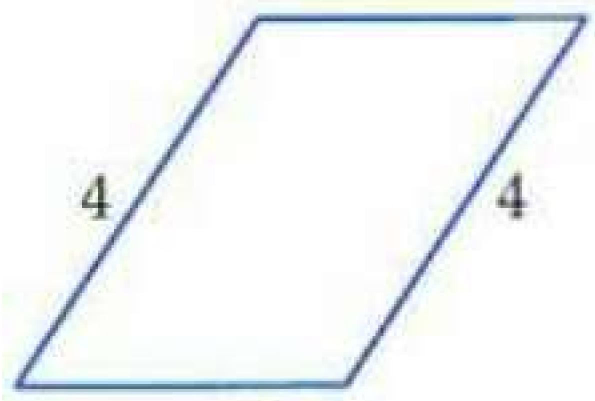
نعم؛ لأن كل ضلعين متقابلين متطابقان.

(10



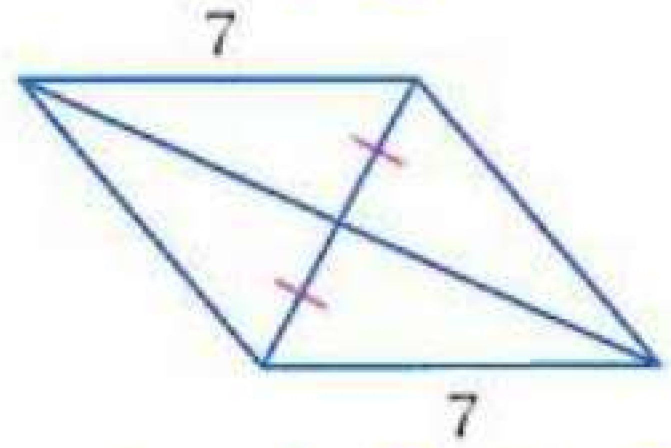
نعم؛ لأن فيه ضلعين متقابلين متوازيان ومتطابقان.

(11



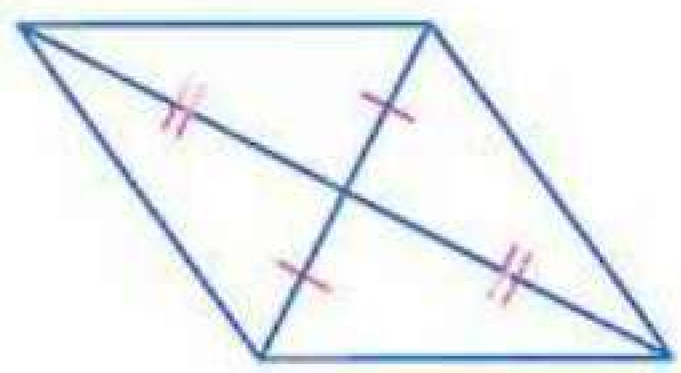
لا؛ لأنه لا يحقق أي واحد من اختبارات متوازي الأضلاع.

(12



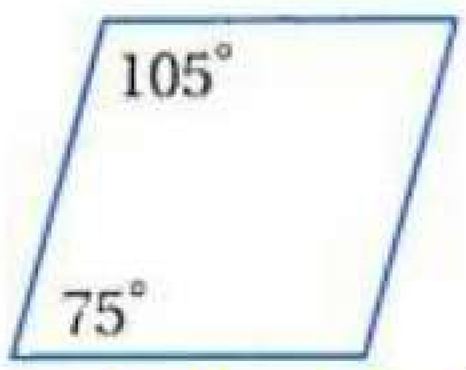
)لا؛ لأنه لا يحقق أي واحد من اختبارات متوازي الأضلاع.

(13

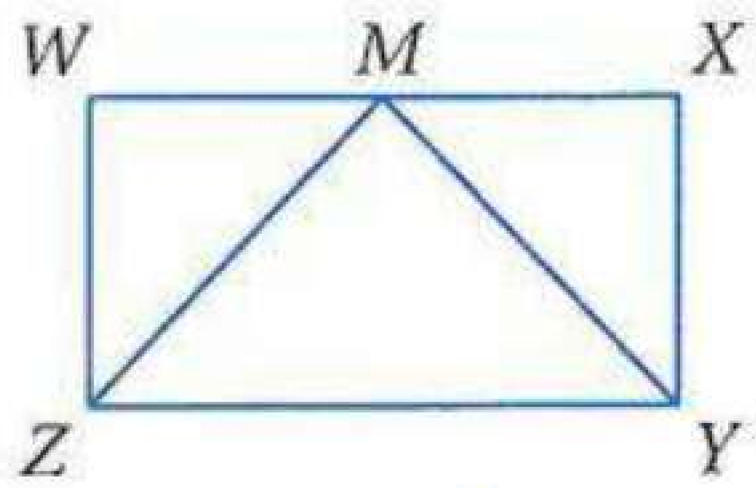


نعم؛ لأن قطرية ينصف كل منهما الآخر.

(14



لا؛ لأنه لا يحقق أي واحد من اختبارات متوازي الأضلاع.



15) **برهان:** إذا كان $WXYZ$ متوازي أضلاع، حيث $\angle W \cong \angle X$، M نقطة منتصف $\overline{WX}$، فاكتب برهانًا حرًّا لإثبات أن $\triangle ZMY$ متطابق الضلعين.

المعطيات: WXYZ متوازي أضلاع فيه $\angle W \cong \angle X$ وM نقطة منتصف $\overline{WX}$.

المطلوب: ΔZMY متطابق الضلعين.

البرهان: بما أن WXYZ متوازي أضلاع، فإن $\overline{XY} \cong \overline{WZ}$.

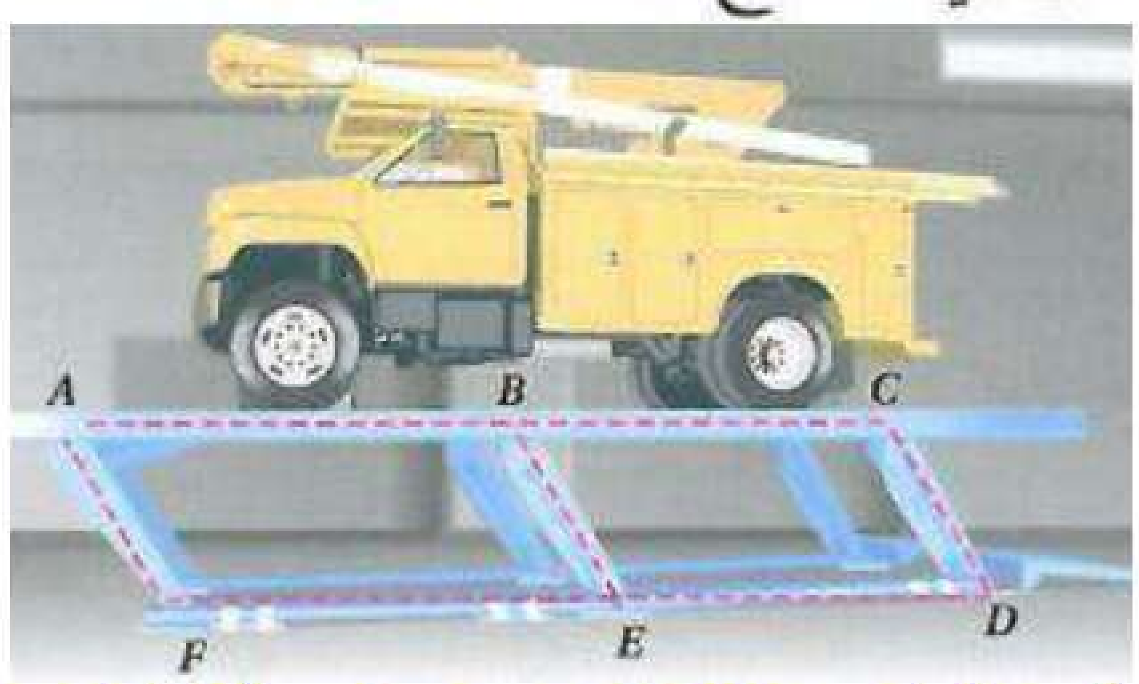
وبما أن M نقطة منتصف $\overline{WX}$، فإن $WM = MX$.

ومعطى أن $\angle X \cong \angle W$، لذلك وحسب SAS فإن $\Delta ZWM \cong \Delta YXM$

ولأن العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين متطابقة، فإن $\overline{YM} \cong \overline{ZM}$.

إذن ZMY مثلث متطابق الضلعين بحسب تعريف المثلث متطابق الضلعين.

16) **رافعات:** تستعمل رافعات متوازيات الأضلاع لرفع المركبات الثقيلة عند صيانتها. ففي الشكل أدناه: $ABEF, BCDE$ متوازيا أضلاع. اكتب برهانًا ذا عمودين لإثبات أن $ACDF$ متوازي أضلاع أيضًا.



المعطيات: ABEF متوازي أضلاع؛ BCDE متوازي أضلاع.

المطلوب: ACDF متوازي أضلاع.

البرهان: العبارات (المبررات):

1) ABEF متوازي أضلاع؛ BCDE متوازي أضلاع (معطيات)

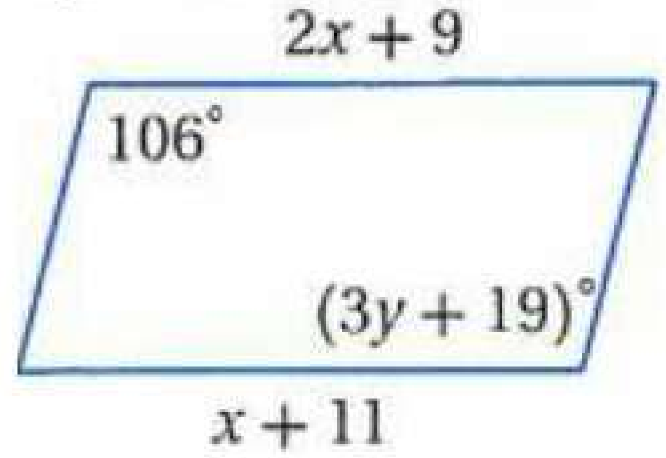
2) $\overline{BE}$ □ $\overline{CD}$, $\overline{AF}$ □ $\overline{BE}$, $BE = CD$, $AF = BE$ (تعريف متوازي الأضلاع)

3) $\overline{AF}$ □ $\overline{CD}$, $AF = CD$ (خاصية التعدي)

4) ACDF متوازي أضلاع. (إذا كان ضلعان في شكل رباعي متطابقين ومتوازيين فإنه متوازي أضلاع)

جبر: أوجد قيمتي x, y في كل مما يأتي بحيث يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

17)



$2x + 9 = x + 11$

$2x - x = 11 - 9$

$x = 2$

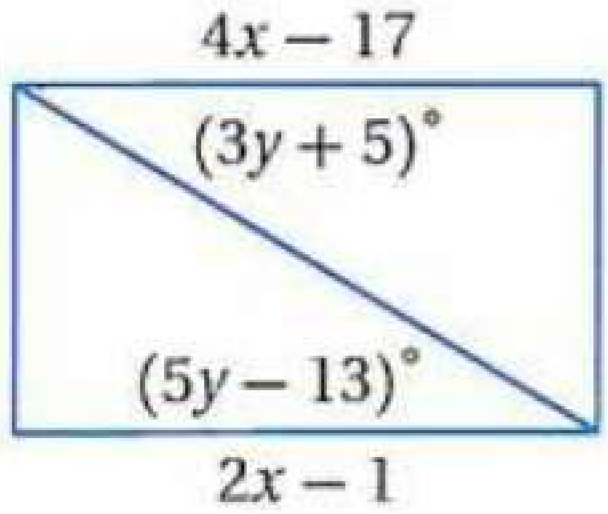
$106 = 3y + 19$

$3y = 106 - 19$

$3y = 87$

$y = 29$

18)



$4x - 17 = 2x - 1$

$4x - 2x = 17 - 1$

$2x = 16$

$x = 8$

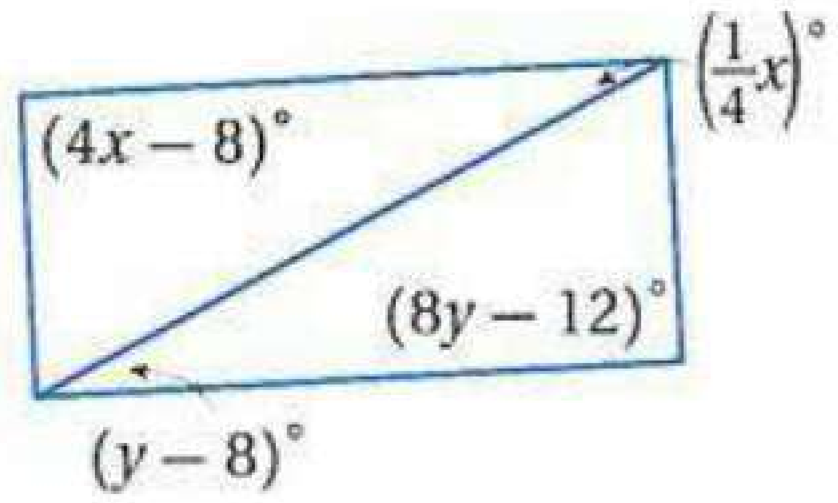
$3y + 5 = 5y - 13$

$3y - 5y = -13 - 5$

$$-2y = -18$$

$$y = 9$$

(19



$$4x - 8 = 8y - 12 \quad \div 4$$

$$x - 2 = 2y - 3$$

$$x = 2y - 3 + 2$$

$$x = 2y - 1$$

$$\frac{1}{4}x = y - 8$$

$$\frac{1}{4}(2y - 1) = y - 8$$

$$\frac{1}{2}y - \frac{1}{4} = y - 8 \quad \times 4$$

$$2y - 1 = 4y - 32$$

$$2y - 4y = -32 + 1$$

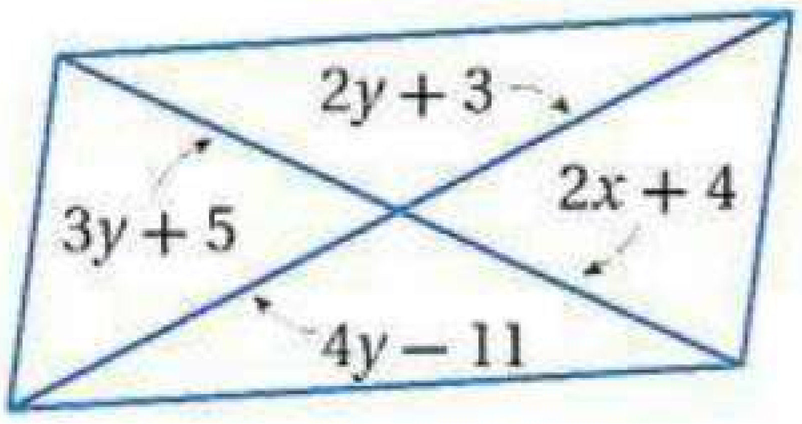
$$-2y = -31$$

$$y = 15.5$$

$$\because x = 2y - 1$$

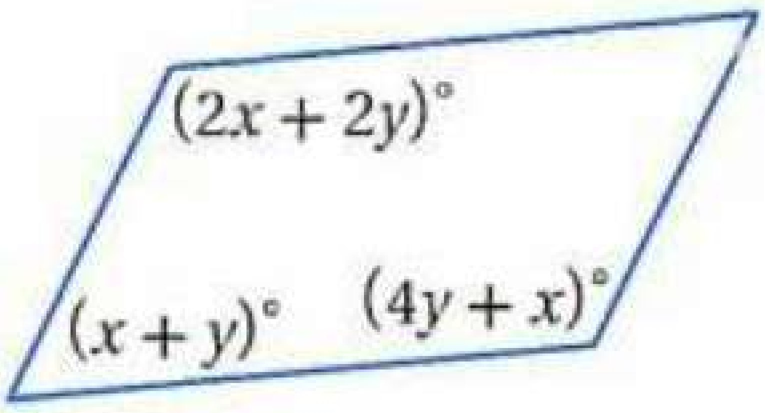
$$\therefore x = 2 \times 15.5 - 1 = 30$$

(20



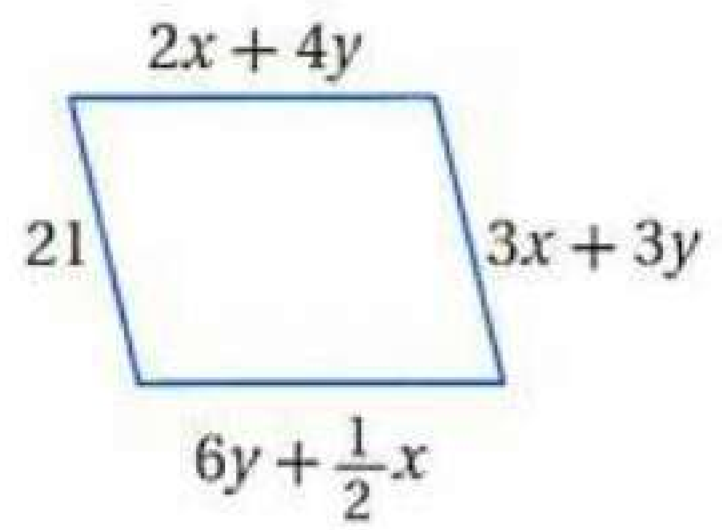
$$2y + 3 = 4y - 11$$
$$2y - 4y = -11 - 3$$
$$-2y = -14$$
$$y = 7$$
$$2x + 4 = 3y + 5$$
$$2x + 4 = 21 + 5$$
$$2x = 26 - 4$$
$$2x = 22$$
$$x = 11$$

(21



$$2x + 2y = 4y + x$$
$$x = 4y - 2y$$
$$x = 2y$$
$$(x + y) + (4y + x) = 180$$
$$(2y + y) + (4y + 2y) = 180$$
$$9y = 180$$
$$y = 20$$
$$x = 40$$

(22



$$3x+3y=21$$
$$x+y=7$$
$$x=7-y$$
$$2x+4y=6y+\frac{1}{2}x$$
$$2(7-y)+4y=6y+\frac{1}{2}(7-y)$$
$$14-2y+4y=6y+\frac{7}{2}-\frac{1}{2}y$$
$$14+2y=5.5y+\frac{7}{2}$$
$$2y-5.5y=\frac{7}{2}-14$$
$$-3.5y=-10.5$$
$$y=3$$
$$x=7-y=7-3=4$$

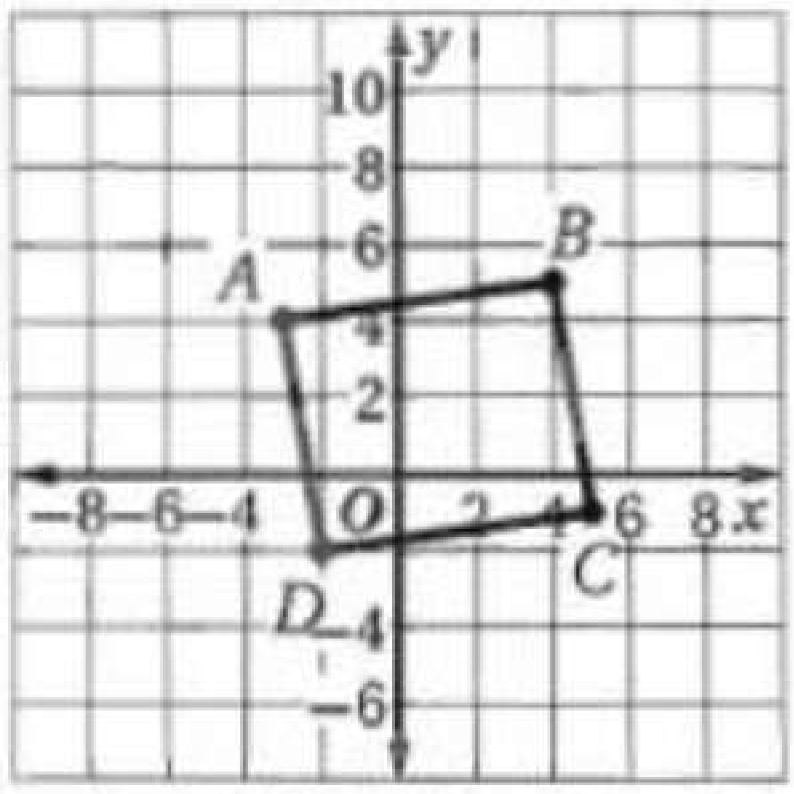
هندسة إحداثيّة: مثّل في المستوى الإحداثي الشكل الرباعي الذي أُعطيت إحداثيات رؤوسه فيما يأتي. وحدّد ما إذا كان متوازي أضلاع أم لا، برّر إجابتك باستعمال الطريقة المحدّدة في السؤال.

(23 $A(-3,4)$، $B(4,5)$، $C(5,-1)$، $D(-2,-2)$، صيغة الميل.

نعم؛ ميل $\overline{AB}$ يساوي ميل $\overline{CD}$ ويساوي $\frac{1}{7}$ لذلك $\overline{AB}$ □ $\overline{CD}$.

حيث أن الميل = $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

وبما أن ميل $\overline{BC}$ يساوي ميل $\overline{AD}$ ويساوي 6 –
فإن $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ولأن كل ضلعين متقابلين متوازيان فإن ABCD متوازي أضلاع.



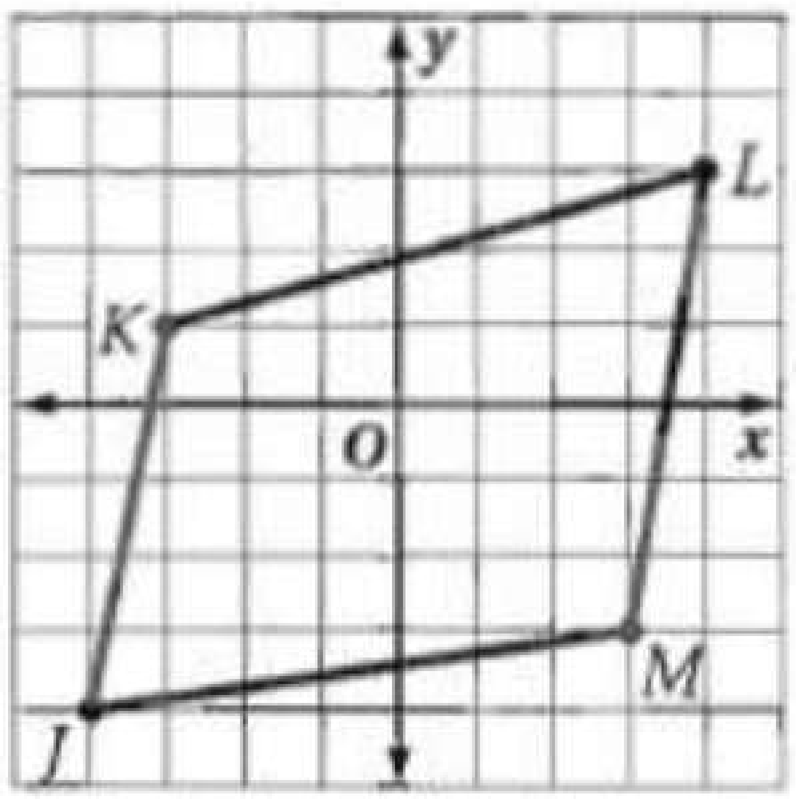
(24 $J(-4, -4)$، $K(-3, 1)$، $L(4, 3)$، $M(3, -3)$ ، صيغة المسافة بين نقطتين.

لا؛ يجب أن يكون كل ضلعين متقابلين متطابقين.
والمسافة بين K وL تساوي $\sqrt{53}$. والمسافة بين L وM تساوي $\sqrt{37}$.

والمسافة بين M وJ تساوي $\sqrt{50}$. والمسافة بين J وK تساوي $\sqrt{26}$.

حيث أن المسافة بين أي نقطتين = $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

وبما أن كل ضلعين متقابلين ليسا متطابقين، فإن JKLM ليس متوازي أضلاع.



25) $V(3, 5)$ ، $W(1, -2)$ ، $X(-6, 2)$ ، $Y(-4, 7)$ ، صيغتا الميل والمسافة بين نقطتين.

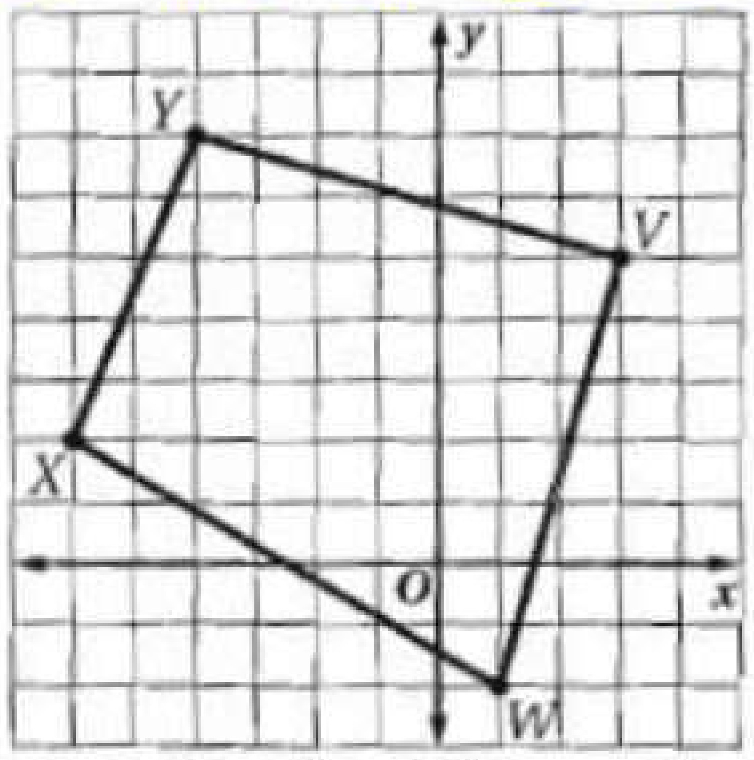
ميل $\overline{YX}$: $\frac{-4+6}{7-2} = \frac{2}{5}$

ميل $\overline{XW}$: $\frac{-6-1}{2+2} = \frac{-7}{4}$

ميل $\overline{WV}$: $\frac{1-3}{-2-5} = \frac{-2}{-7} = \frac{2}{7}$

ميل $\overline{YV}$: $\frac{-4-3}{7-5} = \frac{-7}{2}$

ميل $\overline{YV}$ يساوي $\frac{-7}{2}$ ، وميل $\overline{XW}$ يساوي $\frac{-7}{4}$ ، وميل $\overline{YX}$ يساوي $\frac{2}{5}$ ، وميل $\overline{VW}$ يساوي $\frac{2}{7}$. وبما أن ميل $\overline{YV}$ لا يساوي ميل $\overline{XW}$ ، وميل $\overline{YX}$ لا يساوي ميل $\overline{VW}$ فإن VWXY ليس متوازي أضلاع.



26) $Q(2, -4)$ ، $R(4, 3)$ ، $S(-3, 6)$ ، $T(-5, -1)$ ، صيغتا الميل والمسافة بين نقطتين.

ميل $\overline{TS}$: $\frac{-5+3}{-1-6} = \frac{-2}{-7} = \frac{2}{7}$

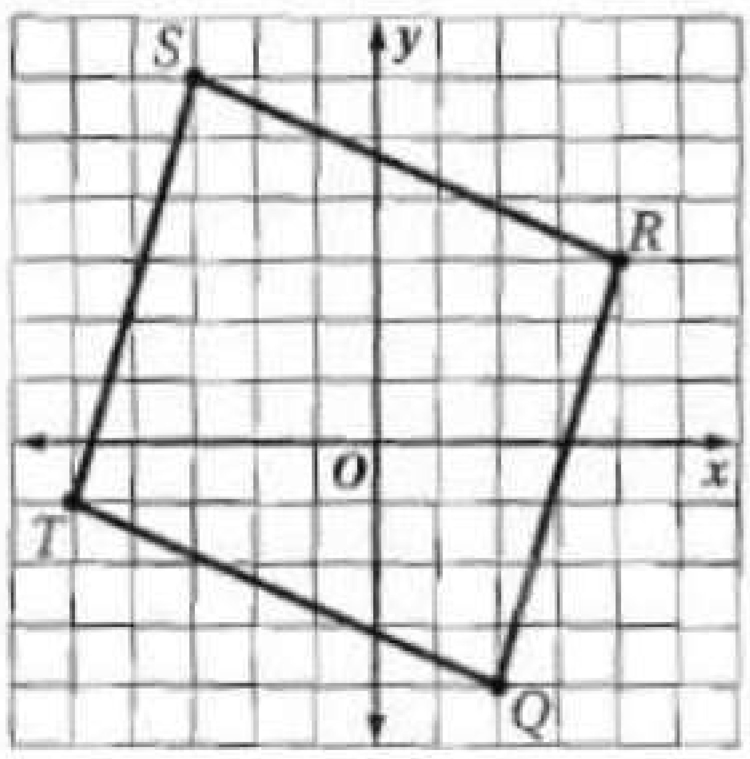
ميل $\overline{RQ}$: $\frac{4-2}{3+4} = \frac{2}{7}$

يجب أن يكون فيه ضلعان متقابلان متوازيين ومتطابقين. وبما أن ميل

$\overline{RQ}$ يساوي ميل $\overline{TS}$ ويساوي $\frac{2}{7}$ ، فإن $\overline{ST} \| \overline{TS}$ □ $\overline{QR}$ ولأن $QR = ST$

$=\sqrt{53}$

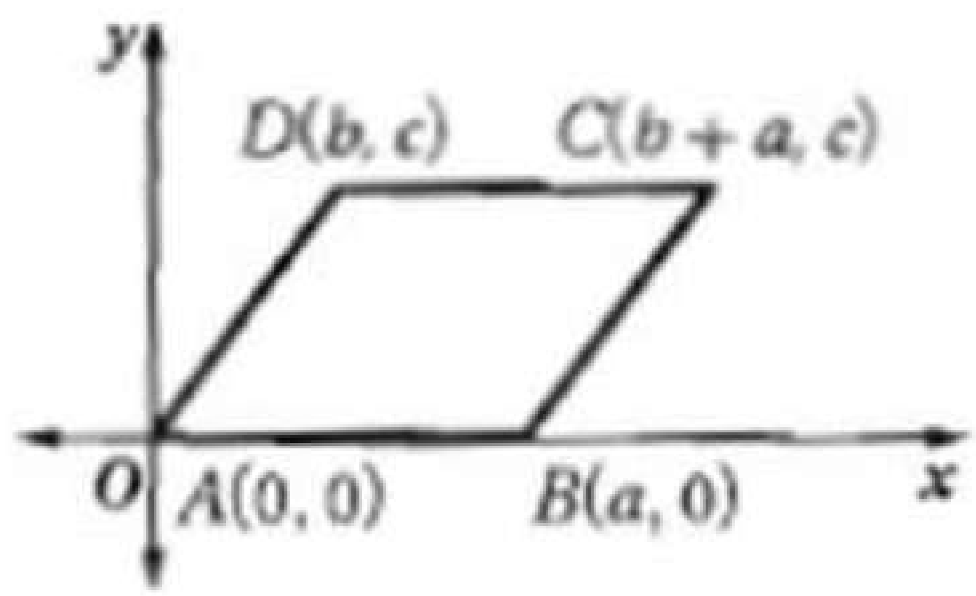
فإن $\overline{TS} \cong \overline{QR}$ إذن، QRST متوازي أضلاع.



27) اكتب برهانًا إحداثيًّا للعبارة: إذا كان كل ضلعين متقابلين في الشكل الرباعي متطابقين، فإنه متوازي أضلاع.

المعطيات: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $\overline{AD} \cong \overline{BC}$

المطلوب: متوازي أضلاع ABCD .



البرهان:

ميل $\overline{AD}$: $m = \frac{c-0}{b-0} = \frac{c}{b}$

ميل $\overline{AB}$: $m = \frac{0-0}{a-0} = 0$

ميل $\overline{BC}$: $m = \frac{c-0}{b+a-a} = \frac{c}{b}$

ميل $\overline{DC}$: $0 = m = \dfrac{c-c}{b+a-b}$

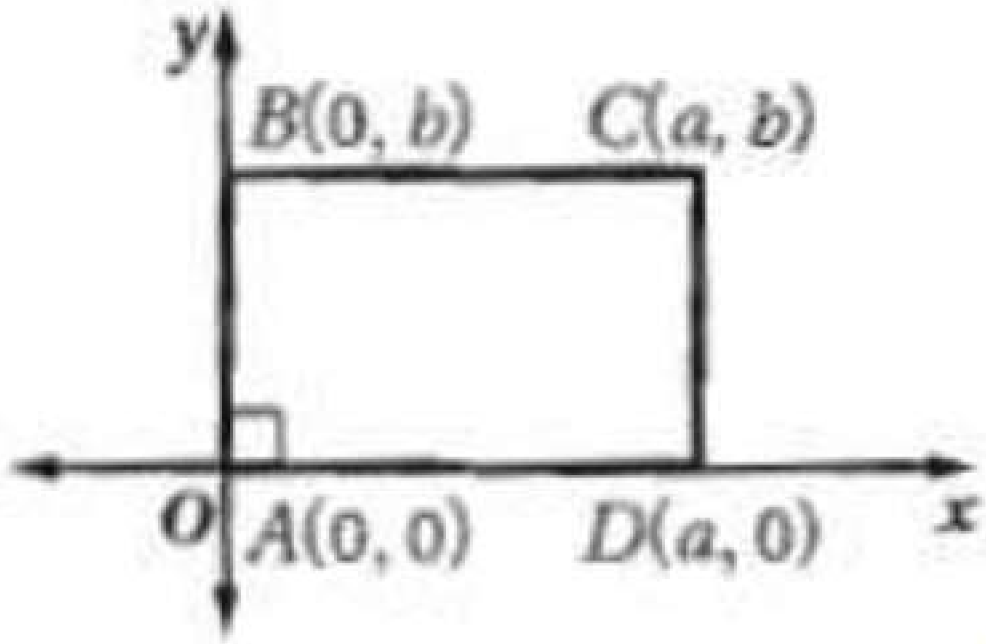
لذلك $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ و $\overline{CD} \parallel \overline{AB}$.

إذن وحسب تعريف متوازي الأضلاع يكون ABCD متوازي أضلاع.

28) اكتب برهانًا إحداثيًا للعبارة: إذا كانت إحدى زوايا متوازي الأضلاع قائمة، فإنّ جميع زواياه قوائم.

المعطيات: ABCD متوازي أضلاع، الزاوية A زاوية قائمة.

المطلوب: الزوايا B, C, D قوائم.



البرهان:

ميل $\overline{BC}$: $0 = \dfrac{b-b}{a-0} = m$، ميل $\overline{CD}$: غير معرف

ميل $\overline{AD}$: $0 = \dfrac{0-0}{a-0} = m$، ميل $\overline{AB}$: غير معرف

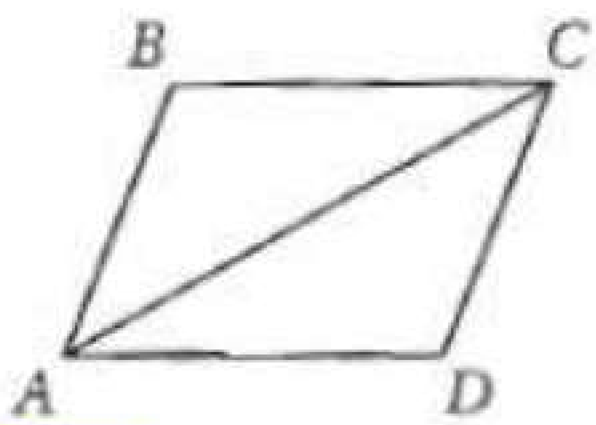
لذلك $\overline{BC} \perp \overline{AB}$, $\overline{AD} \perp \overline{CD}$, $\overline{CD} \perp \overline{BC}$.

إذن، الزوايا B, C, D قوائم.

29) **برهان:** اكتب برهانًا حرًّا للنظرية 1.10.

المعطيات: $\angle A \cong \angle C$, $\angle B \cong \angle D$

المطلوب: ABCD متوازي أضلاع.



البرهان: ارسم $\overline{AC}$ لتشكل مثلثين.

وبما أن مجموع قياسات زوايا أي مثلث يساوي 180° فإن مجموع قياسات زوايا المثلثين يساوي 360°.

إذن $m\angle A + m\angle B + m\angle C + m\angle D = 360^\circ$

وبما أن $\angle C \cong \angle A$ و $\angle D \cong \angle B$ فإن $m\angle A = m\angle C$

و$m\angle B = m\angle D$.

وبالتعويض $m\angle A + m\angle A + m\angle B + m\angle B = 360^\circ$

إذن $2\,(m\angle A) + 2\,(m\angle B) = 360^\circ$

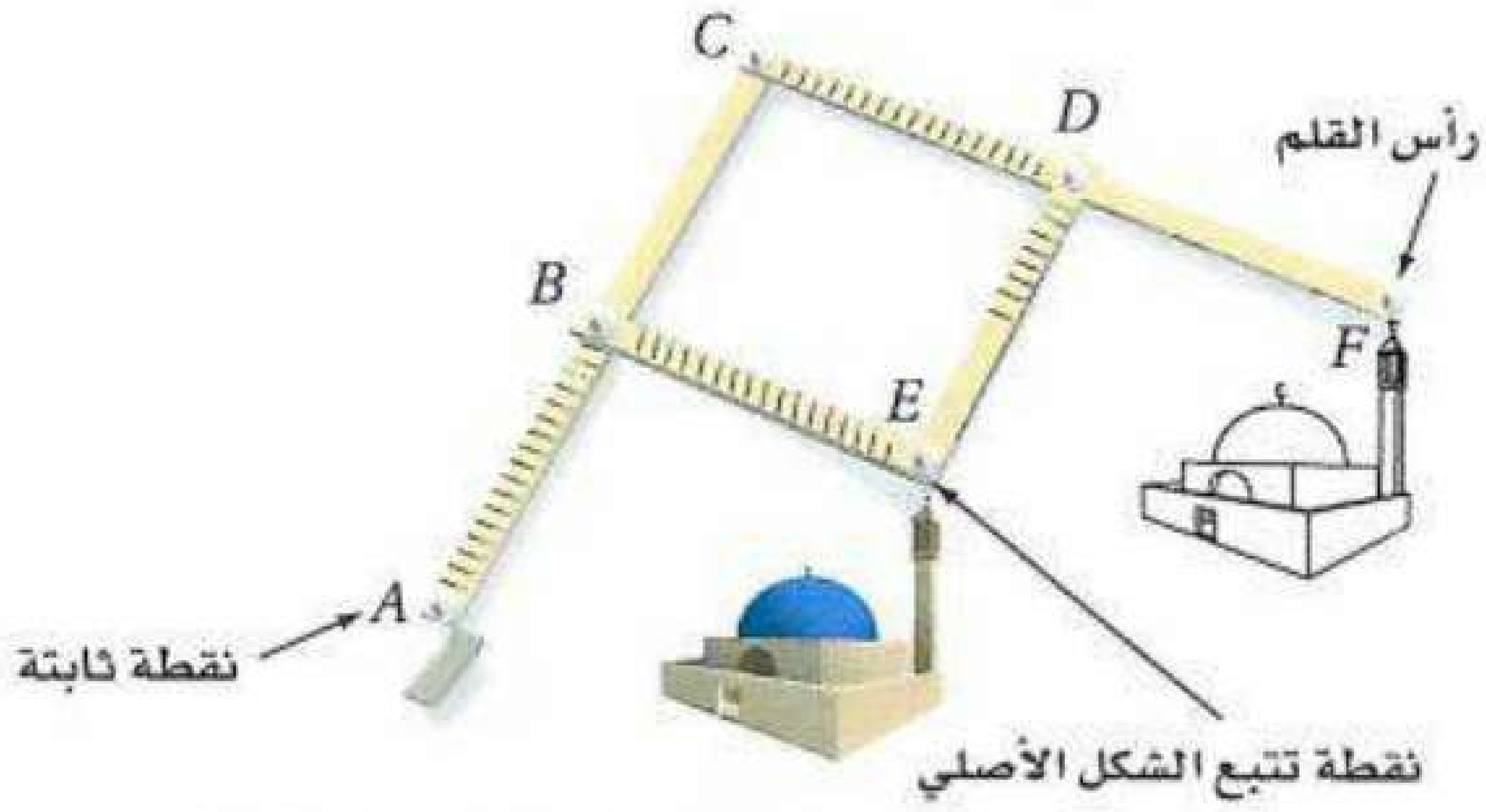
وبقسمة كلا الطرفين على 2 ينتج $m\angle A + m\angle B = 180^\circ$ لذا فإن الزاويتين المتحالفتين متكاملتان و $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$.

وبالمثل $2(m\angle A) + 2(m\angle D) = 360^\circ$ أو $m\angle A + m\angle D = 180^\circ$

إذن هاتان الزاويتان المتحالفتان متكاملتان و $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.

إذن الأضلاع المتقابلة متوازية، لذلك فالشكل ABCD متوازي أضلاع.

30) **المنساخ:** استعن بمعلومات الربط مع الحياة إلى اليمين والشكل أدناه.



a) إذا كان $\overline{DF} \cong \overline{DE}$, $\overline{AB} \cong \overline{CD} \cong \overline{BE}$, $\overline{AC} \cong \overline{CF}$، فاكتب برهانًا حرًّا لإثبات أنّ $\overline{CD} \parallel \overline{BE}$.

المعطيات: $\overline{DF} \cong \overline{DE}$, $\overline{AB} \cong \overline{CD} \cong \overline{BE}$, $\overline{AC} \cong \overline{CF}$

المطلوب: $\overline{CD} \parallel \overline{BE}$.

البرهان: نعلم أن $\overline{DF} \cong \overline{DE}$, $\overline{AB} \cong \overline{CD} \cong \overline{BE}$, $\overline{AC} \cong \overline{CF}$

إذن $AC = CF$ حسب تعريف التطابق

$AC = AB + BC$ و $CF = CD + DF$ (حسب مسلمة جمع القطع المستقيمة)

وبالتعويض، يكون $AB + BC = CD + DF$، وباستعمال التعويض مرة أخرى يكون $AB + BC = AB + DF$ وحسب خاصية الطرح $BC = DF$

إذن $\overline{BC} \cong \overline{DF}$ حسب تعريف التطابق، و $\overline{BC} \cong \overline{DE}$ (حسب خاصية التعدي)

وإذا كان كل ضلعين متقابلين لشكل رباعي متطابقين فإن الشكل الرباعي متوازي أضلاع. إذن BCDE متوازي أضلاع ومن تعريف متوازي الأضلاع يكون $\overline{BE}$ □ $\overline{CD}$.

b) مقياس الرسم للشكل المنسوخ هو نسبة CF إلى BE، فإذا كان $AB = 12\text{ in}, DF = 8\text{in}$، وطول الشكل الأصلي 5.5 in، فما طول الصورة؟

$$\overline{AB} = \overline{CD},\quad \overline{AB} = 12$$

$$\overline{CD} = 12$$

$$\overline{CF} = \overline{CD} + \overline{DF}$$

$$\overline{CF} = 12 + \overline{DF}$$

$$\overline{CF} = 12 + 8 = 20$$

$$\frac{\overline{CF}}{\overline{BE}} = \frac{20}{12}$$

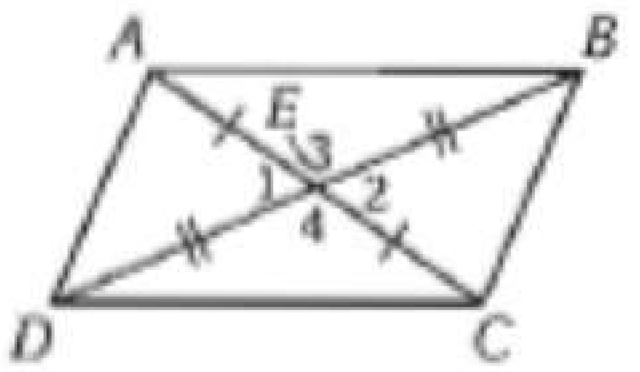
$$\frac{20}{12} = \frac{?}{5.5}$$

$$\frac{20 \times 5.5}{12} \approx 9.2\text{in}$$

31) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين للنظرية 5.11

المعطيات: $\overline{DE} \cong \overline{EB}$, $\overline{AE} \cong \overline{EC}$

المطلوب: ABCD متوازي أضلاع.



العبارات (المبررات):

1) $\overline{AE} \cong \overline{EC}, \overline{DE} \cong \overline{EB}$ **(معطيات)**

2) $\angle 1 \cong \angle 2, \angle 3 \cong \angle 4$ **(الزاويتان المتقابلتان بالرأس متطابقتان)**

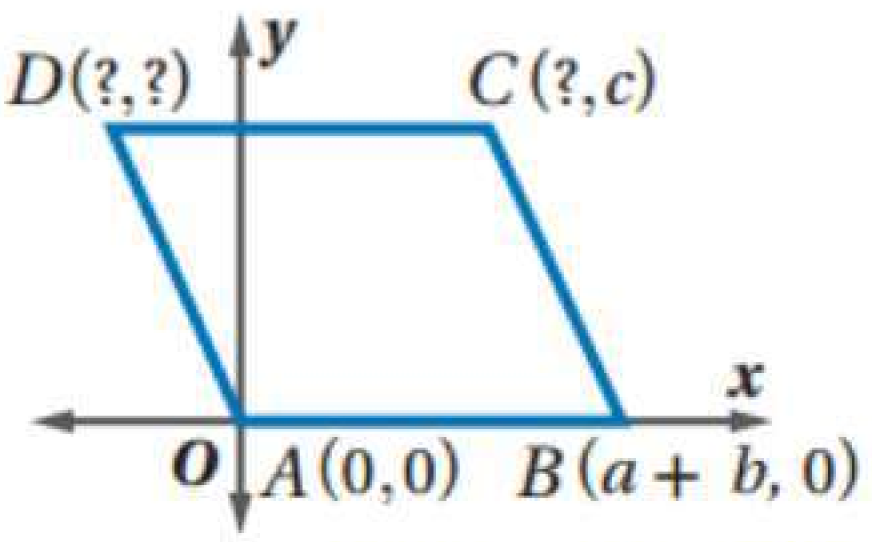
3) $\Delta ADE \cong \Delta CBE , \Delta ABE \cong \Delta CDE$ **(SAS)**

4) $\overline{AB} \cong \overline{DC}$, $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ (العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة)

5) ABCD متوازي أضلاع (إذا كان كل ضلعين متقابلين في شكل رباعي متطابقين فإنه متوازي أضلاع)

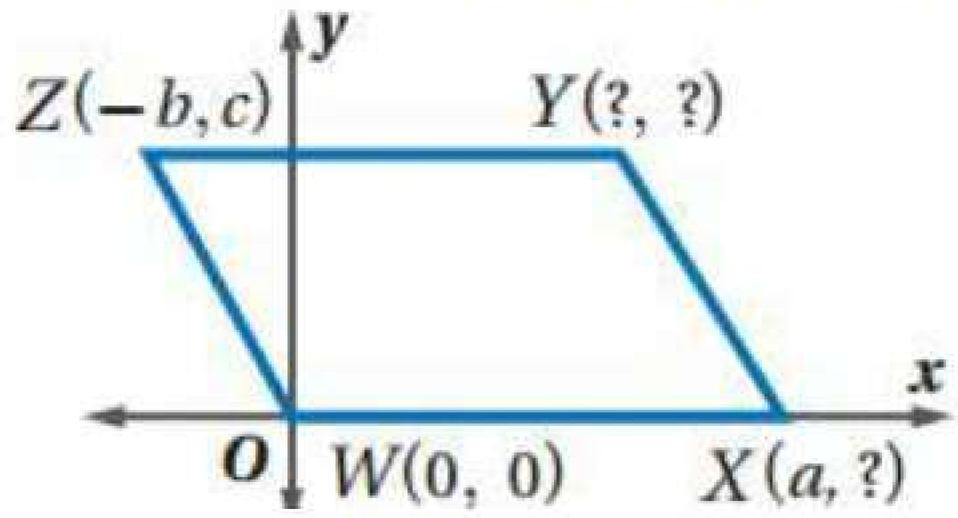
أوجد الإحداثيات المجهولة لرؤوس كل من متوازيي الأضلاع الآتيين:

32)



C (a , c) , D (- b , c)

33)



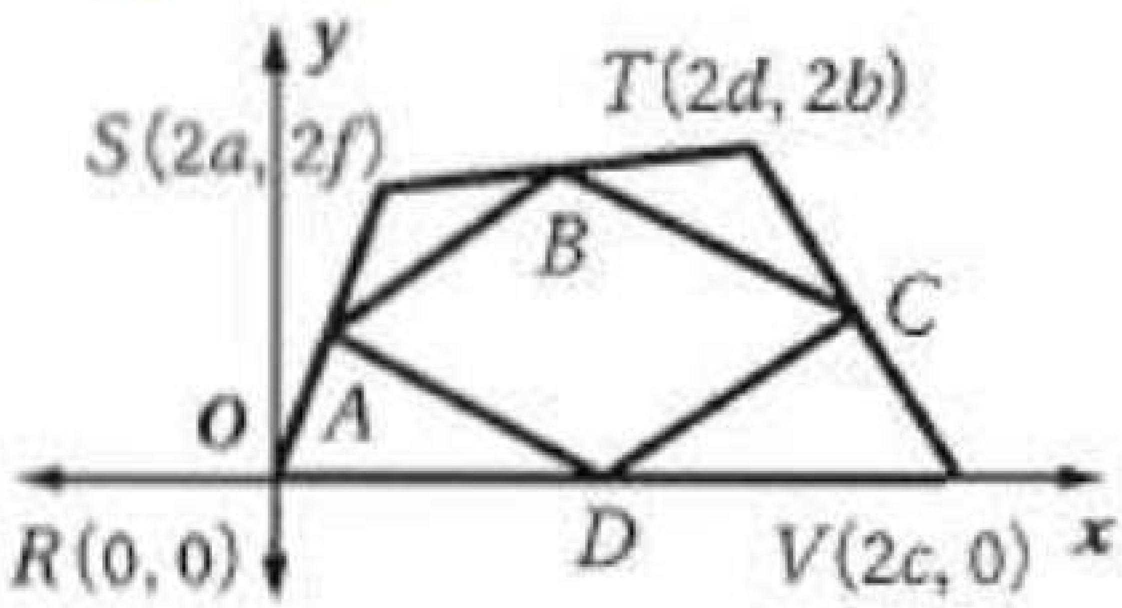
Y (a – b , c) , X (a , 0)

34) **برهان:** اكتب برهانًا إحداثيًا لإثبات أن القطع المستقيمة الواصلة بين منتصفات أضلاع أي شكل رباعي تشكّل متوازي أضلاع.

المعطيات: RSTV شكل رباعي

والنقاط A, B, C, D منتصفات الأضلاع $\overline{VR}$, $\overline{TV}$, $\overline{ST}$, $\overline{RS}$ على الترتيب.

المطلوب: ABCD متوازي أضلاع.



البرهان:

ارسم الشكل الرباعي RSTV في المستوى الإحداثي، وسِم الإحداثيات كما هو مبين في الشكل (استعمال إحداثيات من مضاعفات العدد 2 سيجعل الحسابات أسهل) ومن صيغة نقطة المنتصف تكون إحداثيات النقاط A, B, C, D هي:

$$A\left(\frac{2a}{2},\frac{2f}{2}\right)=(a\ ,f)$$

$$B\left(\frac{2d+2a}{2},\frac{2f+2b}{2}\right)=(d+a,\ f+b)$$

$$C\left(\frac{2d+2c}{2},\frac{2b}{2}\right)=(d+c\ ,b)$$

$$D\left(\frac{2c}{2},\frac{0}{2}\right)=(c\ ,0)$$

أوجد ميل كل من $\overline{AB}$ و $\overline{DC}$.

ولأن ميلي $\overline{AB}$ و $\overline{DC}$ متساويان، فإن القطعتين المستقيمتين متوازيتان.

استعمل صيغة المسافة بين نقطتين لإيجاد $\overline{AB}$, $\overline{DC}$.

$$\overline{AB}=\sqrt{((d+a-a)^2+(f+b-f)^2)}$$

$$=\sqrt{(d^2+b^2)}$$

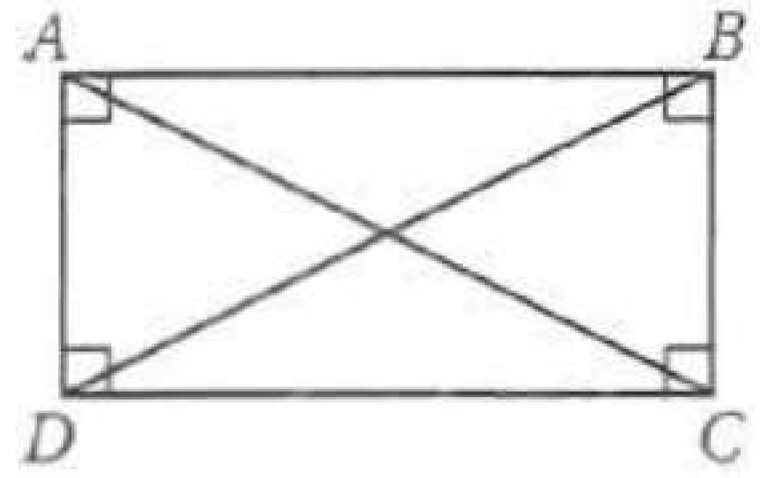
$$\overline{AB}=\sqrt{((d+c-c)^2+(b-0)^2)}$$

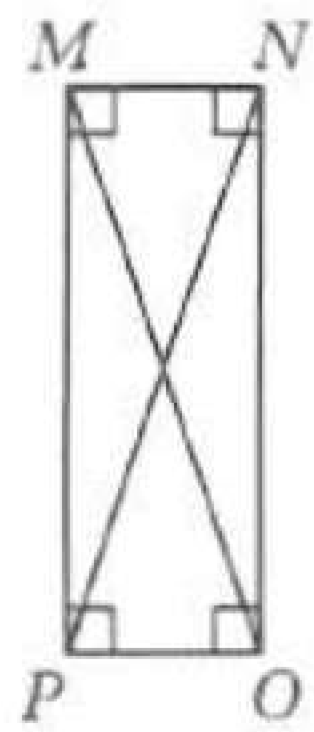
$$=\sqrt{(d^2+b^2)}$$

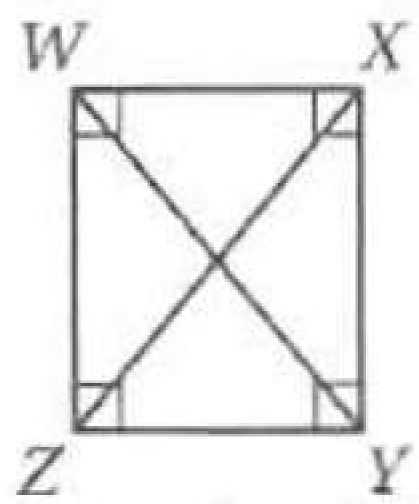
إذن $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ و $\overline{AB}\cong\overline{DC}$. لذلك ABCD متوازي أضلاع لأنه إذا كان ضلعان متقابلان في شكل رباعي متوازيين ومتطابقين فإنه متوازي أضلاع.

35) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة سوف تستقصي إحدى خصائص المستطيل.

a) **هندسيًا:** ارسم ثلاثة مستطيلات بأبعاد مختلفة وسمِّها $ABCD, MNOP, WXYZ$، ثم ارسم قطري كل منها.







b) قِس طولي قطري كل مستطيل، ثم أكمل الجدول المجاور.

المستطيل	القطر	الطول
ABCD	AC	3.3 cm
	BD	3.3 cm
MNOP	MO	2.8 cm
	NP	2.8 cm
WXYZ	WY	2.0 cm
	XZ	2.0 cm

c) **لفظيًّا:** اكتب تخمينًا حول قطري المستطيل.

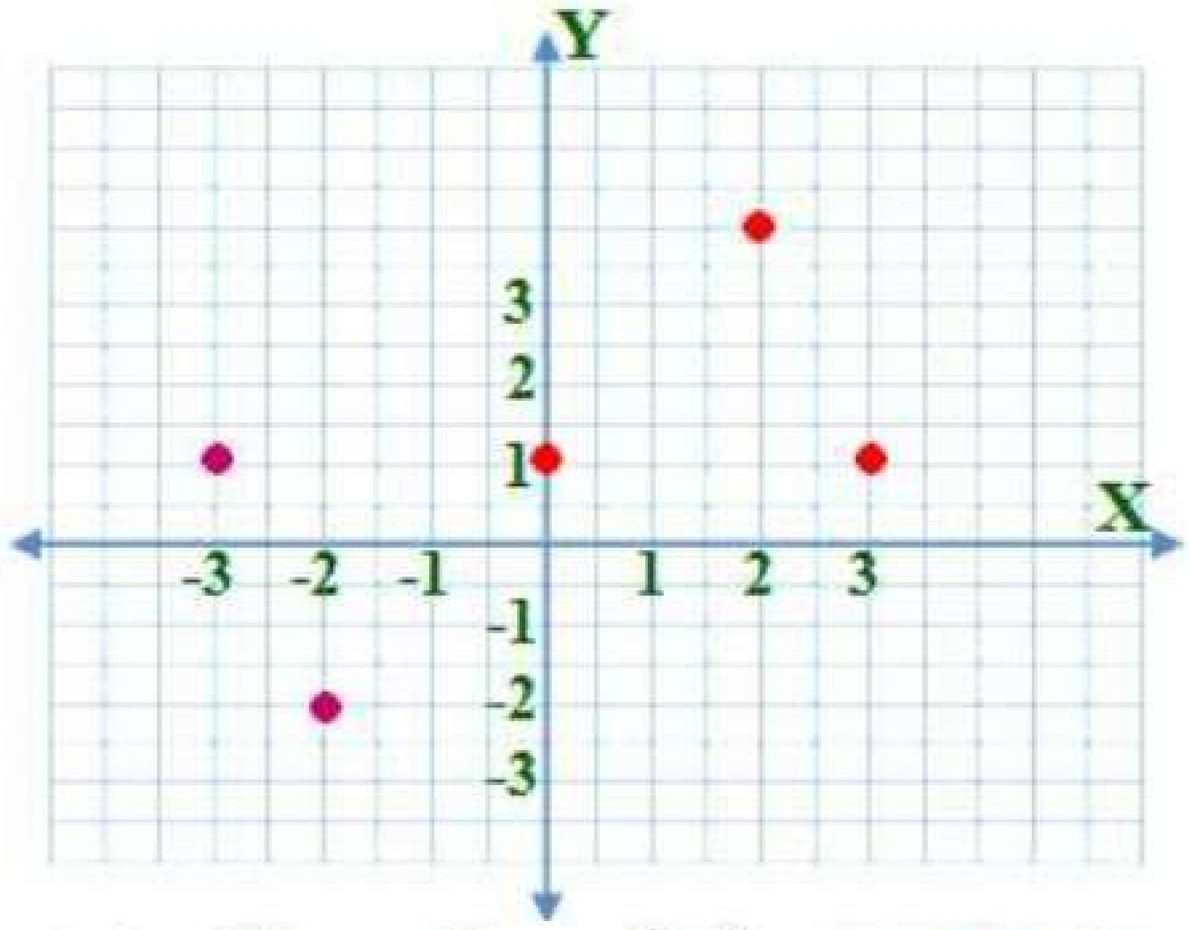
قطرا المستطيل متطابقان.

مسائل مهارات التفكير العليا:

36) **تحدٍّ:** يتقاطع قطرا متوازي أضلاع عند النقطة (0, 1). ويقع أحد رؤوسه عند النقطة (2, 4)، بينما يقع رأس آخر عند النقطة (3, 1). أوجد موقعي الرأسين الآخرين.

قطرا متوازي الأضلاع ينصف كل منهما الأخر

$$(-2,-2),(-3,1)$$



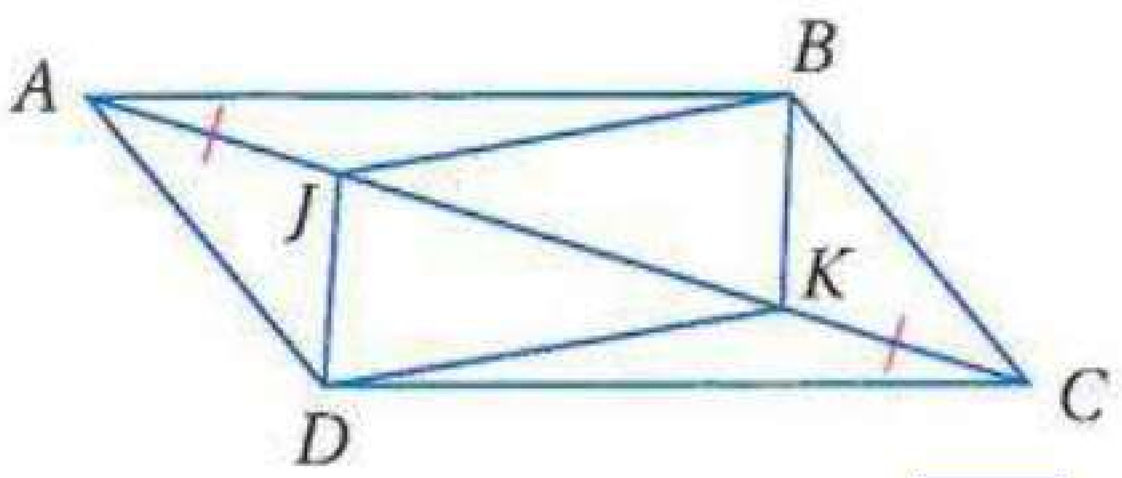
37) **اكتب:** بيِّن أوجه الشبه والاختلاف بين النظريتين 5.9 و 5.3 .

النظريتان إحداهما عكس الأخرى
فرضية النظرية 1.3 "الشكل متوازي الأضلاع"
وفرضية النظرية 1.9 "الأضلاع المتقابلة في الشكل الرباعي متطابقة".
نتيجة النظرية 1.3 الأضلاع المتقابلة متطابقة ونتيجة النظرية 1.9 الشكل الرباعي متوازي أضلاع.

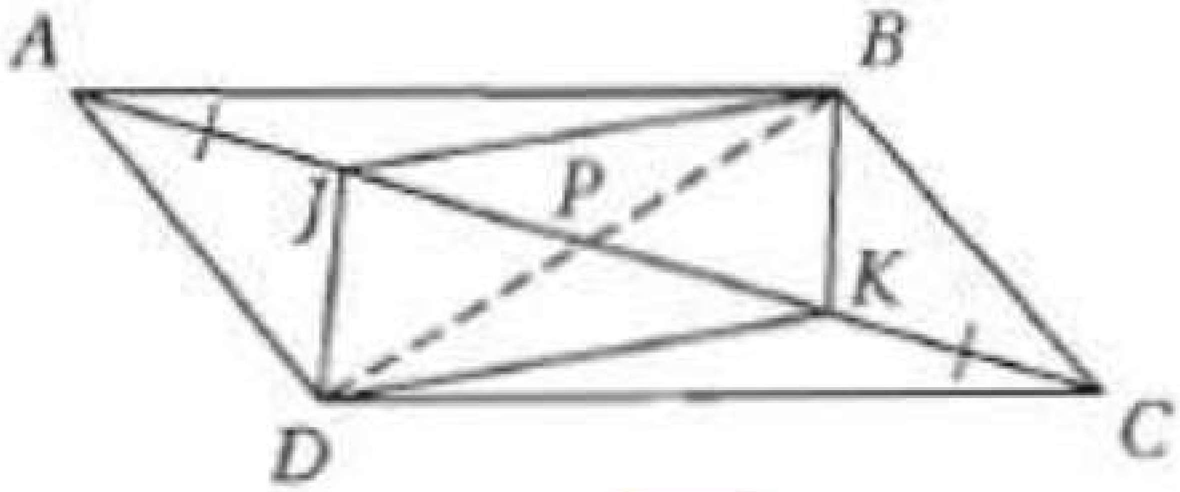
38) **تبرير:** إذا كانت الزوايا المتناظرة في متوازيي أضلاع متطابقة، فهل يكون متوازيا الأضلاع متطابقين أحيانًا، أم دائمًا، أم لا يكونان متطابقين أبدًا؟

أحياناً؛ يمكن أن يكون متوازيا الأضلاع متطابقين، إلا أنه يمكنك أيضاً جعل متوازي الأضلاع أكبر أو أصغر بتغيير أطوال الأضلاع ودون تغيير قياسات الزوايا.

39) **تحدٍّ:** في الشكل المجاور، $ABCD$ متوازي أضلاع، $\overline{AJ} \cong \overline{KC}$.
بيّن أن الشكل الرباعي $JBKD$ متوازي أضلاع.



المعطيات: $ABCD$ متوازي أضلاع و $\overline{AJ} \cong \overline{KC}$.
المطلوب: $JBKD$ متوازي أضلاع.



البرهان: ارسم $\overline{DB}$.
بما أن $ABCD$ متوازي أضلاع، فإن القطرين $\overline{DB}$ و $\overline{AC}$ ينصف كل منهما الآخر حسب النظرية 1.7. سمِ نقطة تقاطعهما P.
ومن تعريف نقطة المنتصف يكون $\overline{AP} \cong \overline{PC}$ ، إذن $AP = PC$.
وحسب مسلمة جمع القطع المستقيمة فإن
$AP = AJ + JP \ , PC = PK + KC$ وبالتعويض
$AJ + JP = PK + KC$ وبما أن $\overline{AJ} \cong \overline{KC}$ ، فإن $AJ = KC$ حسب تعريف التطابق.
$KC + JP = PK + KC$
وبالتعويض $KC + JP = PK + KC$ ومن خاصية الطرح يكون $JP = PK$.
إذن ومن تعريف التطابق تكون
$\overline{JP} \cong \overline{PK}$ إذن P نقطة منتصف $\overline{JK}$.
وبما أن $\overline{JK}$ و $\overline{DB}$ تنصف كل منهما الأخرى.
وهما قطران للشكل الرباعي JBKD، فحسب النظرية 1.11 يكون الشكل الرباعي JBKD متوازي أضلاع.

40) اكتب: استعمل العبارات الشرطية الثنائية "إذا وفقط إذا" في دمج كل من النظريات: 5.9 وَ 5.10 وَ 5.11 وَ 5.12 وعكسها.

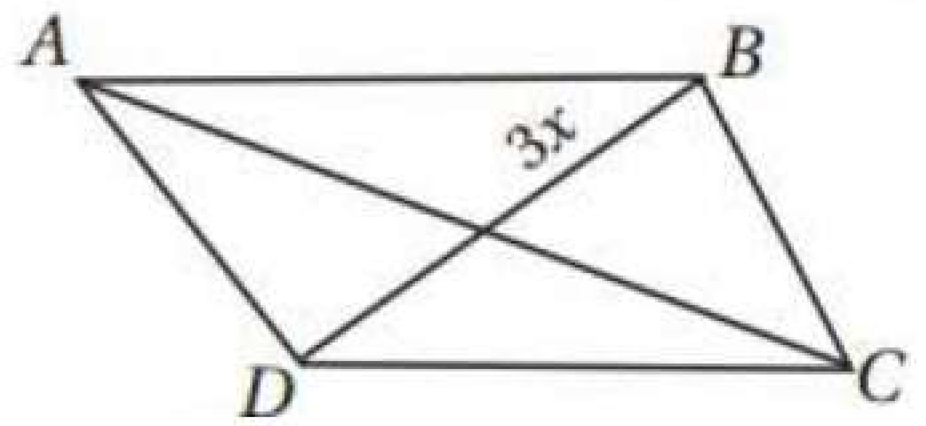
يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع إذا أمكنك بيان أن:
كل ضلعين متقابلين متطابقان أو متوازيان، أو كل زاويتين متقابلتين متطابقتان، أو القطران ينصف كل منهما الآخر، أو ضلعان متقابلان متطابقان ومتوازيان.

تدريب على الاختبار المعياري

41) إذا كان الضلعان AB, DC في الشكل الرباعي $ABCD$ متوازيين، فأيّ المعطيات الآتية كافية لإثبات أنّ $ABCD$ متوازي أضلاع؟

$\mathbf{B} : \overline{AB} \cong \overline{DC}$

42) إجابة قصيرة: في الشكل الرباعي $ABCD$ أدناه، إذا كان $AC = 40,\ BD = \frac{3}{5}AC$، $\overline{BD}$ تنصّف $\overline{AC}$، فما قيمة x التي تجعل $ABCD$ متوازي أضلاع؟



$$DB = \frac{3}{5}AC$$

$$DB = \frac{3}{5} \times 40$$

$$DB = 24$$

$$3x = \frac{24}{2} = 12$$

$$x = 12 \div 3 = 4$$

مراجعة تراكمية

هندسة إحداثيّة : أوجد إحداثي نقطة تقاطع قطري متوازي الأضلاع $ABCD$ في كل من السؤالين الآتيين (الدرس 2-1)

43) $A(-3, 5), B(6, 5), C(5, -4), D(-4, -4)$

بما أن قطري متوازي الأضلاع ينصف كلا منهما الآخر، فإن نقطة تقاطعهما هي نقطة منتصف كل من $\overline{BD}$, $\overline{AC}$. أوجد نقطة منتصف $\overline{AC}$ التي طرفاها

$$(-3,5),(5,-4)$$

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)=\left(\frac{-3+5}{2},\frac{5-4}{2}\right)$$ **(صيغة نقطة المنتصف)**

$$=(1,0.5)$$ **(بالتبسيط)**

إذن إحداثيا نقطة تقاطع قطري RSTU هما $(1,0.5)$

44) $A(2, 5), B(10, 7), C(7, -2), D(-1, -4)$

بما أن قطري متوازي الأضلاع ينصف كلا منهما الآخر، فإن نقطة تقاطعهما هي نقطة منتصف كل من $\overline{BD}$, $\overline{AC}$. أوجد نقطة منتصف $\overline{AC}$ التي طرفاها

$$(2,5),(7,-2)$$

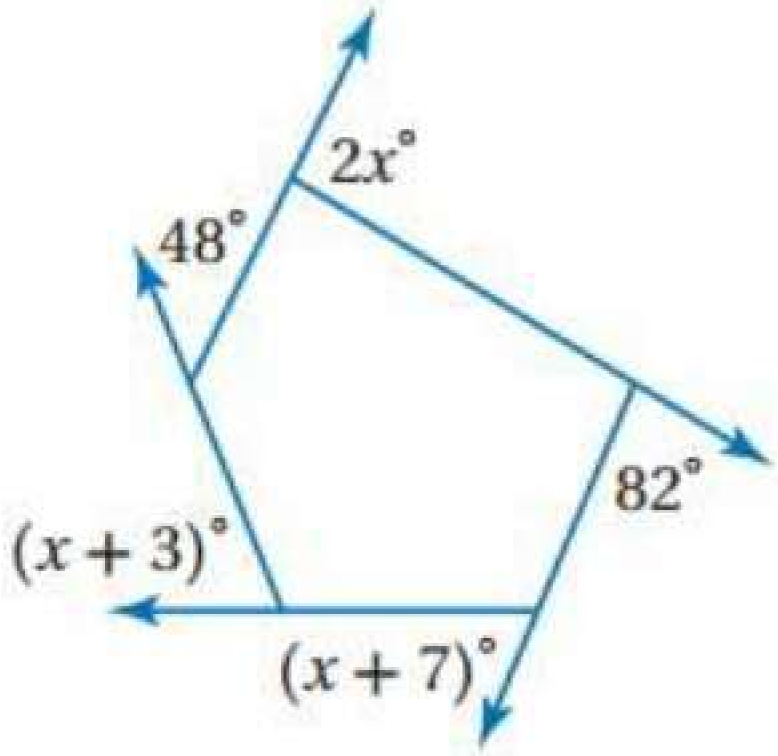
$$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)=\left(\frac{2+7}{2},\frac{5-2}{2}\right)$$ **(صيغة نقطة المنتصف)**

$$=(4.5,1.5)$$ **(بالتبسيط)**

إذن إحداثيا نقطة تقاطع قطري RSTU هما $(4.5,1.5)$

أوجد قيمة x في كل من الأسئلة الآتية : (الدرس 1-1)

(45



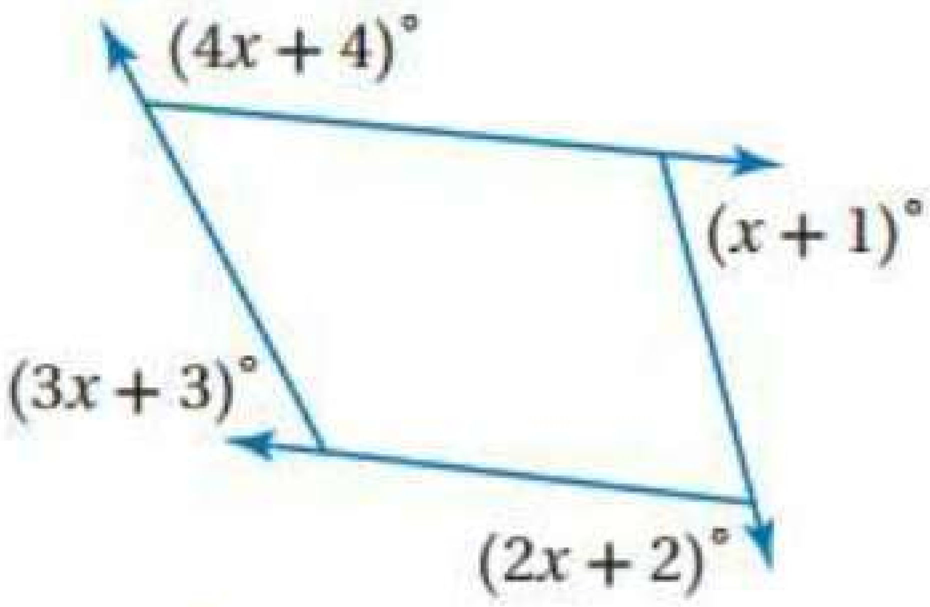
$$2x+(x+3)+(x+7)+82+48=360^{\circ}$$

$$4x+140=360$$

$$4x=220$$

$$x=55$$

(46

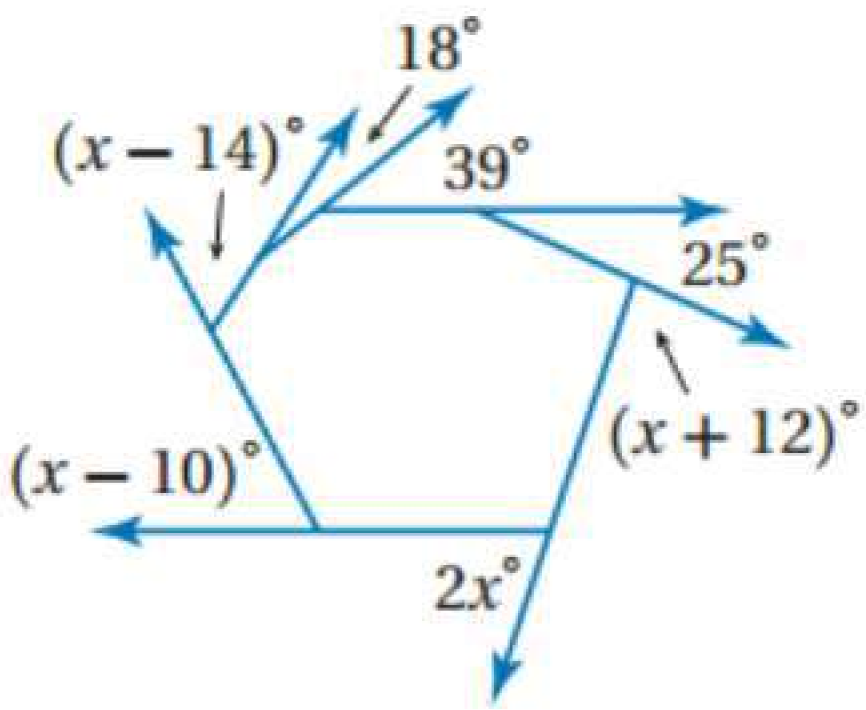


$$(4x+4)+(x+1)+(2x+2)+(3x+3)=360^{\circ}$$

$$10x=360-10$$

$$x=35$$

(47



$$\left(x-14\right)+18+39+25+\left(x+12\right)+2x+\left(x-10\right)=360^{\circ}$$

$$5x+70=360$$

$$5x=360-70=290$$

$$x=58$$

أوجد عدد أضلاع المضلع المنتظم المعطى قياس إحدى زواياه الداخلية في كل مما يأتي: (الدرس 1-1)

48) 140°

$$140n=\left(n-2\right).180$$

$$140n=180n-360$$

$$140n-180n=-360$$

$$-40n=-360$$

$$n=259$$

49) 160°

$$160n=\left(n-2\right).180$$

$$160n=180n-360$$

$$160n-180n=-360$$

$$-20n=-360$$

$$n=18$$

50) 168°

$$168n=\left(n-2\right).180$$

$$168n=180n-360$$

$$-180n+168n=-360$$

$$-12n=-360$$

$$n=30$$

(51 162°

$$162n = (n-2).180$$
$$162n = 180n - 360$$
$$-180n + 162n = -360$$
$$-18n = -360$$
$$n = 20$$

استعد للدرس اللاحق

استعمل الميل لتحديد ما إذا كان XY, YZ متعامدتين أم لا في كل مما يأتي:

(52 $X(-2, 2), Y(0, 1), Z(4, 1)$

ميل $\overline{XY} = \frac{-2-0}{2-1} = \frac{-2}{1} = -2$

ميل $\overline{YZ} = \frac{4-0}{1-1} = \frac{4}{0}$

غير متعامدتين لأن حاصل ضرب ميل كل منهم لا يساوي -1

(53 $X(4, 1), Y(5, 3), Z(6, 2)$

ميل $\overline{XY} = \frac{4-5}{1-3} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$

ميل $\overline{YZ} = \frac{5-6}{3-2} = \frac{-1}{1} = -1$

غير متعامدتين لأن حاصل ضرب ميل كل منهم لا يساوي -1

اختبار منتصف الفصل

-

أوجد مجموع قياسات الزوايا الداخليّة في كل من المضلعات المحدبة الآتية : (الدرس 1-1)

1) الخماسي

$n = 5$

$(n-2).180 = (5-2).180^\circ = 540^\circ$

2) السباعي

$n = 7$

$(n-2).180 = (7-2).180^\circ = 900^\circ$

3) ذو 18 ضلعًا

$n = 18$

$(n-2).180 = (18-2).180^\circ = 2880^\circ$

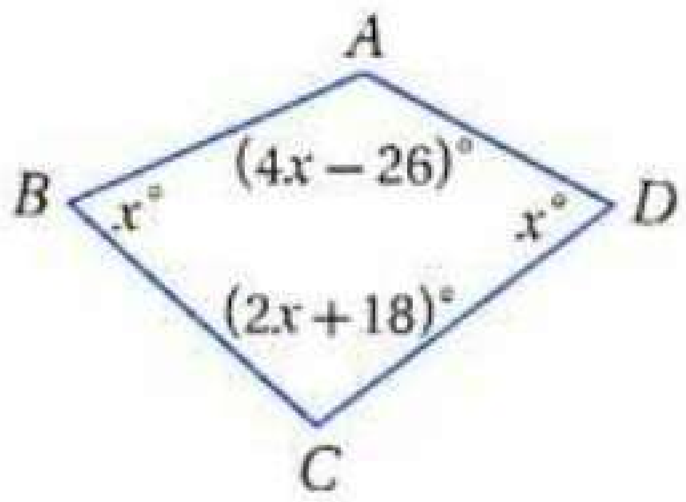
4) ذو 23 ضلعًا

$n = 23$

$(n-2).180 = (23-2).180^\circ = 3780^\circ$

أوجد قياسات جميع الزوايا الداخلية في كل من المضلعين الآتيين: (الدرس 1-1)

(5



$$(4x - 26 + x + x + 2x + 18) = 360^\circ$$

$$8x - 8 = 360$$

$$x = 46$$

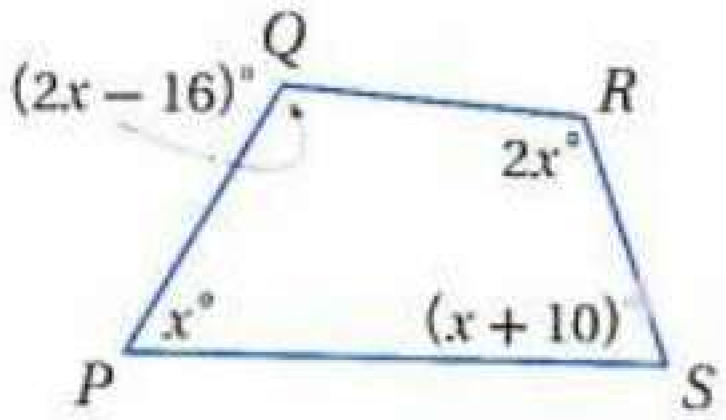
$$m\angle A = 4 \times 46 - 26 = 158^\circ$$

$$m\angle C = 2 \times 46 + 18 = 110^\circ$$

$$m\angle B = 46^\circ$$

$$m\angle D = 46^\circ$$

(6



$$(2x - 16 + 2x + x + x + 10) = 360^\circ$$

$$6x - 6 = 360$$

$$x = 61$$

$$m\angle Q = 2x - 16 = 2 \times 61 - 16 = 106^\circ$$

$$m\angle R = 2 \times 61 = 122^\circ$$

$$m\angle P = 61^\circ$$

$$m\angle S = x + 10 = 61 + 10 = 71^\circ$$

أوجد عدد أضلاع المضلع المنتظم المعطى مجموع قياسات زواياه الداخلية في كل مما يأتي :

(الدرس 1-1)

7) 720°

$$720 = (n-2).180$$
$$720 = 180n - 360$$
$$720 + 360 = 180n$$
$$n = 6$$

8) 1260°

$$1260 = (n-2).180$$
$$1260 = 180n - 360$$
$$1260 + 360 = 180n$$
$$n = 9$$

9) 1800°

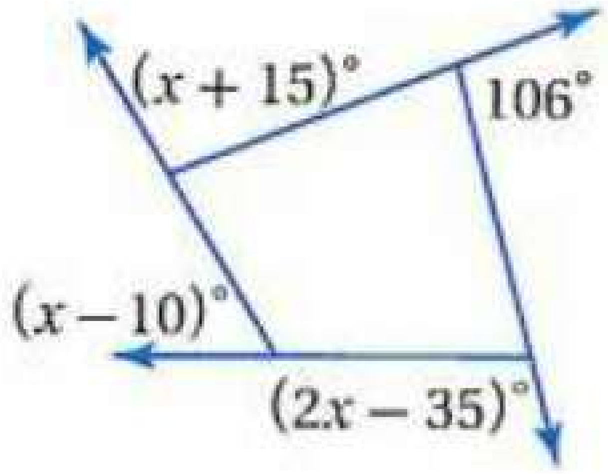
$$1800 = (n-2).180$$
$$1800 = 180n - 360$$
$$1800 + 360 = 180n$$
$$n = 12$$

10) 4500°

$$4500 = (n-2).180$$
$$4500 = 180n - 360$$
$$4500 + 360 = 180n$$
$$n = 27$$

أوجد قيمة x في كل من الشكلين الآتيين : (الدرس 1-1)

(11

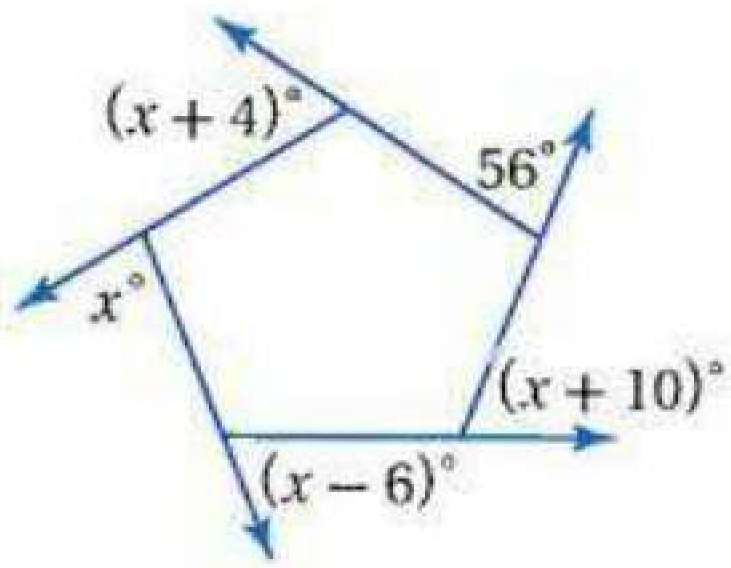


$$(x+15)+106+(x-10)+(2x-35)=360$$

$$4x+76=360$$

$$x=71$$

(12

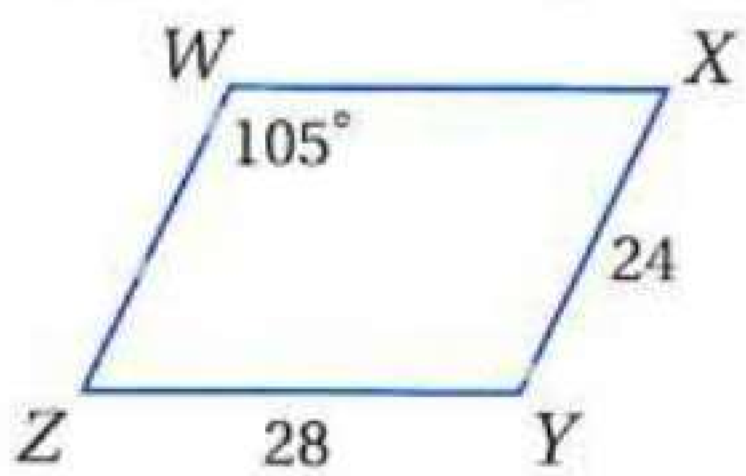


$$(x+4)+56+(x+10)+(x-6)+x=360$$

$$4x+64=360$$

$$x=74$$

استعمل $\square WXYZ$ لإيجاد كل مما يأتي : (الدرس 1-2)



$m\angle WZY$ (13

$$105^\circ+\angle WZY=180^\circ$$

$$\angle WZY=180^\circ-105^\circ$$

$$\angle WZY=75^\circ$$

14) WZ

$$WZ = XY = 24$$

15) $m\angle XYZ$

$$\angle XYZ = \angle ZWX = 105^{\circ}$$

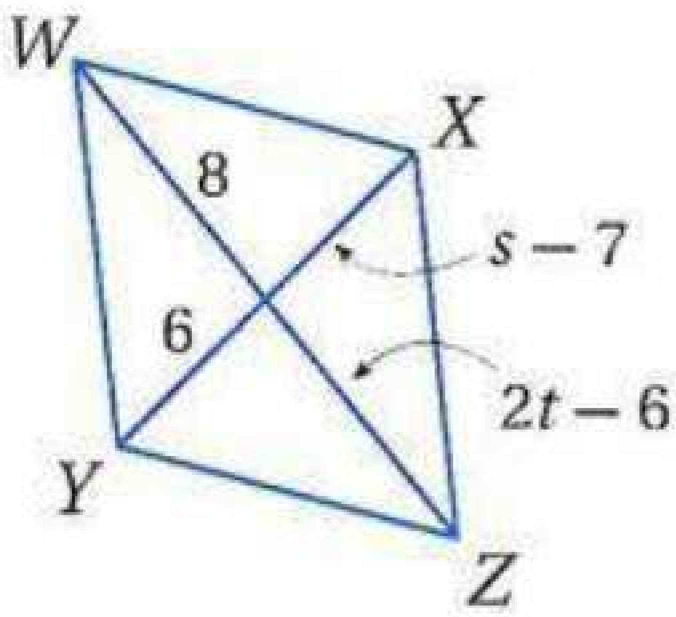
16) **إنارة:** استعمل مقبض الإنارة العلوي الذي يشكل متوازي أضلاع في إيجاد $m\angle p$ في $\square PQRS$. (الدرس 2-5)

$\angle P$ و $\angle S$ زاويتان متكاملتان

$$\angle P = 180 - 64 = 116^{\circ}$$

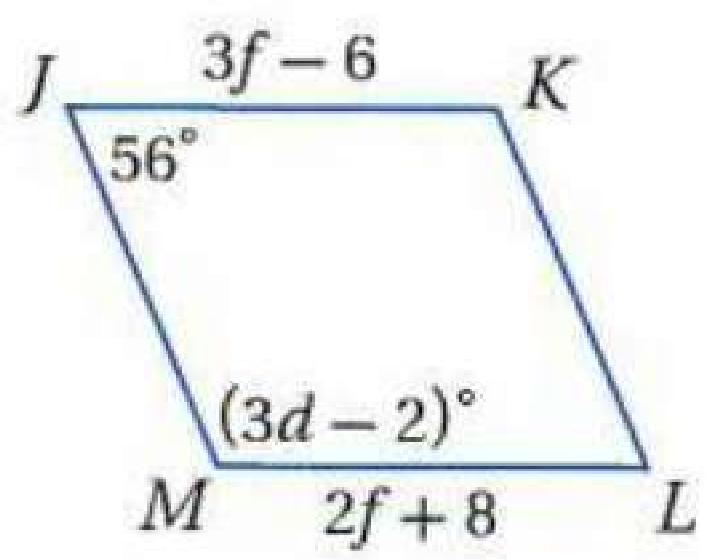
جبر: أوجد قيم المتغيرات في كل من متوازيي الأضلاع الآتيين : (الدرس 2-1)

17)



$$s - 7 = 6$$
$$s = 6 + 7$$
$$s = 13$$
$$2t - 6 = 8$$
$$2t = 6 + 8$$
$$t = 7$$

(18

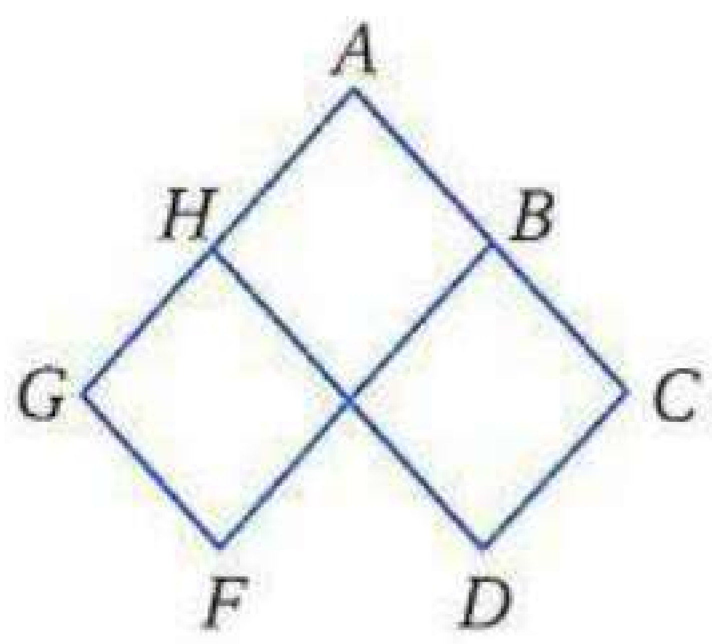


$$3f - 6 = 2f + 8$$
$$3f - 2f = 8 + 6$$
$$f = 14$$
$$56 + (3d - 2) = 180$$
$$54 + 3d = 180$$
$$3d = 180 - 54$$
$$3d = 126$$
$$d = 42$$

19) **برهان:** اكتب برهانًا ذا عمودين. (الدرس 2-1)

المعطيات: $\square HACD$ ، $\square GFBA$

المطلوب: $\angle F \cong \angle D$



البرهان: العبارات (المبررات):

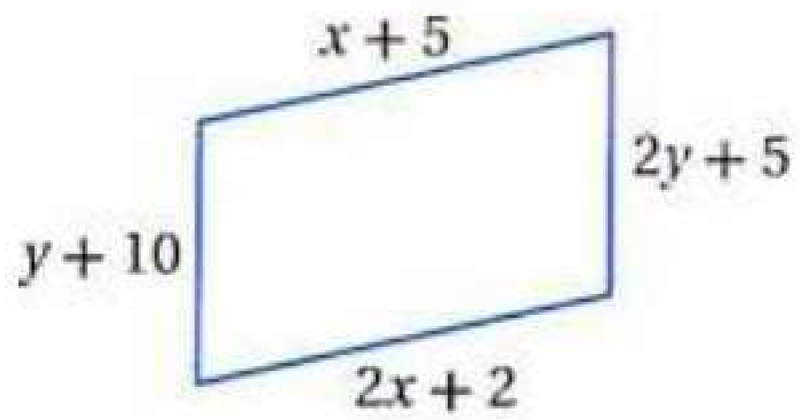
1) متوازيا الأضلاع GFBA, HACD. (معطيات)

2) $\angle F \cong \angle A, \angle A \cong \angle D$ (الزوايا المتقابلة في متوازي الأضلاع متطابقة)

3) $\angle F \cong \angle D$ (خاصية التعدي)

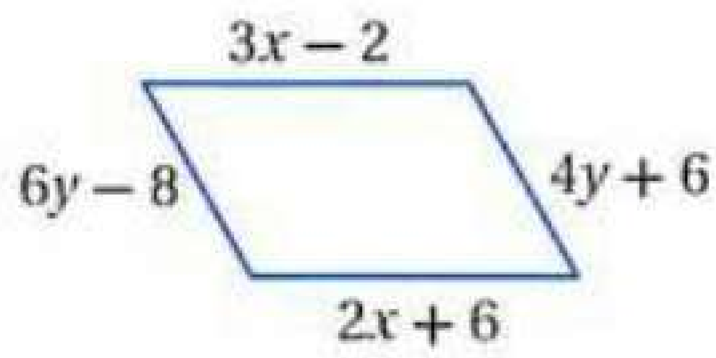
أوجد قيمتي x , y في كل مما يأتي بحيث يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع : (الدرس 3-1)

20)



$$x + 5 = 2x + 2$$
$$2x - x = 5 - 2$$
$$x = 3$$
$$y + 10 = 2y + 5$$
$$y = 10 - 5$$
$$y = 5$$

21)



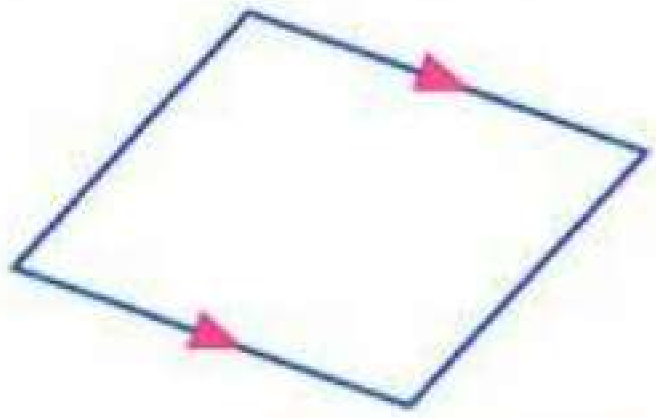
$$3x - 2 = 2x + 6$$
$$3x - 2x = 6 + 2$$
$$x = 8$$
$$4y + 6 = 6y - 8$$
$$6y - 4y = 6 + 8$$
$$2y = 14$$
$$y = 7$$

22) **طاولات:** لماذا يبقى سطح طاولة كي الثياب في الصورة أدناه موازيًا لأرضية الغرفة دائمًا؟

عُمل الساقان بحيث ينصف كل منهما الآخر،
إذن فالشكل الرباعي المتكون من أطراف الساقين يكون دائماً متوازي الأضلاع.
لذلك فسطح الطاولة العلوي يبقى موازياً لسطح الأرض.

23) **اختيار من متعدد:** أيّ الأشكال الرباعية الآتية ليس متوازي أضلاع؟ (الدرس 3-1)

D



هندسة إحداثيّة: حدد ما إذا كان الشكل الرباعي المعطاة إحداثيات رؤوسه في كل مما يأتي متوازي أضلاع؟ برّر إجابتك باستعمال الطريقة المحددة في السؤال. (الدرس 3-1)

24) $A(-6, -5), B(-1, -4), C(0, -1), D(-5, -2)$، صيغة المسافة بين نقطتين.

نعم؛ يجب أن يكون كل ضلعين متقابلين متطابقين.

المسافة بين A و B تساوي $\sqrt{26}$. والمسافة بين B وC تساوي $\sqrt{10}$.

والمسافة بين C وD تساوي $\sqrt{26}$. والمسافة بين D و A تساوي $\sqrt{10}$.

وبما أن كل ضلعين متقابلين متطابقان، فإن ABCD متوازي أضلاع.

حيث أن المسافة بين نقطتين تحسب من خلال $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

25) $Q(-5, 2), R(-3, -6), S(2, 2), T(-1, 6)$، صيغة الميل.

ميل $\overline{QR}$: $\frac{-5+3}{2+6}=\frac{-2}{8}=\frac{-1}{4}$

ميل $\overline{RS}$: $\frac{-3-2}{-6-2}=\frac{-5}{-8}=\frac{5}{8}$

ميل $\overline{ST}$: $\frac{2+1}{2-6}=\frac{3}{-4}$

ميل $\overline{OT}$: $\frac{-2+1}{4+1}=\frac{-1}{5}$

بما أن ميل $\overline{QR}$ لا يساوي ميل $\overline{ST}$، فإن QRST ليس متوازي أضلاع.

5-4 المستطيل

تحقق

1A) إذا كان $TS = 120$ ، فأوجد PR.

$TS = 120$ معطى

$QS = 120 \times 2 = 240$ قطرا المستطيل ينصف كل منهما الأخر

$QS = PR = 240$ من خصائص المستطيل القطران متطابقان

1B) إذا كان $m\angle PRS = 64°$، فأوجد $m\angle SQR$.

الزوايا الأربع قوائم للمستطيل

إذن $\angle SRQ = 90°$

$\angle QRT = \angle SQR = 90° - 64° = 26°$

2) استعن بالشكل في المثال 2. إذا كان $MK = 5y + 1$ ، $JP = 3y - 5$، فأوجد قيمة y.

قطرا المستطيل متطابقان وينصف كل منهما الأخر

$$MK = LJ$$

$$MK = (JP + PL)$$

$$\because JP = PL$$

$$\therefore MK = 2(JP)$$

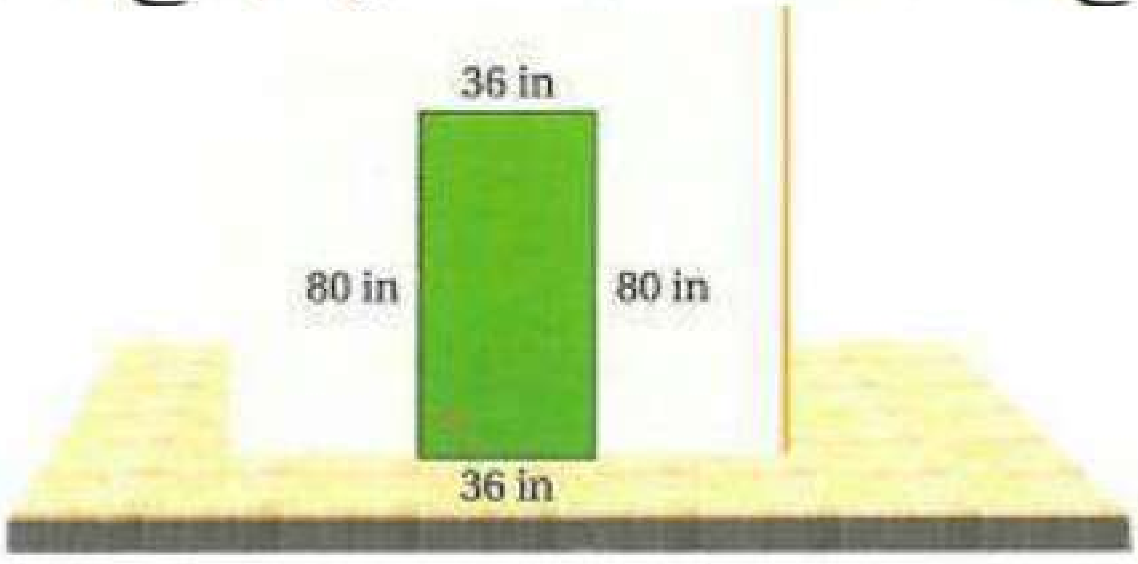
$$5y + 1 = 2(3y - 5)$$

$$5y + 1 = 6y - 10$$

$$6y - 5y = 1 + 10$$

$$y = 11$$

3) **تصميم:** بالرجوع إلى فقرة "لماذا؟" بداية الدرس. قاس أحمد أبعاد المنطقة التي قام بطلائها كما في الشكل أدناه. وباستعمال زاوية النجارين تحقق من أن الزاوية عند الركن الأيسر السفلي قائمة. فهل يمكنه استنتاج أن المنطقة مستطيلة الشكل؟ وضِّح إجابتك.



نعم؛ بما أن الأضلاع المتقابلة متطابقة، فإن المنطقة التي قام بطلائها تشكل متوازي أضلاع. وإذا كانت إحدى زوايا متوازي أضلاع قائمة فإن جميع الزوايا قائمة.
وبما أن الزاوية السفلى إلى اليسار قائمة فإن جميع الزوايا قائمة، لذلك وحسب التعريف، يكون المدخل مستطيلاً.

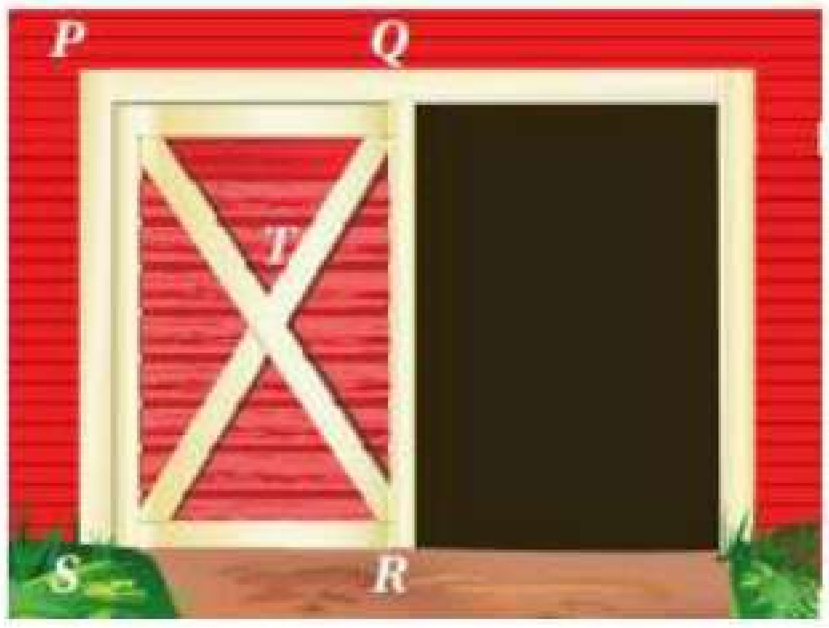
4) إذا كانت إحداثيات رؤوس الشكل الرباعي $JKLM$ هي $K(-8, -6), L(5, -3), M(2, 5)$، $J(-10, 2)$. فهل $JKLM$ مستطيل؟ استعمل صيغة الميل.

ميل $\overline{JK}$ **:** $\frac{-10+8}{2+6} = \frac{-2}{8} = \frac{-1}{4}$

ميل $\overline{ML}$ **:** $\frac{5-2}{-3-5} = \frac{3}{-8}$

بما أن ميل $\overline{JK}$ **لا يساوي ميل** $\overline{ML}$ **، أي أنهما غير متوازيان إذن** $JKLM$ **ليس مستطيل.**

تأكد:



زراعة: الشكل المجاور يبيّن بوّابة مخزن حبوب مستطيلة الشكل، فيها الدعامتان المتقاطعتان تقويان دفة البوّابة، وتحفظانها من الالتواء مع مرور الزمن.

إذا كان $PS = 7$ ft, $ST = 3\frac{13}{16}$ ft, $m\angle PTQ = 67°$،

1) QR

(الضلعان المتقابلان في المستطيل متطابقان)

$$PS = QR = 7ft$$

2) SQ

$$SQ = (ST + TQ)$$
$$ST = TQ$$
$$SQ = 2ST$$
$$SQ = 2 \times 3\frac{13}{16}$$
$$SQ = 2 \times \frac{61}{16}$$
$$SQ = 7\frac{5}{8}ft$$

3) $m\angle TQR$

$\because \angle PTQ = 67$

$\because TQ = PT$

$\therefore \angle TPQ = \angle TQP = \dfrac{180 - 67}{2} = 56.5^\circ$

$\therefore \angle TQR = 90^\circ - 56.5^\circ$

$\therefore \angle TQR = 33.5^\circ$

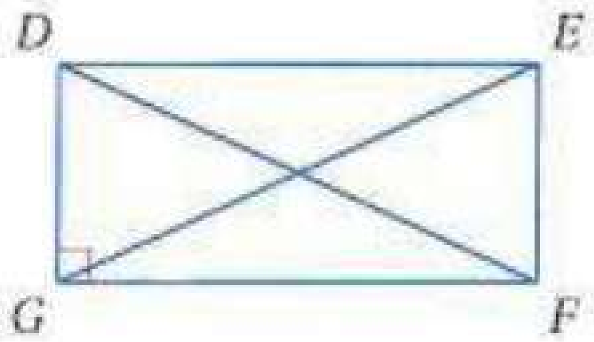
4) $m\angle TSR$

$\therefore \angle STR = \angle PTQ = 67^\circ$

$\therefore \angle TSR = \dfrac{180^\circ - 67^\circ}{2}$

$\therefore \angle TSR = 56.5^\circ$

جبر: استعن بالمستطيل $DEFG$ المبين جانبًا.



5) إذا كان $EG = x + 5$, $FD = 3x - 7$، فأوجد EG .

قطرا المستطيل متطابقان

$EG = FD$

$x + 5 = 3x - 7$

$3x - x = 5 + 7$

$2x = 12$

$x = 6$

$EG = x + 5 = 6 + 5 = 11$